УДК 517.977.56

А.В. Чернов

О ТОТАЛЬНОМ СОХРАНЕНИИ ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ[1]

Для задачи Коши, связанной с управляемым полулинейным дифференциально-операторным уравнением в банаховом пространстве, получены условия тотального (по множеству допустимых управлений) сохранения глобальной разрешимости при варьировании управлений в правой части.

Ключевые слова: полулинейное дифференциально-операторное уравнение в банаховом пространстве, тотальное сохранение глобальной разрешимости.

Введение

Тотальное сохранение глобальной разрешимости (ТСГР) — это свойство управляемой системы сохранять глобальную разрешимость для всех допустимых управлений. Для неэволюционных систем аналогично вводится понятие *тотального сохранения разрешимости* (ТСР).

Понятие ТСГР было введено в работе [1]. Отметим, что нарушение глобальной разрешимости эволюционной управляемой системы весьма вероятно, когда порядок роста правой части соответствующего дифференциального уравнения по фазовой переменной превышает линейный. Убедительные примеры на этот счет см. в работах [2, пример к теореме 2.2, с. 87, 88; § 4, с. 95 — 100; 3, § 1; 4, введение, п. 2]. При отсутствии информации о сохранении однозначной глобальной разрешимости при варьировании оптимального управления, в частности при выводе необходимых условий оптимальности, обычно переходят к рассмотрению пар «управление — состояние» (см., например, [5; 6, гл. 2]. При наличии информации о сохранении однозначной глобальной разрешимости естественно использовать альтернативный подход, основанный на рассмотрении функционалов оптимизационной задачи как функций, зависящих только от управлений, опираясь (при исследовании различных вопросов) на соответствующие теоремы функционального анализа или их обобщения (см., например, [3, 7, 8]). В рамках этого подхода свойство ТСГР

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РФ в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности в 2014—2016 гг. (проект № 1727) и гранта (соглашение от 27.08.2013 г. № 02.B.49.21.0003 между МОН РФ и ННГУ).

(в совокупности со свойством единственности решения) представляется интересным для изучения тем, что позволяет, например, сделать следующее (здесь мы, в основном, следуем работе [9]).

1. **Упростить корректный выбор начального приближения** при численном решении задач оптимального управления итерационными методами. Отметим, что при отсутствии ТСГР и выборе начального приближения наудачу функционалы задачи (рассматриваемые как функции управления) сразу могут оказаться не определены (и итерационный процесс закончится, не начавшись). При наличии ТСГР такая ситуация невозможна.

2. **Применить технику параметризации управления** для численного решения задач оптимального управления. Суть этой техники, известной своей эффективностью, состоит в следующем (см., например, [10—13]). За счет дискретизации управления функционалы оптимизационных задач преобразуются в функции многих переменных, заданных (за счет ТСГР) на *известном* множестве допустимых параметров аппроксимации (как правило, достаточно простой структуры). Сама оптимизационная задача тем самым преобразуется в конечномерную задачу математического программирования — *аппроксимирующую задачу*, для решения которой используется любой подходящий метод конечномерной оптимизации. При отсутствии ТСГР информация об области определения функций аппроксимирующей задачи оказывается недоступной. Наличие ТСГР позволяет получать ответы на некоторые важные вопросы. Если, например, множество допустимых конечномерных аппроксимаций управления (точнее, наборов параметров аппроксимации) компактно, а функциональные ограничения на этом множестве непротиворечивы (совместны), и удалось доказать непрерывность функций аппроксимирующей задачи, то непосредственно из классической теоремы Вейерштрасса следует существование глобального решения в такой задаче. При этом для его отыскания можно (при определенных обстоятельствах) использовать конечномерные методы глобальной оптимизации (см., например, [14]). Разумеется, на этом пути возникают также и другие вопросы — гладкость функций и липшицевость градиентов аппроксимирующей задачи, разработка быстрых алгоритмов вычисления таких градиентов, сходимость аппроксимирующих задач к исходной оптимизационной задаче, сходимость решений аппроксимирующих задач к решению исходной задачи, проблема понижения размерности аппроксимирующих задач (в частности, за счет использования подвижных, управляемых сеток), сходимость тех или иных численных методов конечномерной оптимизации

для таких задач, постановка и проведение численных экспериментов и т.д. Однако такие вопросы автором успешно исследовались как раз на основе предположения о ТСГР (и о равномерной оценке решений в том или ином смысле) (см., например, [12, 13, 15, 16]). В работе [13], в частности, был приведен достаточно показательный пример вычислительного характера, иллюстрирующий влияние наличия и отсутствия ТСГР на успешность численного решения оптимизационной задачи.

3. **Применять конечномерные топологические теоремы к исследованию проблемы поточечной управляемости**. За счет дискретизации управлений эту проблему можно свести к вопросу о разрешимости конечной системы нелинейных уравнений, где в качестве левых частей выступают исходные функционалы, преобразованные в функции многих переменных (параметров аппроксимации), заданные, например, на параллелепипеде (если множество допустимых значений управления в исходной задаче было прямоугольно и использовались кусочно-постоянные аппроксимации). Если доказана непрерывность этих функций (и область, на которой они рассматриваются, имеет определенную геометрическую структуру, например, гомеоморфна шару, в частности, является параллелепипедом), то разрешимость системы можно устанавливать с помощью соответствующих топологических теорем (Брауэра, Хопфа, Борсука—Улама и т.д.) (см., например, [17]).

4. **Ставить и исследовать игровые задачи, связанные с уравнениями в частных производных**. Действительно, даже в сосредоточенном случае традиционно используются предположения, обеспечивающие ТСГР (см., например, [18, с. 236]). И это неслучайно, поскольку при отсутствии такого предположения сама постановка игровой задачи в известной мере утрачивает смысл, так как непонятно, как определить стратегии игроков, если мы не знаем, какими управлениями можно пользоваться, а какими—нельзя. Предположение о наличии ТСР/ТСГР использовалось автором в основном при постановке таких задач и доказательстве существования равновесия в них (см., например, [19—22]).

В данной статье для задачи Коши, связанной с управляемым полулинейным дифференциально-операторным уравнением в банаховом пространстве, аналогичного уравнению из [23, гл. V, §1], устанавливаются достаточные условия тотального сохранения глобальной разрешимости, а также единственность глобального решения. Ранее (см., например, [1, 4, 24—34]) при исследовании вопроса сохранения глобальной разрешимости управляемых распределенных систем использовался метод, основанный на сведении таких систем к функционально-операторному (операторному) уравнению в лебеговом (или более общо — в банаховом идеальном) пространстве измеримых функций, с последующим применением соответствующих абстрактных результатов. В частности, при установлении признаков ТСГР для эволюционных систем использовалась идея мажоризации (или миноризации и мажоризации) (см., например, [1, 31, 32, 34]). Здесь мы показываем, что сведение управляемой распределенной системы к дифференциально-операторному уравнению в банаховом пространстве позволяет получить мажорантный признак ТСГР, имеющий тем не менее принципиальные отличия. Во-первых, на этот раз не требуется изотонности разрешающего оператора соответствующей линейной задачи. Во-вторых, в роли мажорантной задачи выступает задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения в пространстве $\mathbb{R}$ (а не начально-краевая задача для уравнения в частных производных, родственная исходной, и не абстрактное дифференциально-операторное уравнение). В-третьих, решение управляемой системы можно понимать в более сильном смысле (как решение в пространстве $\mathbf{C}^1([0;T];X)$, где X — некоторое банахово пространство). Теорема о тотальном сохранении глобальной разрешимости доказывается путем последовательного продолжения решения уравнения вдоль временной шкалы подобно тому, как ранее использовалось продолжение вдоль вольтерровой цепочки оператора правой части уравнения типа Гаммерштейна, представляющего исследуемую управляемую систему.

1. Формулировка основных результатов

Отправным пунктом нашего исследования является дифференциально-операторное уравнение [23, гл. V, § 1]:

$$x'(t) + G(t)x(t) = z(t), \quad t \in [0;T]; \quad x(0) = a. \tag{1}$$

Здесь $T > 0$ — заданная константа; $a \in X$; X — вещественное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$; $G = \{G(t)\}$, $t \in [0;T]$, — некоторое семейство (вообще говоря, нелинейных) операторов $G(t) : X \to X$; $z : [0;T] \to X$. При этом предполагаются выполненными следующие условия:

- $\mathbf{G}_1$. Для всех $x \in X$ функция $t \to G(t)x$, определяемая для $t \in [0;T]$, принадлежит пространству $\mathbf{C}([0;T];X)$.
- $\mathbf{G}_2$. Операторы $G(t) : X \to X$ из семейства G равномерно относительно $t \in [0;T]$ липшиц-непрерывны. Иначе говоря, существует не зави-

сящая от t постоянная Липшица L такая, что для всех $x, y \in X$ выполняется условие Липшица: $\|G(t)x - G(t)y\| \leqslant L\,\|x - y\|$.

Как показано в работе [23, гл. V, §1, лемма 1.1], при выполнении условий $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ имеем: $Gx \in \mathbf{C}([0;T], X)$ для всех $x \in \mathbf{C}([0;T], X)$. Кроме того (см. [23, гл. V, § 1, теорема 1.1]), для любых $z \in \mathbf{C}([0;T], X)$, $a \in X$ задача (1) имеет единственное решение в пространстве $\mathbf{C}^1([0;T], X)$.

В отличие от [23, гл. V, § 1], мы далее будем считать операторы $G(t)$ линейными, зато в правую часть добавим зависимость от фазовой переменной, а также от управления, а именно будем рассматривать полулинейный управляемый аналог уравнения (1):

$$x'(t) + G(t)x(t) = f[u]\big(t, x(t)\big), \quad t \in [0;T]; \quad x(0) = a. \tag{2}$$

Здесь $u \in U$ — управление из, вообще говоря, произвольного множества U, и предполагается, что для каждого $u \in U$ определена функция $f[u](t, \xi) : [0;T] \times X \to X$, обладающая следующими свойствами:

- $\mathbf{F}_1$. Для всех $u \in U$, $x \in \mathbf{C}([0;T]; X)$ функция $t \to f[u]\big(t, x(t)\big)$, определяемая для $t \in [0;T]$, принадлежит пространству $\mathbf{C}([0;T]; X)$.
- $\mathbf{F}_2$. Существует функция $\mathcal{N}_1(t, r) : [0;T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, неубывающая по r и суммируемая по Лебегу по t, такая, что $\big\|f[u](t, \xi)\big\| \leqslant \mathcal{N}_1(t, M)$ для всех $t \in [0;T]$, $M > 0$, $\xi \in X$, $\|\xi\| \leqslant M$, $u \in U$.
- $\mathbf{F}_3$. Существует функция $\mathcal{N}_2(t, r) : [0;T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, неубывающая по r и суммируемая по Лебегу по t, такая что
$$\big\|f[u](t, \xi) - f[u](t, \eta)\big\| \leqslant \mathcal{N}_2(t, M)\,\|\xi - \eta\|$$
для всех $t \in [0;T]$, $M > 0$, $\xi, \eta \in X$, $\|\xi\|, \|\eta\| \leqslant M$, $u \in U$.

Теорема 1.1. *Пусть элемент $a \in X$ и семейство линейных операторов G, удовлетворяющее условиям $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$, произвольно фиксированы, а правая часть удовлетворяет условиям $\mathbf{F}_1$—$\mathbf{F}_3$. Тогда справедливо следующее утверждение. Пусть x_0 — решение уравнения* (2) *при $f \equiv 0$, причем $\big\|x_0(t)\big\| \leqslant \alpha(t)$ $\forall t \in [0;T]$, где функция $\alpha(t)$ непрерывна на $[0;T]$. Предположим, что задача Коши*

$$\frac{d}{dt}\,\beta(t) = e^{LT}\mathcal{N}_1\big(t, \alpha(t) + \beta(t)\big), \quad t \in (0;T]; \quad \beta(0) = 0, \tag{3}$$

имеет решение — неотрицательную абсолютно непрерывную функцию $\beta(t)$, $t \in [0;T]$. Тогда для любого $u \in U$ задача (2) *имеет решение*

$x \in \mathbf{C}^1\big([0;T], X\big)$, удовлетворяющее оценке $\big\|x(t)\big\| \leqslant \big\|x_0(t)\big\| + \beta(t)$, $t \in [0;T]$.

Доказательство теоремы 1.1 см. в разделе 2.

Теорема 1.2. *Пусть элемент $a \in X$ и семейство линейных операторов G, удовлетворяющее условиям $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$, произвольно фиксированы, а правая часть удовлетворяет условиям $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_3$. Тогда, каково бы ни было $u \in U$, задача (2) не может иметь более одного решения.*

Доказательство теоремы 1.2 см. в разделе 2.

2. Доказательство основных результатов

Прежде всего докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть $x = x_i$ — решение задачи (1) при $a = a_i$, $z = z_i$, $i = 1, 2$. Тогда справедлива оценка:*

$$\big\|x_1(t) - x_2(t)\big\| \leqslant e^{Lt}\Big\{\|a_1 - a_2\| + \int\limits_0^t \big\|z_1(s) - z_2(s)\big\|\, ds\Big\} \quad \forall\, t \in [0;T].$$

Доказательство. Решение $x = x_i$ удовлетворяет тождеству

$$x_i(t) = a_i - \int\limits_0^t \big\{G(s)x_i(s) - z_i(s)\big\}\, ds, \quad t \in [0;T].$$

Отсюда, а также в силу условия $\mathbf{G}_2$ и свойств интеграла Бохнера, получаем:

$$\big\|x_1(t) - x_2(t)\big\| \leqslant \|a_1 - a_2\| + \left\|\int\limits_0^t \big\{z_1(s) - z_2(s)\big\}\, ds\right\| +$$
$$+ \left\|\int\limits_0^t \big\{G(s)x_1(s) - G(s)x_2(s)\big\}\, ds\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \|a_1 - a_2\| + \int\limits_0^t \big\|z_1(s) - z_2(s)\big\|\, ds + \int\limits_0^t \big\|G(s)x_1(s) - G(s)x_2(s)\big\|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \|a_1 - a_2\| + \int\limits_0^t \big\|z_1(s) - z_2(s)\big\|\,ds + L\int\limits_0^t \big\|x_1(s) - x_2(s)\big\|\,ds.$$

Теперь непосредственно из леммы Гронуолла получаем доказываемое неравенство. □

В частности, при $x_1 = x$, $a_1 = 0$, $z_1 = z$, $a_2 = 0$, $z_2 = 0$ получаем

$$\big\|x(t)\big\| \leqslant e^{Lt}\int\limits_0^t \big\|z(s)\big\|\,ds \leqslant e^{LT}\int\limits_0^t \big\|z(s)\big\|\,ds \quad \forall t \in [0;T].$$

Доказательство теоремы 1.1. Зафиксируем произвольно $u \in U$ и покажем, что задача (2) имеет решение. Для этого достаточно доказать разрешимость следующей задачи:

$$y'(t) + G(t)y(t) = f[u]\big(t, x_0(t) + y(t)\big), \quad t \in [0;T]; \quad y(0) = 0. \tag{4}$$

Действительно, если y — решение задачи (4), то с учетом линейности операторов $G(t)$ получаем, что $x = x_0 + y$ — решение задачи (2):

$$x'(t) + G(t)x(t) = x_0'(t) + G(t)x_0(t) + y'(t) + G(t)y(t) = f[u]\big(t, x(t)\big).$$

По условию, функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ непрерывны на $[0;T]$, поэтому согласно теореме Вейерштрасса найдется константа $M > 0$, такая что

$$0 \leqslant \alpha(t) + \beta(t) \leqslant M \quad \forall t \in [0;T].$$

Пусть число $\delta > 0$ таково, что (с учетом абсолютной непрерывности интеграла Лебега)

$$e^{LT}\int\limits_h \mathcal{N}_2(t, M)\,dt \leqslant \frac{1}{2} \tag{5}$$

при любом измеримом $h \subset [0;T]$, $\operatorname{mes} h \leqslant \delta$. Выберем произвольное разбиение отрезка $[0;T]$ вида

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T, \quad |t_i - t_{i-1}| \leqslant \delta, \quad i = \overline{1,k}.$$

Будем рассматривать локальные аналоги задачи (4):

$$y'(t)+G(t)y(t)=f[u]\big(t,x_0(t)+y(t)\big),\quad t\in[0;t_j];\quad y(0)=0. \qquad (6)$$

Разрешимость задач (6) будем доказывать индукцией по $j=\overline{1,k}$ (при $j=0$ решение очевидно: $y=y_0=0$).

Предположим, мы уже доказали существование функции $y=y_{i-1}\in \mathbf{C}^1\big([0;t_{i-1}];X\big)$, являющейся решением задачи (6) при $j=i-1$ и удовлетворяющей оценке $\big\|y_{i-1}(t)\big\|\leqslant \beta(t)$ для всех $t\in[0;t_{i-1}]$. Исходя из этого предположения, докажем существование функции $y=y_i\in\mathbf{C}^1\big([0;t_i];X\big)$, являющейся решением задачи (6) при $j=i$ и удовлетворяющей оценке

$$\big\|y_i(t)\big\|\leqslant\beta(t)\quad\forall t\in[0;t_i]. \qquad (7)$$

Определим Y_i как множество всех $y\in\mathbf{C}\big([0;t_i];X\big)$, таких что

$$\big\|y(t)\big\|\leqslant\beta(t)\quad\forall t\in[t_{i-1};t_i];\quad y\,\Big|_{t\in[0;\,t_{i-1}]}\equiv y_{i-1}.$$

Отметим, что множество Y_i непусто, так как содержит функцию

$$y(t)=\begin{cases} y_{i-1}(t), & t\in[0;t_{i-1}];\\ \gamma(t)y_{i-1}(t_{i-1}), & t\in(t_{i-1};t_i],\end{cases}$$

где функция $\gamma(t)$ неотрицательна, непрерывна на $[t_{i-1};t_i]$ и такова, что

$$\gamma(t_{i-1})\beta(t_{i-1})=\beta(t_{i-1}),\quad \gamma(t)\beta(t_{i-1})\leqslant\beta(t)\ \forall t\in(t_{i-1};t_i].$$

В частности, если $\beta(t_{i-1})=0$, то ясно, что $y(t_{i-1})\equiv 0$, и можно взять $\gamma\equiv 0$. Если же $\beta(t_{i-1})>0$, то можно взять $\gamma(t)=\dfrac{\beta(t)}{\beta(t_{i-1})}$, $t\in[t_{i-1};t_i]$.

Определим оператор $F_i:Y_i\to\mathbf{C}\big([0;t_i];X\big)$ с помощью формулы $F_i[y]=\eta$, где $\eta\in\mathbf{C}^1\big([0;t_i];X\big)$ — решение задачи Коши

$$\eta'(t)+G(t)\eta(t)=z(t),\quad t\in[0;t_i];\quad \eta(0)=0,$$

при $z(t)=f[u]\big(t,x_0(t)+y(t)\big)$. В силу неравенства (2) (при $x=\eta$), условия $\mathbf{F}_2$ и определения функции $\beta(t)$ как решения задачи (3) получаем:

$$\big\|\eta(t)\big\|\leqslant e^{LT}\int\limits_0^t\|z(s)\|\,ds\leqslant e^{LT}\int\limits_0^t\mathcal{N}_1\big(s,\alpha(s)+\beta(s)\big)\,ds=\beta(t),\quad t\in[0;t_i].$$

Заметим, что при $t\in[0;t_{i-1}]$ имеем $z(t)=f[u]\big(t,x_0(t)+y_{i-1}(t)\big)$. По построению, а также в силу единственности решения задачи вида (1) получаем, что $\eta(t)=y_{i-1}(t)$, $t\in[0;t_{i-1}]$. Таким образом, $\eta\in Y_i$. Иными словами, $F_i: Y_i\to Y_i$.

Установим сжимаемость оператора F_i. Выберем произвольно $y,\widetilde{y}\in Y_i$. В соответствии с леммой 2.1, определением оператора F_i, условием $\mathbf{F}_3$, а также неравенством (5) получаем оценку

$$\big\|F_i[\widetilde{y}]-F_i[y]\big\|\leqslant e^{LT}\int\limits_0^{t_i}\big\|f[u](s,x_0(s)+\widetilde{y}(s))-f[u](s,x_0(s)+y(s))\big\|\,ds=$$

$$=e^{LT}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\big\|f[u](s,x_0(s)+\widetilde{y}(s))-f[u](s,x_0(s)+y(s))\big\|\,ds\leqslant$$

$$\leqslant e^{LT}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\mathcal{N}_2\big(s,\alpha(s)+\beta(s)\big)\,ds\,\big\|\widetilde{y}(s)-y(s)\big\|\leqslant$$

$$\leqslant e^{LT}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\mathcal{N}_2\big(s,M\big)\,ds\,\big\|\widetilde{y}-y\big\|_{\mathbf{C}\left([0;\,t_i];X\right)}\leqslant\frac{1}{2}\big\|\widetilde{y}-y\big\|_{\mathbf{C}\left([0;\,t_i];X\right)}.$$

По принципу сжимающих отображений заключаем, что уравнение

$$y=F_i[y],\quad y\in Y_i,$$

имеет единственное решение на множестве Y_i. Это означает, что существует функция $y=y_i\in\mathbf{C}^1\big([0;t_i];X\big)$, являющаяся решением задачи (6) при $j=i$ и удовлетворяющая оценке (7). По индукции делаем вывод, что аналогичное утверждение справедливо и при $j=k$. А это, в свою очередь, означает, что задача (2) имеет решение $x=x_0+y_k\in\mathbf{C}^1\big([0;T];X\big)$, удовлетворяющее оценке

$$\big\|x(t)\big\|\leqslant\big\|x_0(t)\big\|+\big\|y_k(t)\big\|\leqslant\big\|x_0(t)\big\|+\beta(t),\quad t\in[0;T].\qquad\square$$

Замечание 1. Из анализа доказательства видно, что в качестве функции $\beta(t)$ можно было взять решение интегрального уравнения

$$\beta(t)=e^{Lt}\int\limits_0^t\mathcal{N}_1\big(s,\alpha(s)+\beta(s)\big)\,ds,\quad t\in[0;T].$$

Доказательство теоремы 1.2. Рассуждая от противного, предположим, что существуют два решения $x=x_1$ и $x=x_2$. Положим

$$M=\max\Big\{\|x_1\|_{\mathbf{C}\left([0;T];\,X\right)},\|x_2\|_{\mathbf{C}\left([0;T];\,X\right)}\Big\},\quad \eta=x_2-x_1.$$

Пусть число $\delta>0$ таково, что (с учетом абсолютной непрерывности интеграла Лебега) выполнено неравенство (5). Выберем произвольное разбиение отрезка $[0;T]$ вида

$$0=t_0<t_1<\ldots<t_k=T,\quad |t_i-t_{i-1}|\leqslant\delta,\quad i=\overline{1,k}.$$

Ясно, что $\eta(t_0)=\eta(0)=0$. Предположим, мы уже доказали, что $\eta(t)\equiv 0$ при $t\in[0;t_{i-1}]$. Исходя из этого предположения, докажем, что $\eta(t)\equiv 0$ при $t\in[0;t_i]$. Согласно лемме 2.1, условию $\mathbf{F}_3$ и выбору разбиения и числа δ (т. е. неравенству (5)) имеем

$$\big\|\eta(t)\big\|\leqslant e^{LT}\int\limits_0^{t_i}\Big\|f[u]\big(s,x_2(s)\big)-f[u]\big(s,x_1(s)\big)\Big\|\,ds=$$

$$=e^{LT}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\Big\|f[u]\big(s,x_2(s)\big)-f[u]\big(s,x_1(s)\big)\Big\|\,ds\leqslant e^{LT}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\mathcal{N}_2(s,M)\,\big\|\eta(s)\big\|\,ds\leqslant$$

$$\leqslant e^{LT}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\mathcal{N}_2(t,M)\,dt\,\big\|\eta\big\|_{\mathbf{C}\left([t_{i-1};\,t_i];\,X\right)}\leqslant\frac{1}{2}\big\|\eta\big\|_{\mathbf{C}\left([t_{i-1};\,t_i];\,X\right)},\quad t\in[t_{i-1};t_i].$$

Следовательно, $\dfrac{1}{2}\big\|\eta\big\|_{\mathbf{C}\left([t_{i-1};t_i];X\right)}\leqslant 0$, откуда $\eta(t)\equiv 0$ при $t\in[t_{i-1};t_i]$. Согласно предположению индукции $\eta(t)\equiv 0$ при $t\in[0;t_i]$. По индукции делаем вывод, что $\eta(t)\equiv 0$ при $t\in[0;t_k]=[0;T]$. □

3. Некоторые вспомогательные утверждения

Для того чтобы можно было перейти к рассмотрению примера конкретной начально-краевой задачи, нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений. Первое из них известно как теорема Ф. Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве (см., например, [35, § 5.7, теорема 5.7, с. 83; 36, III, 6, с. 132]).

Лемма 3.1. *Пусть на гильбертовом пространстве H задан линейный непрерывный функционал F. Тогда существует однозначно определенный элемент $\varphi\in H$, такой, что $F[\omega]=(\varphi,\omega)\ \forall\,\omega\in H$; $\|F\|=\|\varphi\|$.*

Следующее утверждение известно как теорема Лакса — Мильграма (см., например, [35, § 5.8, теорема 5.8, с. 84]).

Лемма 3.2. *Пусть H — вещественное гильбертово пространство; $B : H \times H \to \mathbb{R}$ — билинейная форма, которая является ограниченной и коэрцитивной, т. е. существуют константы γ_1, $\gamma_2 > 0$, такие, что*

$$\big|B[x,y]\big| \leqslant \gamma_2\|x\|\,\|y\|, \quad B(x,x) \geqslant \gamma_1\|x\|^2 \quad \forall x, y \in H.$$

Тогда для любого $\psi \in H^*$ существует единственный элемент $x \in H$, такой что $B[x,\cdot] = \psi$.

Следующее утверждение является, по сути дела, аналогом утверждения [36, III, 7, с. 134], являющегося специальным вариантом теоремы Лакса—Мильграма (но в другой, неудобной для нас формулировке и для комплексного случая). Во избежание возможных недоразумений сопроводим его собственным (более простым) доказательством, опирающимся непосредственно на леммы 3.1 и 3.2 (в отличие от работы [36]).

Лемма 3.3. *Пусть выполнены условия леммы 3.2. Тогда существует сильно положительно определенный, линейный ограниченный оператор $S : H \to H$, взаимно однозначно обратимый на всем пространстве и такой, что $B[x,y] = \big(S[x], y\big)$ $\forall x, y \in H$; $\|S\| \leqslant \gamma_2$, $\|S^{-1}\| \leqslant \gamma_1^{-1}$.*

Доказательство. 1. Зафиксируем произвольно элемент $x \in H$ и определим функционал $F[y] = B[x,y]$. Заметим, что функционал $F : H \to \mathbb{R}$ является линейным и непрерывным. Это следует непосредственно из билинейности и ограниченности формы B. Тогда по лемме 3.1 найдется элемент $S[x] \in H$, такой, что $F[y] = \big(S[x], y\big)$ $\forall y \in H$. Таким образом, на всем пространстве H определено отображение $S : H \to H$, такое что $B[x,y] = \big(S[x], y\big)$ $\forall x, y \in H$.

2. Докажем линейность оператора S. Выберем произвольно числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и элементы $x, y, z \in H$. Имеем:

$$\begin{aligned}\big(S[\alpha x + \beta y], z\big) = B[\alpha x + \beta y, z] = \alpha B[x,z] + \beta B[y,z] = \\ = \alpha\big(S[x], z\big) + \beta\big(S[y], z\big) = \big(\alpha S[x] + \beta S[y], z\big).\end{aligned}$$

Обозначая $\omega = S[\alpha x + \beta y] - \alpha S[x] - \beta S[y]$, имеем $(\omega, z) = 0$ $\forall z \in H$. В частности, при $z = \omega$ получаем $\|\omega\|^2 = 0$, т. е. $\omega = 0$.

3. Докажем ограниченность оператора S. Для произвольного $x \in H$ рассмотрим

$$\|Sx\|^2 = (Sx, Sx) = B[x, Sx] \leqslant \gamma_2 \|x\| \, \|Sx\|,$$

откуда $\|Sx\| \leqslant \gamma_2 \|x\|$ для всех $x \in H$, т. е. $\|S\| \leqslant \gamma_2$.

4. Проверим сильную положительную определенность:

$$(Sx, x) = B[x, x] \geqslant \gamma_1 \|x\|^2 \quad \forall x \in H.$$

5. Докажем, что множеством значений оператора S является все пространство H. Это означает, что для каждого $\varphi \in H$ тождество

$$B[x, y] = (\varphi, y) \quad \forall y \in H \tag{8}$$

выполнено при некотором $x \in H$. Действительно, в таком случае будет

$$(Sx, y) = (\varphi, y) \Leftrightarrow (Sx - \varphi, y) = 0 \quad \forall y \in H \Leftrightarrow Sx = \varphi.$$

С другой стороны, разрешимость тождества (8) следует непосредственно из леммы 3.2.

6. Докажем взаимную однозначность оператора S. Предположим, что $S[x] = 0$. Нам достаточно доказать, что в таком случае $x = 0$ [36, введение, 4, предложение, с. 38]. Рассмотрим $B[x, y] = (0, y) = 0$ $\forall y \in H$. В частности, при $y = x$ имеем $\gamma_1 \|x\|^2 \leqslant B[x, x] = 0$, откуда $\|x\| = 0$. Таким образом, существует линейный оператор $S^{-1} : H \to H$.

7. Докажем ограниченность оператора S^{-1}. Пусть $x = S^{-1}[\varphi]$ — решение тождества (8). При $y = x$ имеем

$$\gamma_1 \|x\|^2 \leqslant B[x, x] = (\varphi, y) = |(\varphi, y)| \leqslant \|\varphi\| \, \|x\|,$$

откуда $\gamma_1 \|x\| \leqslant \|\varphi\|$, т. е. $\|S^{-1}\varphi\| \leqslant \gamma_1^{-1} \|\varphi\|$ для всех $\varphi \in H$. Иначе говоря, $\|S^{-1}\| \leqslant \gamma_1^{-1}$. □

4. Сведение линейного псевдопараболического уравнения к абстрактному уравнению

Пусть $n \geqslant 2$ — заданное натуральное число, область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограничена и строго липшицева[2]. Для числа $\gamma > 0$ обозначим $\mathbb{A}(\gamma)$ класс всех матричных функций $A = A(\cdot) = \{a_{ij}(\cdot)\}_{i,j=1}^n \in L_\infty^{n \times n}(\Omega)$, удовлетворяющих условию $A(x)\xi \cdot \xi \geqslant \gamma \, |\xi|^2$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, п. в. $x \in \Omega$ (здесь «$\cdot$» означает скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$). Для $J, K \in \mathbb{A}(\gamma)$, $w \in H_0^1(\Omega)$, $a, b \in L_\infty^+(\Omega)$, $z \in \mathbb{C}\big([0; T], L_2(\Omega)\big)$, $\vec{Q} \in \mathbb{C}\big([0; T], L_2^n(\Omega)\big)$ рассмотрим в цилиндре $\Pi_T = [0; T] \times \Omega$ задачу

[2] Для этого достаточно выпуклости (см. [37, с. 30, 31]).

$$-\operatorname{div}\big(J\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}\big)+a\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\operatorname{div}\Big(K\nabla\varphi\Big)+b\varphi=z-\operatorname{div}\vec{Q},\ (t,x)\in\Pi_T,$$
$$\varphi(t,\cdot)\Big|_{\partial\Omega}=0,\quad t\in[0;T];\quad \varphi(0,x)=w(x),\quad x\in\Omega. \tag{9}$$

Уравнения вида (9) возникают при моделировании процессов теплопереноса [38], фильтрации в пористых средах [39—41], волновых процессов [42], квазистационарных процессов в кристаллических полупроводниках [43] (см. также обзор в [43]). Решение начально-краевой задачи (9) будем понимать как функцию $\varphi(t,x)\in\mathbb{C}^1\big([0;T],H_0^1(\Omega)\big)$, удовлетворяющую начальному условию, а также тождеству

$$D\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t},\omega\right]+B[\varphi,\omega]=\psi(t)[\omega]\quad\forall\omega\in H_0^1(\Omega),\quad t\in[0;T], \tag{10}$$

где приняты обозначения

$$D[\chi,\omega]\equiv\int\limits_\Omega\big[J\nabla\chi\cdot\nabla\omega+a\chi\omega\big]\,dx,\quad B[\chi,\omega]\equiv\int\limits_\Omega\big[K\nabla\chi\cdot\nabla\omega+b\chi\omega\big]\,dx,$$
$$\psi(t)[\omega]\equiv\int\limits_\Omega\Big\{z(t,x)\,\omega(x)+\vec{Q}(t,x)\cdot\nabla\omega(x)\Big\}\,dx,\quad \chi,\omega\in H_0^1(\Omega).$$

В работе [16] уже было показано, что билинейные формы D, B являются ограниченными и коэрцитивными в $H=H_0^1(\Omega)$, поэтому согласно лемме 3.3 существуют линейные ограниченные операторы R, $S:H\to H$, обратимые на всем пространстве и такие, что

$$D[\chi,\omega]=(R\chi,\omega),\quad B[\chi,\omega]=(S\chi,\omega)\quad\forall\chi,\omega\in H.$$

С помощью неравенства Гельдера нетрудно показать (аналогично [16]), что функционал $\psi(t)[\omega]:H\to\mathbb{R}$ является линейным и непрерывным. Поэтому согласно лемме 3.1 для каждого $t\in[0;T]$ найдется единственный элемент $Z(t)\in H$, такой что $\psi(t)[\omega]=\big(Z(t),\omega\big)$ для всех $\omega\in H$. Более того, выполняются соотношения

$$\|R\|,\|S\|\leqslant\gamma_2,\quad\|R^{-1}\|,\|S^{-1}\|\leqslant\gamma_1^{-1},\quad\|Z(t)\|=\|\psi(t)\|,$$

где константы γ_1, $\gamma_2>0$ зависят лишь от J, K, a, b. Таким образом, тождество (10) переписывается в виде

$$\left(R\frac{d\overline{\varphi}}{dt}+S\overline{\varphi}-Z(t),\omega\right)=0\quad\forall\omega\in H,\quad t\in[0;T].$$

С учетом начального условия то же самое можно записать в виде задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения:

$$\frac{d\overline{\varphi}}{dt}+R^{-1}S[\overline{\varphi}(t)]=R^{-1}[Z(t)],\quad t\in[0;T];\quad \overline{\varphi}(0)=w. \tag{11}$$

Здесь для сопряжения с абстактной теорией мы приняли обозначение $\overline{\varphi}(t)=\varphi(t,\cdot)$. Очевидно, задача (11) имеет вид (1), причем все предположения относительно нее выполнены. Некоторое пояснение требуется лишь относительно того, что $Z\in\mathbf{C}\big([0;T],H\big)$. Выберем произвольно t, $t+h\in[0;T]$. Для произвольного $\omega\in H$ имеем:

$$\big(Z(t+h)-Z(t),\omega\big)=\big(Z(t+h),\omega\big)-\big(Z(t),\omega\big)=\big\{\psi(t+h)-\psi(t)\big\}[\omega].$$

По лемме 3.1 $\big\|Z(t+h)-Z(t)\big\|=\big\|\psi(t+h)-\psi(t)\big\|$, и согласно неравенству Гельдера

$$\big\|\psi(t+h)-\psi(t)\big\|\leqslant\big\|z(t+h,\cdot)-z(t,\cdot)\big\|_{L_2(\Omega)}+\big\|\vec{Q}(t+h,\cdot)-\vec{Q}(t,\cdot)\big\|_{L_2^3(\Omega)}\to 0$$

при $h\to 0$. Таким образом, $Z\in\mathbf{C}\big([0;T],H\big)$, поэтому задача (11) имеет единственное решение. Следовательно, принятая нами постановка исходной задачи корректна.

5. Пример: управляемое полулинейное псевдопараболическое уравнение

Будем считать выполненными все предположения предыдущего раздела. Пусть U — произвольное множество управлений; $\mathcal{N}_i(t,\xi):[0;T]\times\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $i=1,2,$ — функции, суммируемые по $t\in[0;T]$, непрерывные и неубывающие по $\xi\in\mathbb{R}_+$. Для $\ell\in\mathbb{N}$ определим класс $\mathbb{F}_\ell$ ℓ-вектор-функций $\vec{f}[u](t,x;\xi,\eta):[0;T]\times\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^\ell$, зависящих от параметра $u\in U$, измеримых по $(t,x)\in[0;T]\times\Omega$, непрерывных по $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ и удовлетворяющих условиям:

N$_1$) $\vec{f}[u](\cdot,\cdot;\varphi,\nabla\varphi)\in\mathbf{C}\big([0;T];L_2^\ell(\Omega)\big)$ для всех $\varphi\in\mathbf{C}\big([0;T];H\big)$, $u\in U$;

N$_2$) $\big\|\vec{f}[u](t,\cdot,\zeta,\nabla\zeta)\big\|_{L_2^\ell(\Omega)}\leqslant\mathcal{N}_1(t,M)$ для п.в. $t\in[0;T]$, для всех $M>0$, $\zeta\in H$, $\|\zeta\|_H\leqslant M$, $u\in U$.

N$_3$) $\big\|\vec{f}[u](t,\cdot,\zeta,\nabla\zeta)-\vec{f}[u](t,\cdot,\zeta_0,\nabla\zeta_0)\big\|_{L_2^\ell(\Omega)}\leqslant\mathcal{N}_2(t,M)\,\|\zeta-\zeta_0\|_H$ для п.в. $t\in[0;T]$, $\forall M>0$, ζ, $\zeta_0\in H$, $\max\Big\{\|\zeta\|_H,\|\zeta_0\|_H\Big\}\leqslant M$, $u\in U$.

Для $J,K\in\mathbb{A}(\gamma)$, $w\in H_0^1(\Omega)$, $a,b\in L_\infty^+(\Omega)$, $f\in\mathbb{F}_1$, $\vec{g}\in\mathbb{F}_n$ рассмотрим управляемый полулинейный аналог задачи (9)

$$
\begin{gathered}
L[\varphi]=f[u](t,x,\varphi,\nabla\varphi)-\operatorname{div}\vec{g}[u](t,x,\varphi,\nabla\varphi),\ t\in(0;T],\ x\in\Omega,\\
L[\varphi]\equiv-\operatorname{div}\big(J\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}\big)+a\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\operatorname{div}\big(K\nabla\varphi\big)+b\varphi;\\
\varphi(t,\cdot)\Big|_{\partial\Omega}=0,\quad \varphi(0,x)=w(x),\quad x\in\Omega.
\end{gathered}\tag{12}
$$

Пользуясь условием $\mathbf{N}_1$ и повторяя почти дословно рассуждения предыдущего раздела, переходим от задачи (12) к задаче следующего вида:

$$
\frac{d\overline{\varphi}}{dt}+R^{-1}S[\overline{\varphi}(t)]=R^{-1}F[u](t,\overline{\varphi}(t)),\quad t\in[0;T];\quad \overline{\varphi}(0)=w,\tag{13}
$$

где

$$
\big\|F[u](t,\overline{\varphi}(t))\big\|_H=\big\|\psi[u,t,\varphi]\big\|,
$$

$$
\psi[u,t,\varphi](\omega)\equiv\int\limits_{\Omega}\Big\{f(t,x,\varphi,\nabla\varphi)\,\omega(x)+\vec{g}(t,x,\varphi,\nabla\varphi)\cdot\nabla\omega(x)\Big\}\,dx
$$

для всех $\omega\in H$. Непосредственно из условия $\mathbf{N}_1$ и неравенства Гельдера получаем, что правая часть $R^{-1}F[u](t,\overline{\varphi}(t))$ удовлетворяет условию $\mathbf{F}_1$. Выполнение условий $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ получаем непосредственно из условий $\mathbf{N}_2$, $\mathbf{N}_3$ и неравенства Гельдера. Таким образом, можно пользоваться теоремами 1.1 и 1.2. Иначе говоря, справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Пусть $\varphi=\varphi_0$ — решение задачи* (12) *при $f\equiv0$, $\vec{g}\equiv0$, причем $\big\|\varphi_0(t,\cdot)\big\|_H\leqslant\alpha(t)$ $\forall t\in[0;T]$, где функция $\alpha(t)$ непрерывна на $[0;T]$. Предположим, что задача Коши* (3) *(при замене L на γ_2/γ_1 и $\mathcal{N}_1$ на $\gamma_1^{-1}\mathcal{N}_1$) имеет решение — неотрицательную абсолютно непрерывную функцию $\beta(t)$, $t\in[0;T]$. Тогда для любого $u\in U$ задача* (12) *имеет единственное решение $\varphi\in\mathbf{C}^1\big([0;T],H\big)$, и справедлива оценка $\big\|\varphi(t,\cdot)\big\|_H\leqslant\big\|\varphi_0(t,\cdot)\big\|_H+\beta(t)$, $t\in[0;T]$.*

Список литературы

1. *Чернов А.В.* Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Изв. вузов. Математика. — 2011. — № 3. — С. 95 — 107.

2. *Калантаров В.К., Ладыженская О.А.* О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов // Записки научных семинаров ЛОМИ. — 1977. — Т. 69. — С. 77—102.

3. *Сумин В.И.* Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 1990. — Т. 30, № 1. — С. 3—21.

4. *Сумин В.И.* Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1992. — Ч. I. — 110 с.

5. *Лионс Ж.-Л.* Управление сингулярными распределенными системами. — М.: Наука, 1987. — 368 с.

6. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. — Новосибирск: Научная книга, 1999. — 352 с.

7. *Плотников В.И., Сумин В.И.* Оптимизация распределенных систем в лебеговом пространстве // Сиб. матем. журн. — 1981. — Т. 22, № 6. — С. 142—161.

8. *Чернов А.В.* О сходимости метода условного градиента в распределенных задачах оптимизации // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2011. — Т. 51, № 9. — С. 1616—1629.

9. *Чернов А.В.* О тотальном сохранении разрешимости управляемого уравнения типа Гаммерштейна с неизотонным и немажорируемым оператором // Изв. вузов. Математика. — 2017. — № 6. — С. 83—94.

10. *Волин Ю.М., Островский Г.М.* О методе последовательных приближений расчета оптимальных режимов некоторых систем с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика. — 1965. — Т. XXVI, № 7. — С. 1197—1204.

11. *Teo K.L., Goh C.J., Wong K.H.* A unified computational approach to optimal control problems / Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. — Longman Scientific & Technical, John Wiley & Sons, Inc., Harlow, New York, 1991. — Vol. 55. — 329 p.

12. *Чернов А.В.* О гладких конечномерных аппроксимациях распределенных оптимизационных задач с помощью дискретизации управления // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2013. — Т. 53, № 12. — С. 2029—2043.

13. *Чернов А.В.* О применимости техники параметризации управления к решению распределенных задач оптимизации // Вестник Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2014. — Т. 24, вып. 1. — С. 102—117.

14. *Сергеев Я.Д., Квасов Д.Е.* Диагональные методы глобальной оптимизации. — М.: Физматлит, 2008. — 352 с.

15. *Чернов А.В.* О гладкости аппроксимированной задачи оптимизации системы Гурса — Дарбу на варьируемой области // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2014. — Т. 20, № 1. — С. 305—321.

16. *Чернов А.В.* О кусочно постоянной аппроксимации в распределенных задачах оптимизации // Тр. ИММ УрО РАН. — 2015. — Т. 21, № 1. — С. 305—321.

17. *Чернов А.В.* О достаточных условиях управляемости нелинейных распределенных систем // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2012. — Т. 52, № 8. — С. 1400—1414.

18. *Петросян Л.А, Зенкевич Н.А., Семина Е.А.* Теория игр. — М.: Высшая школа, 1998. — 304 с.

19. *Чернов А.В.* О вольтерровых функционально-операторных играх на заданном множестве // Матем. теория игр и ее приложения. — 2011. — Т. 3, № 1. — С. 1—117.

20. *Чернов А.В.* Об ε-равновесии в бескоалиционных функционально-операторных играх со многими участниками // Тр. ИММ УрО РАН. — 2013. — Т. 19, № 1. — С. 316—328.

21. *Чернов А.В.* О существовании ε-равновесия в дифференциальных играх, связанных с эллиптическими уравнениями, управляемыми многими игроками // Матем. теория игр и ее приложения. — 2014. — Т. 6, № 1. — С. 91—115.

22. *Чернов А.В.* О существовании равновесия по Нэшу в дифференциальной игре, связанной с эллиптическими уравнениями: монотонный случай // Матем. теория игр и ее приложения. — 2015. — Т. 7, № 3. — С. 48—78.

23. *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978. — 336 с.

24. *Сумин В.И.* Оптимизация управляемых обобщенных вольтерровых систем: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Горьк. гос. ун-т. — Горький, 1975. — 158 с.

25. *Сумин В.И.* О функциональных вольтерровых уравнениях // Изв. вузов. Математика. — 1995. — № 9. — С. 67—77.

26. *Сумин В.И.* Функциональные вольтерровы уравнения в математической теории оптимального управления распределенными системами: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / ННГУ. — Н. Новгород, 1998. — 346 с.

27. *Сумин В.И.* Управляемые функциональные вольтерровы уравнения в лебеговых пространствах // Вестник Нижегород. ун-та. Математическое моделирование и оптимальное управление. — 1998. — № 2 (19). — С. 138—151.

28. *Сумин В.И.* Условия устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач для нелинейных параболических уравнений // Вестник Тамб. ун-та. Естеств. и техн. науки. — 2000. — Т. 5, вып. 4. — С. 493—495.

29. *Сумин В.И., Чернов А.В.* Вольтерровы операторные уравнения в банаховых пространствах: устойчивость существования глобальных решений. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2000.

30. *Чернов А.В.* Вольтерровы операторные уравнения и их применение в теории оптимизации гиперболических систем: дис.... канд. физ.-мат. наук / ННГУ. — Н. Новгород, 2000. — 177 с.

31. *Чернов А.В.* О мажорантно-минорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Изв. вузов. Математика. — 2012. — № 3. — С. 62—73.

32. *Чернов А.В.* О тотальном сохранении глобальной разрешимости задачи Гурса для управляемого полулинейного псевдопараболического уравнения // Владикавказский матем. журн. — 2014. — Т. 16, вып. 3. — С. 55—63.

33. *Чернов А.В.* О тотально глобальной разрешимости управляемого уравнения типа Гаммерштейна с варьируемым линейным оператором // Вестник Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2015. — Т. 25, вып. 2. — С. 230—243.

34. *Чернов А.В.* Об одном мажорантно-минорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемых распределенных систем // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 1. — С. 112—122.

35. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. — М.: Наука, 1989. — 464 с.

36. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: ЛКИ, 2007. — 624 с.

37. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука, 1973. — 576 с.

38. *Chen P.J., Gurtin M.E.* On a theory of heat conduction involving two temperatures // Z. Angew. Math. Phys. — 1968. — Vol. 19. — P. 614—627.

39. *Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н.* Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах // Прикладная математика и механика. — 1960. — Т. 24, № 5. — С. 852—864.

40. Mathematical model of the non-euilibrium water-oil displacement in porous strata / *G.I. Barenblatt, J. Garcia-Azorero, A. De Pablo, J.L. Vazquez* // Appl. Anal. — 1997. — Vol. 65. — P. 19—45.

41. *Helmig R., Weiss A., Wohlmuth B.I.* Dynamic capillary effects in heterogeneous porous media // Comput. Geosciences. — 2007. — Vol. 11. — P. 261—274.

42. *Benjamin T.B., Bona J.L., Mahony J.J.* Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems // Philos. Tranc. Royal Soc. London. Ser. A. — 1972. — Vol. 272. — P. 47—78.

43. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. / *А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер* — М.: Физматлит, 2007. — 736 с.

Чернов Андрей Владимирович
Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия
Нижегородский государственный технический университет имени Р.Е. Алексеева, Нижний Новгород, Россия
E-mail: `chavnn@mail.ru`