УДК 534.014

И.П. Попов

Курганский государственный университет,
Курган, Россия

СИНТЕЗ ИНЕРТНО-ИНЕРТНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Рассматривается колебательная система с однородными элементами, а именно с двумя массивными грузами (инертно-инертная система). Показана возможность возникновения в такой системе свободных гармонических колебаний, которая, как и в традиционных колебательных системах, обусловлена тем, что ее элементы имеют противоположный характер реактивности. В колебательной системе с однородными (инертными) элементами противоположная реактивность достигается суммированием пространственного ($\pi/2$) и фазового сдвигов ($\pi/2$). В инертно-инертном осцилляторе происходит взаимный обмен между кинетическими энергиями грузов. В отличие от традиционных колебательных систем, частоты свободных колебаний колебательных систем с однородными элементами не зависят от параметров элементов систем и определяются исключительно начальными условиями, благодаря чему они могут совершать свободные гармонические колебания с любой изначально заданной частотой.

Ключевые слова: осциллятор, инертный, гармонический, реактивность, пространственный сдвиг, фазовый сдвиг, кинетическая энергия.

I.P. Popov

Kurgan State University,
Kurgan, Russian Federation

SYNTHESIS INERT-INERTIAL OSCILLATOR

We consider a system with uniform oscillatory elements, namely, two massive loads (inert-inertial system). The possibility of occurrence of such a system free of harmonic oscillations which, as in the conventional oscillatory systems is caused by that its elements are opposite character reactivity. The oscillating system with homogeneous (inert) components opposite reactivity is achieved by summing the spatial shift ($\pi/2$) and phase shift ($\pi/2$). The inert-inertial oscillator there is a mutual exchange between the kinetic energies of loads. Unlike traditional vibration systems free vibration frequency oscillatory systems with homogeneous elements do not depend on the system parameters and determined solely by the initial conditions, so that they can make available to any harmonic oscillations initially set frequency.

Keywords: oscillator, inert, harmonic, reactivity, spatial shift, phase shift, kinetic energy.

Введение

Свободные гармонические колебания основаны на обмене энергией между элементами колебательной системы [1].

В механическом линейном гармоническом осцилляторе происходит обмен энергией между разнородными элементами – грузом (инертным элементом) и пружиной (упругим элементом). При этом кинетическая энергия груза преобразуется в потенциальную энергию пружины и наоборот.

Существуют электромеханические колебательные системы [2], в которых свободные гармонические колебания осуществляются за счет взаимного преобразования потенциальной энергии пружины в энергию электрического поля конденсатора или кинетической энергии груза в энергию магнитного поля катушки индуктивности.

Таким образом, свободные гармонические колебания сопровождаются самыми разнообразными вариантами преобразования энергии. В связи с этим представляет интерес возможность возникновения свободных гармонических колебаний, осуществляемых за счет преобразования кинетической энергии в кинетическую. Реализующая такие колебания система должна состоять только из инертных элементов. Механизм обмена энергией между однородными элементами в такой системе позволит, в частности, расширить возможности нейтрализации реакции инертных объектов на внешние периодические воздействия [3].

Как таковая теория колебаний была разработана преимущественно в 30-х гг. XX в. [4]. Современные источники в части свободных гармонических колебаний в основном сохраняют преемственность [5–7]. В указанных и подобных им источниках колебательные системы с однородными элементами не рассматриваются.

1. Синтез инертно-инертной системы

Синтез системы [8] осуществляется на основе двух исходных условий.

Первое исходное условие. Система содержит два инертных элемента – два груза массой m каждый. Элементы совершают гармонические колебания:

$$x_1 = A\sin(\zeta + \zeta_1),$$

$$x_2 = A\sin(\zeta + \zeta_2),$$

где x_1, x_2 – текущие координаты грузов; A – амплитуда колебаний; ζ – фаза; ζ_1, ζ_2 – начальные фазы.

Второе исходное условие. Энергия системы при колебаниях не меняется

$$W_1 + W_2 = \text{const}.$$

Одновременный учет обоих исходных условий дает представление о характере связи между инертными элементами. Действительно,

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 = \text{const},$$

$$\cos^2(\zeta + \zeta_1) + \cos^2(\zeta + \zeta_2) = \text{const}.$$

Последнее справедливо при условии

$$\zeta_1 - \zeta_2 = \pm\pi/2.$$

Полученное соотношение позволяет определить связующее звено между инертными элементами. Таким звеном является устройство, изображенное на рисунке.

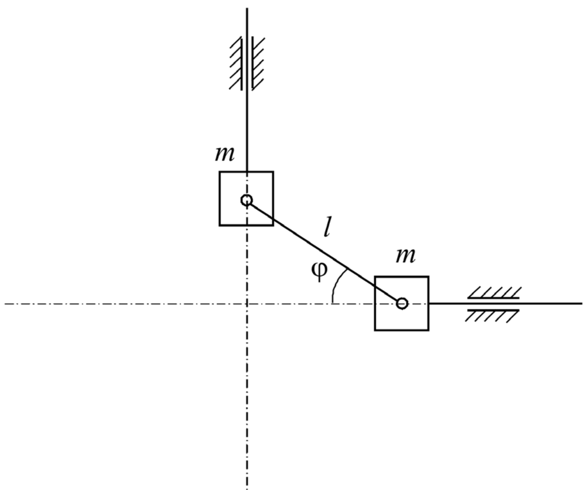

Рис. Инертно-инертный осциллятор

2. Анализ инертно-инертной системы

Внешние усилия к грузам не приложены. Масса промежуточного стержня и трение не учитываются. Координаты грузов соответствуют уравнениям

$$x_1 = l\cos\varphi, \tag{1}$$

$$x_2 = l\cos(\pi/2 - \varphi). \tag{2}$$

В качестве обобщенной координаты удобно использовать φ. Система имеет одну степень свободы, и уравнение Лагранжа второго рода [9, 10] для нее записывается в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q .$$

Обобщенная сила $Q = 0$, поскольку активные силы отсутствуют.

Кинетическая энергия определяется выражением

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 = \frac{ml^2}{2}\sin^2\varphi\dot{\varphi}^2 + \frac{ml^2}{2}\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2 = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 .$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 ,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} ,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = ml^2\ddot{\varphi} = 0 .$$

Решение последнего уравнения имеет вид

$$d\varphi/dt = C_1,$$

$$\varphi = C_1 t + C_2.$$

Пусть имеют место следующие начальные условия:

$$\varphi\,(0) = \varphi_0,$$

$$\frac{d\varphi}{dt}(0) = \omega_0 .$$

При этом коэффициенты интегрирования приобретают значения

$$C_2 = \varphi_0,$$

$$C_1 = \omega_0.$$

При этом выражения (1) и (2) принимают вид

$$x_1 = l\cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$x_2 = l\cos(\pi/2 - \omega_0 t - \varphi_0).$$

Пусть начальная координата первого груза равна

$$x_1(0) = x_{10}.$$

Из этого следуют формулы

$$\cos\varphi_0 = x_{10}/l,$$

$$\varphi_0 = \arccos(x_{10}/l) = \arcsin(x_{20}/l).$$

Пусть начальная скорость второго груза равна

$$\frac{dx_2}{dt}(0) = v_{20}.$$

Из этого следуют выражения

$$l\omega_0\cos(\omega_0 0 + \varphi_0) = v_{20},$$

$$\omega_0 = v_{20}/x_{10} = -v_{10}/x_{20}.$$

В соответствии с этим формулы для перемещений грузов и их скоростей принимают вид

$$x_1 = l\cos[(v_{20}/x_{10})\, t + \arccos(x_{10}/l)],$$

$$x_2 = l\cos[\pi/2 - (-v_{10}/x_{20})\, t - \arcsin(x_{20}/l)],$$

$$v_1 = l(v_{10}/x_{20})\, \sin[(-v_{10}/x_{20})\, t + \arcsin(x_{10}/l)],$$

$$v_2 = l(v_{20}/x_{10})\, \cos[(v_{20}/x_{10})\, t + \arccos(x_{20}/l)].$$

Таким образом, грузы массой m совершают свободные гармонические колебания (внешние усилия к грузам не приложены).

Заключение

В рассмотренной колебательной системе происходит взаимный обмен кинетической энергией между инертными элементами. При $\varphi = 0$ кинетическая энергия первого груза равна нулю, а второго – максимальна. После этого первый груз начинает ускоряться за счет энергии второго груза, который приобретает отрицательное ускорение.

Список литературы

1. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. – М.: Наука, 1971. – 240 с.
2. Попов И.П. Емкостно-инертное устройство // Изв. С.-Петерб. гос. электротехн. ун-та «ЛЭТИ». – 2015. – Т. 2. – С. 43–45.
3. Попов И.П. Моделирование состояния объекта в виде суперпозиции состояний // Прикладная математика и вопросы управления. – 2015. – № 2. – С. 18–27.
4. Баркгаузен Г. Введение в учение о колебаниях. – М.: Госэнергоиздат, 1934. – 116 с.
5. Tongue B. Principles of vibration. – Oxford University Press, 2001. – 367 p.
6. Thompson W.T. Theory of vibrations. – Nelson Thornes Ltd., 1996. – 295 p.
7. Inman D.J. Engineering vibration. – Prentice Hall, 2001. – 418 p.
8. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике. – М.: Изд-во Моск. гос. техн. ун-та им. Н.Э. Баумана, 2010. – 495 с.
9. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч. II. Динамика. – М.: Высшая школа, 1966. – 411 с.
10. Маркеев А.П. Теоретическая механика: учебник для университетов. – М.: ЧеРо, 1999. – 572 с.

References

1. Panovko YA.G. Vvedenie v teoriyu mekhanicheskih kolebanij [Introduction to mechanical vibrations]. Moscow, 1971. 240 p.
2. Popov I.P. Emkostno-inertnoe ustrojstvo [Capacitive-inert device]. *Izvestiya Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo ehlektrotekhnicheskogo universiteta «LETI»*, 2015, vol. 2, pp. 43–45.

3. Popov I.P. Modelirovanie sostoyaniya ob"ekta v vide superpozicii sostoyanij [Modeling state of the object in a superposition of states]. *Prikladnaya matematika i voprosy upravleniya,* 2015, no. 2, pp. 18–27.

4. Barkgauzen G. Vvedenie v uchenie o kolebaniyah [Introduction to the theory of vibrations]. Moscow, 1934. 116 p.

5. Tongue, Benson. Principles of Vibration. – Oxford University Press, 2001. – 367 p.

6. Thompson, W.T. Theory of Vibrations. – Nelson Thornes Ltd., 1996. – 295 p.

7. Inman, Daniel J. Engineering Vibration. – Prentice Hall, 2001. – 418 p.

8. Zarubin V.S. Matematicheskoe modelirovanie v tekhnike [Mathematical modeling in engineering]. Moscow, 2010. 495 p.

9. Yablonskij A.A. Kurs teoreticheskoj mekhaniki. Ch. II. Dinamika [Course of theoretical mechanics. Part II. Dynamics]. Moscow, 1966. 411 p.

10. Markeev A. P. Teoreticheskaya mekhanika: Uchebnik dlya universitetov [Theoretical Mechanics: A Textbook for universities]. Moscow, 1999. 572 p.

Получено 27.12.2016

Об авторе

Попов Игорь Павлович (Курган, Россия) – старший преподаватель кафедры «Технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты», Курганский государственный университет (640669, г. Курган, ул. Гоголя, 25, e-mail: ip.popow@yandex.ru).

About the author

Igor' P. Popov (Kurgan, Russian Federation) – Senior Lecturer, Department of Mechanical Engineering, Machine Tools and Instruments, Kurgan State University (25, Gogolya st., Kurgan, 640669, Russian Federation, e-mail: ip.popow@yandex.ru).