УДК 517.929

А.С. Ларионов, И.А. Никишина

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается квазилинейное функционально-дифференциальное уравнение первого порядка нейтрального типа с нелинейным оператором в правой части, не обладающим, вообще говоря, свойством монотонности. Приводятся достаточные условия разрешимости начальной и краевой задач, а также оценки на их решения. В качестве одного из возможных приложений рассматривается задача динамики основных производственных фондов на предприятии.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение, краевая задача, разрешимость, монотонный оператор, математическая модель.

Важное место в теории функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) занимают нелинейные краевые и начальные задачи. Такие задачи естественно возникают при моделировании реальных процессов в том случае, когда линейные модели дают слишком грубое описание или вовсе невозможны. К настоящему времени наиболее глубоко разработана теория нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, монографию [1], обзоры [2, 3] и имеющуюся там библиографию). Сравнительно недавно стала развиваться теория нелинейных задач и для ФДУ благодаря работам [4—6].

Первый вопрос, который возникает при изучении нелинейных краевых и начальных задач — это вопрос о разрешимости. Одним из эффективных методов доказательства существования решения нелинейной задачи является, как отмечается в обзоре [7], монотонный итеративный метод. В основе этого метода лежит редукция исходной задачи к уравнению $x = Ax$ с монотонным оператором A, определенным на некотором частично упорядоченном множестве. Вспомогательным аппаратом при таком подходе является метод дифференциальных неравенств (метод нижних и верхних решений).

Для пространств функций, заданных на отрезке $[0,\, b]$, будем использовать следующие стандартные обозначения: C — пространство непрерывных на $[0,\, b]$ функций; L_p — пространство функций, суммируемых на $[0,\, b]$ со степенью p $(1 \leqslant p < \infty)$; L_∞ — пространство функций, измеримых и ограниченных в существенном на $[0,b]$; $D_p = R\times L_p$—пространство абсолютно непрерывных на $[0,\, b]$ функций с производной из L_p.

Положим

$$(S_r y)(t) = y_r(t) = \begin{cases} y[r(t)], & r(t) \in [0,\, b], \\ 0, & r(t) \notin [0,\, b]; \end{cases}$$

$\overline{y}_r(t) = \{y_{r_1}(t), \dots, y_{r_n}(t)\}$.

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}x)(t) \equiv \dot{x}(t) - \sum_{i=1}^{m} b_i(t)\dot{x}_{g_i}(t) + q(t)x(t) = \\ = f(t, x(t), \overline{x}_h(t))), \quad t \in [0,b], \end{aligned} \tag{1}$$

где $b_i \in L_\infty$, $i = 1,\dots,m$; $q \in L_p$; g_i $(i = 1,\dots,m)$, h_j $(j = 1,\dots,n)$—измеримые функции, причем $g_i\,(t) \leqslant t$, $h_j\,(t) \leqslant t$ при почти всех $t \in [0,\, b]$; функция $f : [0,\, b] \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям Каратеодори.

Пусть $e \subset [0,b]$, $g^{-1}(e) = \{t \in [0,b] : g(t) \in [0,b]\}$ и mes—мера Лебега. Будем предполагать выполнеными следующие условия [8]:

(i) для всех $i = 1,\dots,m$ и $1 \leqslant p < \infty$ $\mu_i = \left\{\sup_{e\subset[0,\,b]} \frac{\operatorname{mes} g_i^{-1}(e)}{\operatorname{mes} e}\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty$,

где верхняя грань берется по всем таким подмножествам e отрезка $[0,b]$, что $\operatorname{mes} e > 0$;

(ii) существует такое $\tau > 0$, что при всех $i = 1,\dots,m$ множества $\kappa_i = \{t \in [0,\, b] : t - g_i(t) \leqslant \tau,\ g_i(t) \in [0,\, b]\}$ либо пусты, либо $\sum_{i=1}^{m} \mu_i \operatorname{vrai\,sup}_{t\in\kappa_i} |b_i(t)| < 1$.

Условие (i) обеспечивает непрерывное действие оператора внутренней суперпозиции $(Sy)(t) = \sum_{i=1}^{m} b_i\,(t)\,(S_{g_i}y)\,(t)$ в пространстве L_p.

Как показано в работе [8], число μ_i является нормой оператора S_{g_i}, действующего в пространстве L_p $(1 \leqslant p < \infty)$; если $p = \infty$, то $\|S_{g_i}\| = 1$.

При выполнении условия (ii) спектральный радиус оператора S меньше единицы.

Решением уравнения (1) назовем функцию $x \in D_p$, удовлетворяющую этому уравнению при почти всех $t \in [0,b]$.

Дополнительное условие для уравнения (1) зададим в виде

$$\ell x = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где $\ell : D_p \to \mathbb{R}$ — линейный ограниченный функционал.

Для $v_j, z_j \in L_\infty$, $v_j \leqslant z_j$, обозначим $[v_j, z_j] = \{x \in L_\infty : v_j \leqslant x \leqslant z_j\}$, $j = 0, 1, \ldots, n$; $[\overline{v}, \overline{z}] = [v_0, z_0] \times [v_1, z_1] \times \ldots \times [v_n, z_n]$.

Напомним [8], что оператор A называется *изотонным*, если из $x_1 \leqslant x_2$ следует, что $Ax_1 \leqslant Ax_2$, и *антитонным*, если $Ax_1 \geqslant Ax_2$.

Будем говорить [8], что функция f удовлетворяет условию $\mathcal{L}_1[\overline{v}, \overline{z}]$ (соответственно, условию $\mathcal{L}_2[\overline{v}, \overline{z}]$), если существуют такие функции r^1, r_j^1 (соответственно, r^2, r_j^2), $j = 1, \ldots, n$, принадлежащие L_p, и такой изотонный (антитонный) оператор $\mathcal{N}_1 : [\overline{v}, \overline{z}] \to R$ ($\mathcal{N}_2 : [\overline{v}, \overline{z}] \to R$), что

$$\mathcal{N}_1(u, \overline{u}_h)(t) = f(t, u(t), \overline{u}_h(t)) + r^1(t)u(t) + \sum_{j=1}^{n} r_j^1(t) u_{h_j}(t), (u, \overline{u}_h) \in [\overline{v}, \overline{z}],$$

$$(\mathcal{N}_2(u, \overline{u}_h)(t) = f(t, u(t), \overline{u}_h(t)) + r^2(t)u(t) + \sum_{j=1}^{n} r_j^2(t) u_{h_j}(t), (u, \overline{u}_h) \in [\overline{v}, \overline{z}]).$$

Без ограничения общности считаем, что $r^1(t) \geqslant 0$, $r_j^1(t) \geqslant 0$, $r^2(t) \leqslant 0$, $r_j^2(t) \leqslant 0$, $j = 1, \ldots, n$.

Обозначим

$$\sigma_r(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } r(t) \in [0, b], \\ 0, & \text{если } r(t) \notin [0, b]. \end{cases}$$

Теорема 1. *Пусть $b_i(t)\, \sigma_{g_i}(t) \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$, существуют функции $v, z \in D_p$, такие что $v \leqslant z$ и при почти всех $t \in [0, b]$ выполняются неравенства*

$$(\mathcal{M}v)(t) \leqslant f(t, v(t), \overline{v}_h(t)), \tag{3}$$

$$(\mathcal{M}z)(t) \geqslant f(t, z(t), \overline{z}_h(t)), \tag{4}$$

$$lv \leqslant lx \leqslant lz. \tag{5}$$

Пусть далее $v_0 = v$, $v_j = v_{h_j}$, $z_0 = z$, $z_j = z_{h_j}$, $j = 1, \ldots, n$, функция f удовлетворяет условию $\mathcal{L}_1[\overline{v}, \overline{z}]$, а краевая задача

$$(\mathcal{M}_1 x)(t) \equiv (\mathcal{M}x)(t) + r^1(t)x(t) + \sum_{j=1}^{n} r_j^1(t)\, x_{h_j}(t) = \eta_1(t)\,, \; lx = 0 \tag{6}$$

однозначно разрешима и ее функция Грина $G_1(t, s)$ положительна в квадрате $[0, b] \times [0, b]$.

Тогда существует решение x *краевой задачи* (1), (2), *удовлетворяющее неравенствам* $v \leqslant x \leqslant z$.

Если, кроме того, функция f *удовлетворяет условию* $\mathcal{L}_2[\overline{v}, \overline{z}]$, *краевая задача*

$$(\mathcal{M}_2 x)(t) \equiv (\mathcal{M}x)(t) + r^2(t)x(t) + \sum_{j=1}^{n} r_j^2\,(t)\; x_{h_j}(t) = \eta_2(t),\; lx = 0$$

однозначно разрешима, а ее функция Грина $G_2(t,s)$ *положительна в квадрате* $[0,b] \times [0,b]$, *то решение* x — *единственно.*

Приведем схему доказательства теоремы 1.

Запишем уравнение (1) в виде

$$(\mathcal{M}_1 x)(t) \equiv \dot{x}(t) - \sum_{i=1}^{m} b_i(t)\dot{x}_{g_i}(t) + q(t)x(t) + r^1(t)x(t) + \\ + \sum_{j=1}^{n} r_j^1(t)\, x_{h_j}(t) = \mathcal{N}_1(x, \overline{x}_h)(t), \quad t \in [0,b]. \tag{7}$$

Тогда задача (7), (2) эквивалентна уравнению $x = \mathcal{A}x$, где оператор $\mathcal{A} : [v,z] \to C$ определен равенством

$$(\mathcal{A}x)(t) = \int\limits_0^b G_1(t,s)\mathcal{N}_1(x, \overline{x}_h)(s)ds + \xi_1(t),$$

а $\xi_1\,(t)$ — решение задачи $(\mathcal{M}_1 x)(t) = 0$, $lx = \alpha$. Оператор $\mathcal{A} : [v,z] \to C$ изотонен и вполне непрерывен.

Из условий теоремы следует, что оператор $\mathcal{A}$ отображает конусный отрезок $[v,z]$ в себя. В силу принципа Шаудера он имеет неподвижную точку, которая является решением задачи (1), (2).

Единственность решения в конусном отрезке доказывается на основе редукции задачи (1), (2) к уравнению с антитонным оператором.

Замечание 1. Другие достаточные условия существования решения краевой задачи (1), (2) приведены в работе [9].

Замечание 2. При доказательстве теоремы 1 существенным является вопрос о знакоопределенности функции Грина соответствующей линейной краевой задачи (функции Коши в случае начальной задачи

$\ell x = x(0)$). Эффективные признаки положительности функции Коши уравнения $(\mathcal{M}x)(t) = \eta(t)$ приведены в работе [10]. Если $\ell x = x(b)$, то признаки знакопостоянства функции Грина соответствующей линейной краевой задачи вытекают из результатов работы [10].

Замечание 3. В случае если функция f обладает свойством монотонности по функциональным аргументам, можно привести ряд следствий теоремы 1. Справедливо, например, следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $b_i(t)\sigma_{g_i}(t) \geqslant 0, i = 1, \ldots, m$ *и существует пара функций* $v, z \in L_\infty$, $v \leqslant z$, *таких что при почти всех* $t \in [0, b]$ *выполняются неравенства* (3)—(5). *Пусть функция* f *не убывает по функциональным аргументам, краевая задача* (6) *однозначно разрешима, а ее функция Грина положительна в квадрате* $[0,\, b] \times [0,\, b]$.

Тогда существует решение x *краевой задачи* (1), (2), *удовлетворяющее неравенствам* $v \leqslant x \leqslant z$.

Рассмотренная задача (1), (2) представляет собой динамическую модель, которая даже в случае $b_i(t) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, охватывает достаточно широкий класс моделей, возникающих при исследовании реальных процессов с учетом эффекта последействия (запаздывания) (см., например, [9]). Рассмотрим одну такую модель, описывающую динамику основных производственных фондов (ОПФ) на предприятии. В линейном случае эта модель исследована в книге [5].

На производственных предприятиях со временем приходится обновлять основные производственные фонды. При этом важно учитывать неизбежную задержку τ во времени от момента выделения средств на эти цели к моменту введения новых ОПФ. Эта задержка возникает по ряду причин. К примеру, из-за высокой стоимости фондов не всегда удается сразу выделить на эти цели нужную сумму, поэтому предприятие вынуждено накапливать эту сумму постепенно. И даже при наличии необходимой суммы требуется время на монтаж оборудования, его наладку и пуск в эксплуатацию.

На практике наиболее часто встречается такой вариант моделирования запаздывания в процессе освоения капитальных вложений, который предполагает наличие промежутка времени τ, по прошествии которого капиталовложения превращаются в основные фонды. В этом случае математическая модель прироста ОПФ в непрерывном времени описывается следующим дифференциальным уравнением

$$\dot{K}(t) = I(t-\tau) - \mu K(t), \tag{8}$$

где $K(t)$ — объем ОПФ в текущий момент времени; I — инвестиции в развитие; τ — промежуток времени, по истечении которого происходит прирост ОПФ; μ — коэффициент амортизации.

Пусть в уравнении (8) поступление инвестиций носит нелинейный характер, например, $I(t-\tau) = \sin K(t-\tau)$. Тогда уравнение (8) принимает вид

$$\dot{K}(t) + \mu K(t) = \sin K(t-\tau).$$

Рассмотрим краевую задачу

$$(\mathcal{M}K)(t) \equiv \dot{K}(t) + \mu K(t) = \sin K(t-\tau), \quad t \in [0,\, T], \tag{9}$$

$$K(T) = 2K(0). \tag{10}$$

В качестве функций v и z выберем $v \equiv 0$, $z \equiv 1$, тогда функция $\sin u(t-\tau)$ удовлетворяет условию $\mathcal{L}_1[0,1]$ с коэффициентом $r_1^1(t) = 1$.

Неравенство $(\mathcal{M}v)(t) \leqslant \sin v(t-\tau)$ очевидно. При $\mu \geqslant \sin 1$ выполняется также неравенство $(\mathcal{M}z)(t)(t) \geqslant \sin z\,(t-\tau)$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть функция Грина $G(t,s)$ задачи*

$$\dot{K}(t) + \mu K(t) + K(t-\tau) = \eta^1(t), \quad K(T) = 2K(0) \tag{11}$$

положительна в квадрате $[0,T] \times [0,T]$ и выполняются неравенства

$$0 \leqslant x\,(0) \leqslant 0{,}5, \quad \mu \geqslant \sin 1.$$

Тогда существует решение K задачи (9), (10), *удовлетворяющее неравенствам $0 \leqslant K(t) \leqslant 1$.*

Для доказательства теоремы 3 достаточно проверить выполнение условий теоремы 2.

Замечание 4. Условия знакопостоянства функции Грина $G(t,\, s)$ задачи (11) приведены, например, в работе [11].

Список литературы

1. *Васильев Н.И., Клоков Ю.А.* Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. — Рига: Зинатне, 1978. — 184 с.

2. *Кигурадзе И.Т., Шехтер Б.Л.* Сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Итоги науки и техники. Сер. Матем. анализ / ВИНИТИ. — М., 1987. — Т. 30. — С. 105—201.

3. *Lakshmikantham V.* The present state of the method of upper and lower solutions // Trends in Theory and Practice of Nonlinear Differential Equations: Proceedings of the International Conference. — New York, 1983. — P. 285—299.

4. *Максимов В.П.* О некоторых нелинейных краевых задачах // Дифференц. уравнения. — 1983. — Т. 19, № 3. — С. 396—414.

5. *Максимов В.П.* Вопросы общей теории функционально-дифференциальных уравнений. Избранные труды. — Пермь: Изд-во ПГУ, ПСИ, ПССГК, 2003. — 306 с.

6. *Брыкалов С.А.* Некоторые признаки существования решений нелинейных краевых задач // Докл. АН СССР. — 1985. — Т. 284, № 6. — С. 1297—1301.

7. *Митропольский Ю.А., Лила С., Мартынюк А.А.* О некоторых направлениях исследований В. Лакшмикантама по теории дифференциальных уравнений и их приложениям // Дифференц. уравнения. — 1986. — Т. 22, № 4. — С. 555—572.

8. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 180 с.

9. *Ларионов А.С., Никишина И.А.* Разрешимость нелинейного дифференциального уравнения первого порядка с последействием и его приложения // Системы. Методы. Технологии. — 2013. — № 3 (19). — С. 100—105.

10. *Березанский Л.М., Ларионов А.С.* Положительность матрицы Коши линейного функционально-дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. — 1988. — Т. 24, № 11. — С. 1843—1854.

11. *Домошницкий А.И.* О знакопостоянстве функции Грина периодической задачи для уравнений первого порядка с отклоняющимся аргументом // Функционально-дифференц. уравнения / Перм. политехн. ин-т. — Пермь, 1986. — С. 17—20.

Ларионов Александр Степанович
Братский государственный университет, Братск, Россия
E-mail: larios84@yandex.ru

Никишина Ирина Андреевна
Братский государственный университет, Братск, Россия
E-mail: Ipa_Q@mail.ru