УДК 681.511

А.Ф. Шориков, А.Ю. Горанов

МЕТОДИКА АППРОКСИМАЦИИ ОБЛАСТИ ДОСТИЖИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ[1]

Рассматривается задача аппроксимации областей достижимости нелинейной управляемой динамической системы. В качестве объекта управления используется модель летательного аппарата, движение которого описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений. В работе реализуется преобразование исходной дифференциальной нелинейной модели объекта к дискретному линейному виду. Приводится описание общего алгебраического метода построения области достижимости, и производится сравнительный анализ соответствующих областей достижимости исходной нелинейной непрерывной и линейной дискретной динамических систем.

Ключевые слова: область достижимости, линеаризация уравнений движения, уравнения движения летательного аппарата, аппроксимация областей достижимости.

Введение

В настоящее время в теории управления динамическими системами большое внимание уделяется проблеме построения или оценивания множеств возможных фазовых состояний систем в различные моменты времени. Эти множества, называемые множествами достижимости, играют важную роль при решении задач управления, наблюдения и прогнозирования. Так, точное или приближенное построение множества достижимости управляемой динамической системы позволяет оценить предельные возможности системы управления и существенно упростить решение, например, задачи оптимального терминального управления [1, 2]. Применительно к динамическим системам, подверженным возмущениям, множества достижимости дают оценку разброса траекторий под влиянием этих возмущений.

Все указанные задачи сводятся к построению или оцениванию множеств достижимости, в которых может находиться фазовый вектор системы, и к операциям с этими множествами, что в дальнейшем служит основой для разработки различных численных алгоритмов поиска решения краевой или оптимизационной задачи для рассматриваемой динамической системы. Необходимо отметить, что практическое построение

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 15-01-02368 и № 17-01-00315).

множеств достижимости, особенно в нелинейных динамических системах большой размерности, представляет собой весьма сложную задачу [3], поэтому заслуживают внимания эффективные методы аппроксимации этих множеств [4—6].

В данной работе рассматривается методика аппроксимации областей достижимости исходной нелинейной модели движения летательного аппарата с помощью построения точных областей достижимости фазовых состояний линеаризованной вдоль опорной траектории исходной динамической системы, основывающаяся на общем рекуррентном алгебраическом методе, подробно описанном в работе [4].

1. Нелинейные уравнения движения

В качестве объекта управления рассматривается летательный аппарат, чья динамика описывается с помощью динамических уравнений движения центра масс:

$$\begin{cases} m\left(\dfrac{d\mathbf{V}(t)}{dt} + \omega \times \mathbf{V}\right) = \mathbf{G} + \mathbf{P} + \mathbf{R}_A + \mathbf{F}_k + \mathbf{F}_c, \\ \dfrac{d\mathbf{L}}{dt} + \omega \times \mathbf{L} = \mathbf{M}_P + \mathbf{M}_A + \mathbf{M}_k + \mathbf{M}_c, \end{cases} \tag{1}$$

где m — масса; $\mathbf{V}$ — вектор скорости центра масс; ω — вектор угловой скорости вращения вокруг центра масс; $\mathbf{L}$ — вектор кинетического момента; $\mathbf{G}$ — сила тяжести; $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}_P$ — вектор полной тяги и момент тяги двигателей; $\mathbf{R}_A$ и $\mathbf{M}_A$ — векторы полной аэродинамической силы и полного аэродинамического момента; $\mathbf{F}_c$ и $\mathbf{M}_c$ — главный вектор и главный момент управляющих сил.

Несмотря на то что при составлении уравнений движения летательного аппарата принимается большое количество допущений, построение множеств достижимости объекта, описываемого этими нелинейными дифференциальными уравнениями, представляет собой достаточно сложную задачу. Вследствие этого появляется необходимость в проведении линеаризации дифференциальных уравнений относительно малых отклонений параметров движения от их значений для некоторой опорной траектории летательного аппарата.

В работах [7, 8] показано, что с помощью формулы Тейлора, ограничившись первыми членами разложения, исходные нелинейные функции нескольких переменных раскладываются в ряд по степеням приращений параметров движения в окрестности их опорных значений. Формируемая таким образом система линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, подобно (1), описывает тот же динамический процесс, однако в этой системе неизвестными функциями времени являются не прежние полные величины, а их отклонения от некоторых опорных значений.

Обычно линеаризованные уравнения движения разбивают на группы, полагая при этом, что каналы управления работают независимо. Поэтому, произведя преобразования уравнений (1), дальнейшие рассуждения будут вестись относительно одного канала движения — канала продольного движения, поскольку движение в боковом канале описывается подобными уравнениями, а уравнения движения в канале вращения имеют менее сложную структуру:

$$\begin{cases} \Delta\ddot{V} = C_{V\alpha}(t)\Delta\alpha + C_{VV}(t)\Delta V + C_{V\delta}\Delta\delta_{\vartheta} + \Delta\overline{F^s_x}, \\ \Delta\ddot{\alpha} = C_{\alpha\vartheta}(t)\Delta\vartheta + C_{\alpha\alpha}\Delta\alpha + C_{\alpha V}\Delta V + C_{\alpha\delta}\Delta\delta_{\vartheta} + \Delta\overline{F^s_y}, \\ \Delta\ddot{\vartheta} = C_{\vartheta\alpha}\Delta\alpha + C_{\vartheta V}\Delta V + C_{\vartheta\omega}\Delta\dot{\vartheta} + C_{\vartheta\delta}\Delta\delta_{\vartheta} + \Delta\overline{M^s_z}, \end{cases}$$

здесь $\Delta\dot{\vartheta}$, ΔV, $\Delta\alpha$ — отклонения текущих значений угла тангажа, линейной скорости центра масс и угла атаки от их значений для некоторой опорной траектории; $\Delta\delta_{\vartheta}$ — вариация угла отклонения управляющих органов в продольном канале движения; $\overline{F^s_x}$, $\overline{F^s_y}$, $\overline{M^s_z}$ — возмущающие силы и момент в проекциях на соответствующие оси ССК; $C_{VV}(t)$, $C_{V\alpha}(t), \ldots, C_{\vartheta\delta}(t)$ — известные динамические коэффициенты системы.

Данную систему линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, представляющую собой модель объекта в векторно-матричной форме Коши, можно переписать в следующем компактном виде:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + \omega(t), \tag{2}$$

где $x(t)$ — вектор фазовых состояний системы, $x(t) \in \mathbb{R}^n$; $u(t)$ — вектор управления, $u(t) \in \mathbb{R}^p$; $A(t)$ — матрица состояния системы; $B(t)$ — матрица управления системы; $\omega(t)$ — вектор возмущений, $\omega(t) \in \mathbb{R}^n$.

В дальнейших рассуждениях будет предполагаться отсутствие возмущений и то, что субъекту управления доступна полная информация о фазовом векторе $x(t)$.

2. Постановка задачи построения областей достижимости

Полученной системе уравнений (2) ставится в соответствие дискретная динамическая система, процедура получения которой подробно изложена в работах [9, 10], и базируется на основных положениях теории дифференциальных уравнений.

Тогда на заданном целочисленном промежутке времени $t \in \overline{0,T} = \{0,1,\ldots,T\}$, $T > 0$, $T \in \mathbb{N}$ рассматривается линейная динамическая система, динамика которой описывается дискретным векторно-матричным рекуррентным соотношением

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \tag{3}$$

здесь $t \in \overline{0,T-1}$ — шаг дискретной системы, соответствующий дискретному моменту времени t.

Предполагается, что на априори неизвестные фазовый вектор начального состояния и реализацию фазового вектора на произвольный момент времени t накладываются геометрические ограничения

$$x(0) \in \mathbf{X}(0) \subset \mathbb{R}^n,\ x(t) \in \mathbf{M}(t) \subset \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

где $\mathbf{X}(0)$ и $\mathbf{M}(t)$ — выпуклые, замкнутые и ограниченные многогранники с конечным числом вершин.

Считается также, что геометрические ограничения, формируемые исходя из ограниченности физических возможностей рулевого привода летательного аппарата, накладываются на значение управляющего воздействия

$$u(t) \in \mathbf{P}(t) \subset \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

где $\mathbf{P}(t)$ — выпуклый, замкнутый и ограниченный многогранник с конечным числом вершин.

Таким образом, в процессе управления движением системы (3) по мере прохождения вдоль опорных участков траектории требуется, чтобы значения фазового вектора не выходили за границы области фазового пространства, описываемой ограничениями (4), а управляющее воздействие не превышало накладываемых геометрических ограничений (5).

Тогда рассматривается следующая задача. При заданных ограничениях (4), (5) требуется построить множество всех возможных фазовых состояний $\mathbf{G}_M(0, \mathbf{X}(0); T)$, в которое на момент времени T может быть переведена управляемая система (3), т. е. описать область достижимости рассматриваемой системы (3)—(5), которая определяется следующим образом:

$$\begin{gathered}\mathbf{G}_M(0,\mathbf{X}(0);T)=\{x(T):x(T)\in\mathbb{R}^n,\\ x(t+1)=A(t)x(t)+B(t)u(t),\ t\in\overline{0,T-1},\\ x(0)\in\mathbf{X}(0),\ x(t)\in\mathbf{M}(t),\ u(t)\in\mathbf{P}(t)\}.\end{gathered}\tag{6}$$

Под парой $(\mathbf{X}(0),0)$ здесь понимается множество всех допустимых начальных фазовых состояний рассматриваемой системы.

Область достижимости (6) можно рассматривать как естественное обобщение понятия решения системы рекуррентных уравнений (3), являющееся фундаментальной характеристикой управляемой системы.

3. Общий рекуррентный метод построения областей достижимости

В работах [1, 4] было показано, что область достижимости представляет собой выпуклый, замкнутый и ограниченный многогранник с конечным числом вершин в пространстве $\mathbb{R}^n$. Для такой области достижимости справедливо рекуррентное (полугрупповое) свойство, на основе которого был разработан общий рекуррентный алгебраический метод построения областей достижимости линейных дискретных управляемых систем, сводящийся к реализации построения последовательности одношаговых областей достижимости

$$\mathbf{G}_M\left(0,\mathbf{X}(0);T\right)=\mathbf{G}_M\left(t,\mathbf{G}_M(t);T\right),\ t\in\overline{1,T-1},$$

где $\mathbf{G}_M(t)=\mathbf{G}_M\left(0,\mathbf{X}(0);t\right)$ — область достижимости на момент времени t, соответствующая паре $(\mathbf{X}(0),0)$, которая является выпуклым, замкнутым и ограниченным многогранником с конечным числом вершин в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Таким образом, реализуя построение областей достижимости только на один шаг вперед, можно получить область достижимости в терминальный момент времени, зависящую только от области достижимости на предыдущем шаге.

При данном подходе описание множества допустимых фазовых состояний $\mathbf{G}_M(t,\mathbf{G}(t);t+1)$ рассматриваемой управляемой системы в момент времени $(t+1)$ осуществляется на основе описания всех его вершин, определяемых согласно следующему алгоритму.

1. Формируется множество $\mathbf{\Gamma}_x(\mathbf{G}(t))$ всех вершин многогранника $\mathbf{G}(t)$.

2. Формируется множество $\mathbf{\Gamma}_u(\mathbf{P}(t))$ всех вершин многогранника $\mathbf{P}(t)$.

3. Формируются следующие множества:

$$\begin{gathered}
\widehat{\mathbf{G}}_x(t+1) = \big\{\widehat{x}(t+1):\ \widehat{x}(t+1) = A(t)x(t),\ x(t) \in \mathbf{\Gamma}_x(\mathbf{G}(t))\big\},\\
\widehat{\mathbf{G}}_u(t+1) = \big\{\widehat{y}(t+1):\ \widehat{y}(t+1) = B(t)u(t),\ u(t) \in \mathbf{\Gamma}_p(\mathbf{P}(t))\big\},\\
\hat{\mathbf{G}}(t+1) = \big\{\hat{v}(t+1):\ \hat{v}(t+1) = \widehat{x}(t+1) + \widehat{y}(t+1),\\
\widehat{x}(t+1) \in \widehat{\mathbf{G}}_x(t+1),\ \widehat{y}(t+1) \in \widehat{\mathbf{G}}_u(t+1)\big\},
\end{gathered}$$

здесь $\widehat{\mathbf{G}}(t+1)$ — сумма Минковского множеств $\widehat{\mathbf{G}}_x(t+1)$ и $\widehat{\mathbf{G}}_u(t+1)$, являющаяся множеством точек области достижимости, среди которых могут быть некоторые внутренние точки и все ее вершины.

4. Определяется множество, являющееся пересечением множества точек области достижимости $\widehat{\mathbf{G}}(t+1)$ и множества $\mathbf{M}(t+1)$, описывающего фазовые ограничения на движение объекта:

$$\widehat{\mathbf{G}}_M(t+1) = \widehat{\mathbf{G}}(t+1) \cap \mathbf{M}(t+1).$$

5. Для сформированного дискретного множества точек

$$\widehat{\mathbf{G}}_M(t+1) = \big\{\hat{v}^{(i)}(t+1)\big\}_{i\in\overline{1,m}} \subset \mathbf{G}_M(t, \mathbf{G}_M(t); t+1)$$

методами линейного математического программирования находится множество всех вершин его выпуклой оболочки [1]

$$\mathbf{\Gamma}_x(\mathbf{G}_M(t+1)) = \big\{\widetilde{v}^{(i)}(t+1)\big\}_{i\in\overline{1,z}},\ z \leqslant m.$$

Тогда в силу того, что выполняется соотношение [11]

$$\operatorname{conv}(\widehat{\mathbf{G}}_M(t+1)) = \mathbf{G}_M(t, \mathbf{G}_M(t); t+1) = \mathbf{G}_M(t+1),$$

крайние вершины построенного множества $\widehat{\mathbf{G}}_M(t+1)$ составят множество всех крайних опорных вершин искомой области достижимости (3), (4) в момент времени $(t+1)$, являющуюся выпуклым, замкнутым и ограниченным многогранником в $\mathbb{R}^n$.

При поиске всех вершин выпуклой оболочки множества достижимости $\mathbf{G}_M(t, \mathbf{G}_M(t); t+1)$ требуется рассмотреть только первый этап симплекс-метода, суть которого состоит в поиске опорного базисного допустимого решения, если таковое существует. Если базисное допустимое решение существует, то точка, соответствующая вектору, не является вершиной многогранника, поскольку ее можно представить как выпуклую комбинацию других точек. В противном случае рассматриваемая точка является вершиной области достижимости.

Таким образом, решив m задач линейного математического программирования, формируются все вершины множества $\mathbf{\Gamma}_x(\mathbf{G}_M(t+1))$, которые также будут являться вершинами области достижимости динамической системы (3)—(5).

4. Численное моделирование

В качестве примера, иллюстрирующего эффективность предложенного метода аппроксимации, приводится задача построения выпуклых оболочек областей достижимости нелинейной модели летательного аппарата, динамика которого описывается системами уравнений (1), и линеаризованной модели, описываемой следующими рекуррентными уравнениями:

$$\begin{pmatrix} \Delta\dot{\vartheta} \\ \Delta\dot{V} \\ \Delta\dot{\alpha} \\ \Delta\ddot{\vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & C_{VV}(t) & C_{V\alpha}(t) & 0 \\ 0 & C_{\alpha\vartheta}(t) & C_{\alpha V}(t) & C_{\alpha\alpha}(t) & 0 \\ 0 & 0 & C_{\vartheta V}(t) & C_{\vartheta\alpha}(t) & C_{\vartheta\omega}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\vartheta \\ \Delta V \\ \Delta\alpha \\ \Delta\dot{\vartheta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ C_{V\delta}(t) \\ C_{\alpha\delta}(t) \\ C_{\vartheta\delta}(t) \end{pmatrix} \Delta\delta_{\vartheta}.$$

Считается, что фазовые векторы начального и текущего состояний, а также вектор управляющих воздействий удовлетворяют следующим ограничениям:

$$x(0) = [0,\ 0,\ 0,\ 0], |\Delta\vartheta| \leqslant 5 \text{ град},\ |\Delta\dot{\vartheta}| \leqslant 15 \text{ град/с},$$
$$|\Delta V| \leqslant 5 \text{ м/с},\ |\Delta\delta_{\vartheta}| \leqslant 20 \text{ град}.$$

Произведем построение областей достижимости для исходной нелинейной и линеаризованной систем, а результаты моделирования представим в виде проекций в пространство параметров $\mathbb{R}^3(\Delta\vartheta, \Delta\dot{\vartheta}, \Delta V)$ и на плоскость параметров $(\Delta\vartheta, \Delta\dot{\vartheta})$.

Как видно на рис. 1, 2, графики переменных состояния исходной нелинейной (1) и линеаризованной (3), (4) моделей довольно близки, что подтверждает применимость рассмотренного метода аппроксимации областей достижимости.

В качестве фазовых координат рассматриваемой системы выступают вариации динамических параметров, а в основе предложенной методики линеаризации исходных нелинейных уравнений лежит предположение

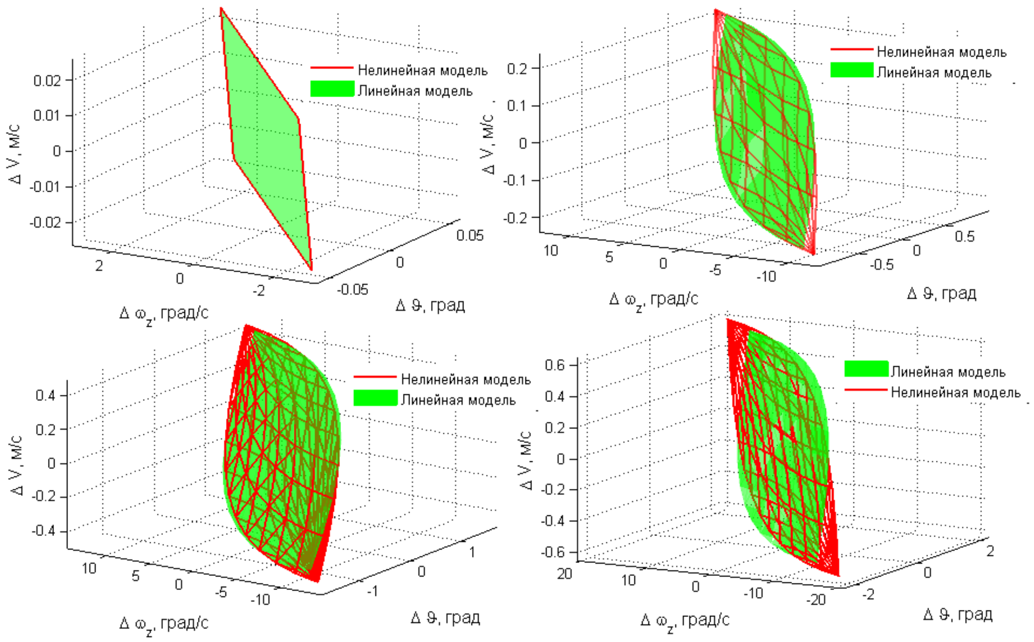

Рис. 1. Проекции областей достижимости в пространство $\mathbb{R}^3$

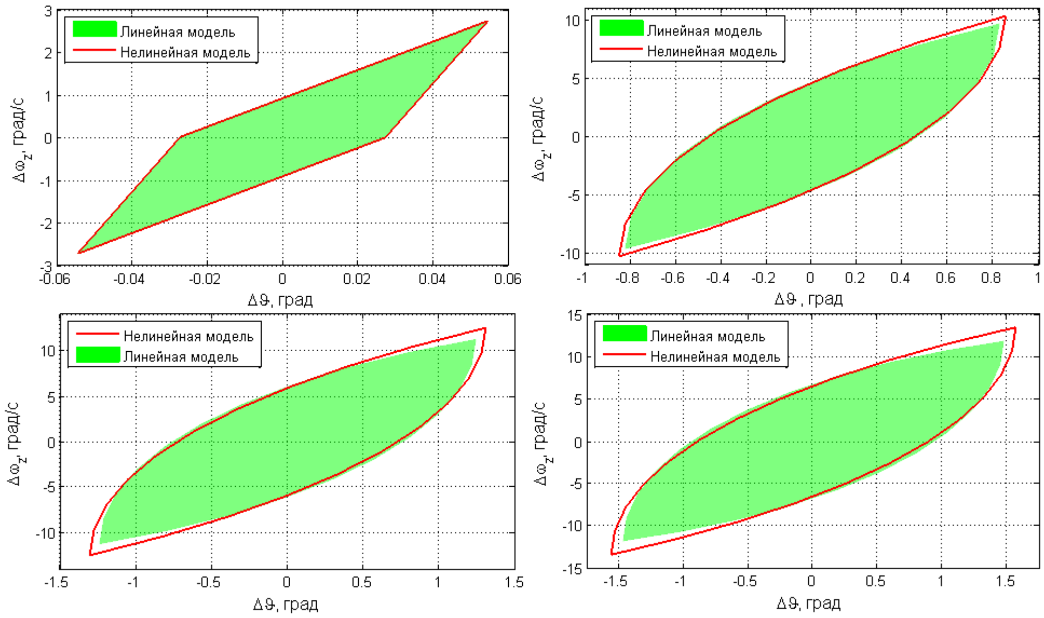

Рис. 2. Проекции областей достижимости на плоскость параметров $\Delta\vartheta, \Delta\dot{\vartheta}$

о том, что в исследуемом динамическом процессе переменные движения изменяются так, что их отклонения от опорных значений остаются в процессе управления достаточно малыми. Поэтому при необходимости увеличения точности аппроксимируемой области достижимости можно добиться, усилив ограничения, налагаемые вариацией параметров движения объекта.

Заключение

В рамках данной работы описано преобразование исходной непрерывной нелинейной модели летательного аппарата к дискретному линейному виду. Произведено описание предложенного метода аппроксимации, который основывается на общем алгебраическом методе построения областей достижимости, разработанном в работах [1, 4], и сводит построение аппроксимации нелинейных областей достижимости к реализации конечной последовательности одношаговых операций и решений задач линейного программирования. Действие этого алгоритма реализовано в программной среде MATLAB R2014a, где было проведено сравнение областей достижимости исходной нелинейной и преобразованной систем.

Важно отметить, что размерность рассматриваемой дискретной динамической системы (3), (4) и число шагов процесса построения областей достижимости для описанного метода аппроксимации ограничиваются только ресурсами памяти и быстродействия компьютера.

Список литературы

1. *Тюлюкин В.А., Шориков А.Ф.* Алгоритм решения задачи терминального управления для линейной дискретной системы // Автоматика и телемеханика. — 1993. — № 4. — С. 115—127.

2. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением (линейные системы). — М.: Наука, 1968.

3. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. — М.: Наука, 1994.

4. *Шориков А.Ф.* Минимаксное оценивание и управления в дискретных динамических системах. — Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1997.

5. *Girard A.* Reachability of uncertain linear systems using zonotopes // Hybrid Systems: Computation and Control. — 2005. — № 3414. — P. 291—305.

6. *Kurzhanski A.B., Pravin Varaiya.* On ellipsoidal techniques for reachability analysis // Optimization Methods and Software. — 2002. — № 17. — P. 177—207.

7. *Абгарян К.А., Мишин В.П., Калязин Э.Л.* Динамика ракет. — М.: Наука, 1990.

8. *Лебедев А.А.* Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1973.

9. *Булаев В.В., Горанов А.Ю.* Формулировка задачи оптимального управления и моделирование динамики упругого механического объекта в фазовом пространстве // Вестник Юж.-Урал. гос. ун-та. — 2015. — Т. 15, № 4. — С. 90—100.

10. *Булаев В.В., Шориков А.Ф.* Методика дискретизации линейных динамических систем // Вестник Перм. ун-та. Математика. Механика. Информатика. — 2016. — № 2. — С. 67—73.

11. *Черников С.Н.* Линейные неравенства. — М.: Наука, 1968.

Шориков Андрей Федорович
Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия
E-mail: afshorikov@mail.ru

Горанов Александр Юрьевич
Научно-производственное объединение автоматики имени Н.А. Семихатова, Екатеринбург, Россия
E-mail: goranovayu@mail.ru