УДК 514.182

Д.В. Волошинов, Е.С. Казначеева, Е.С. Хайбрахманова

Санкт-Петербургский государственный университет
телекоммуникаций имени профессора М.А. Бонч-Бруевича,
Санкт-Петербург, Россия

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИНВЕРСИИ В ЗАДАЧАХ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Статья посвящена вопросам автоматизированного синтеза конструктивных моделей, позволяющих представлять поверхность как точку, являющуюся результатом сложного геометрического преобразования. В отличие от методов моделирования поверхностей, использующих принципы аппроксимации, конструктивная модель является средством, основывающимся на геометрическом определении поверхности. С точки зрения объектно-ориентированного проектирования такая модель представляет собой конструктор, реализующий задачу синтеза экземпляра поверхности как представителя класса поверхностей с общими конструктивными геометрическими свойствами.

Ключевые слова: конструктивное геометрическое моделирование, проектирование поверхностей, фактологическая модель, симплекс.

D.V. Voloshinov, E.S. Kaznacheeva, E.S. Khaibrakhmanova

The Bonch-Bruevich Saint-Petersburg State University
of Telecommunications, Saint Petersburg, Russian Federation

TRANSFORMATION OF INVERSION IN THE SURFACES DESIGN PROBLEMS

The article is devoted to the problems of automated synthesis of constructive models that allow to represent the surface as a point, which is the result of a complex geometric transformation. Unlike surface modeling methods that use the principles of approximation, the constructive model is a tool based on the geometric definition of the surface. From the point of view of object-oriented design, such a model is a constructor that implements the task of synthesizing a surface instance as a representative of a class of surfaces with common constructive geometric properties.

Keywords: constructive geometric modeling, design surfaces, factual model, simplex.

Моделирование поверхностей является одной из важнейших задач геометрии, находящих большое практическое применение как в проектировании технических объектов, так и в сфере проведения научных исследований и теоретических изысканий. Конструктивная геометрия обладает неисчерпаемым арсеналом средств и возможностей для моделирования поверхностей, обладающих теми или иными геометрическими качествами, и до недавнего времени она была активным «поставщиком» моделей, предназначенных для решения разнообразных практических задач. Однако следует признать, что бурное внедрение средств автоматизации и компьютеризации в практику проектирования и производства промышленных изделий привело создателей программного обеспечения к необходимости разработки методологии проектирования поверхностей некоторого усредненного свойства, пригодного на все случаи жизни. В общих словах эта идеология заключается в том, что геометрически точная модель принудительно приводится к некоторой унифицированной математической модели, в той или иной степени приближающей получаемый результат к ожидаемому. В современных САПР в основном таким математическим аппаратом стал аппарат моделирования поверхностей в виде сплайновых форм, который действительно в подавляющем большинстве случаев обеспечивает необходимую проектную точность, в особенности если дело касается производства корпусных форм изделий. Безусловно, неоспоримыми достоинствами такой методологии являются унификация решаемых задач и возможность создания надежно работающих систем проектирования, реализующих свою функциональность едиными методами над общими и унифицированными структурами данных.

Однако нельзя не заметить, что такой подход безвозвратно искажает истинную природу исходных геометрических данных, алгоритмов и конструкций, что может приводить к фатальным результатам проектирования. Кроме того, в этом случае исключаются из рассмотрения те приемы, методы и модели, которые не вписываются в парадигму аппроксимационных и интерполяционных методов проектирования поверхностей, так как они не соответствуют идее унификации математического аппарата. В угоду унификации игнорируются, а следовательно, и не используются с должной эффективностью те математические и геометрические приемы, которые способны доставлять огромную пользу при решении задач, выходящих за рамки наиболее популярных в настоящее время задач проектирования корпусов изделий. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно перечитать книгу Г.С. Иванова «Конструирование технических поверхностей» [1], работы других авторов, например [2–4]. Этот исключительно неполный обзор дает возможность удостовериться в том, что мир поверхностей неисчерпаем и не может сводиться к идее подавления одной математической моделью других математических моделей.

Все сказанное в равной степени относится и к аналитическим методам проектирования поверхностей [5]. Мир подобных моделей столь же неисчерпаем, сколь и геометрических, и поэтому он не может игнорироваться и замещаться чем-либо другим без должных на то оснований.

Высказанные ранее соображения продемонстрируем на двух исключительно простых примерах конструктивного геометрического моделирования: синтезе торовой поверхности и ее преобразовании в инверсии [6] относительно сферы и синтезе гиперболоида с преобразованием этой поверхности в аналогичной инверсии.

Решение задачи осуществим на модели G^3_{22} (эпюр Монжа) [7–10]. Пусть тор задан окружностью d_1 – фронтальной проекцией линии пересечения тора плоскостью, проходящей через его ось o_1–p_1 (o_3 – след этой плоскости в горизонтальной плоскости проекций). Центр окружности сечения (p_4 – его фронтальная проекция) вращается вокруг оси o_1–p_1 по окружности с радиусом, определяемым расстоянием между точками p_3 и p_4. Пусть точка p_5 является фронтальной проекции точки, перемещающейся по окружности сечения, геометрическое место которой определяется «быстрым» параметром положения par_2. Тогда в горизонтальной проекции положение этой точки в исходной позиции плоскости сечения будет определяться точкой p_7. Предположим, что плоскость сечения осуществила поворот вокруг оси тора на некоторый угол, заданный вторым, «медленным», параметром положения par_1. Следовательно, точка p_7 также осуществила поворот на этот угол, и ее текущее положение (точка xy) будет определяться пересечением линии o_4 и окружности d_2. Фронтальная проекция точки, принадлежащей поверхности тора и определяемой совокупными значениями параметров положения par_1 и par_2, будет в результате поворота плоскости сечения перемещаться по линии o_6, параллельной оси проекционной системы. Фронтальную проекцию этой точки можно найти как результат ортогонального проецирования точки xy на прямую o_6. Наличие двух проекций точки, принадлежащей поверхности тора в зависимости от двух параметров, позволяет определять любую точку на этой поверхности, следовательно, задача моделирования поверхности тора решена (рис. 1).

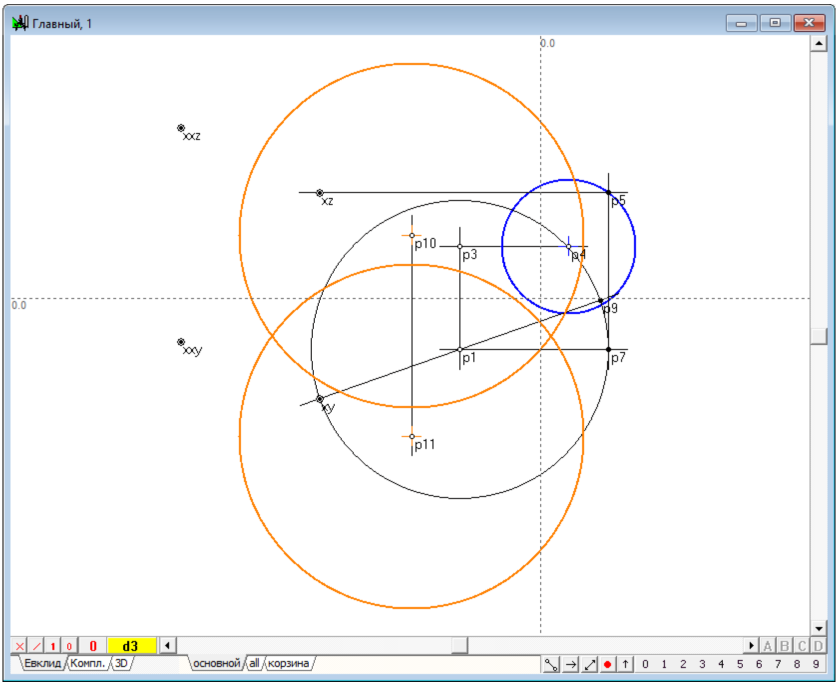

Рис. 1. Конструктивная модель, предназначенная для синтеза торовой поверхности и поверхности циклиды Дюпена

Обратимся теперь к модели, реализующей построение точки в преобразовании инверсии относительно сферы в трехмерном пространстве. Так же, как и в предыдущем случае, используем для решения задачи модель G^3_{22}.

Пусть сфера инверсии задана очерками d_1 и d_2 во фронтальной и горизонтальной проекциях соответственно, а также дана точка-прообраз (проекции точки p_5 и p_6). Для нахождения образа этой точки в инверсии выполним замену плоскостей проекций так, чтобы прямая линия, соединяющая точку-прообраз и центр сферы инверсии, изобразилась в одном из полей проекций в натуральную величину. Переведем в это поле и сферу инверсии. Выбрав ось новой системы проекций o_6 таким образом, чтобы она была параллельной горизонтальной проекции отрезка, соединяющего исходную точку с центром сферы, построим в дополнительном поле точку p_8. В этом поле преобразование инверсии сведено к двумерному случаю, поэтому выполним его, воспользовавшись соответствующим алгоритмом, в результате чего найдем точку-образ p_9. Нам остается перевести эту точку в исходные поля и получить проекции искомой точки-образа в системе исходных данных (рис. 2).

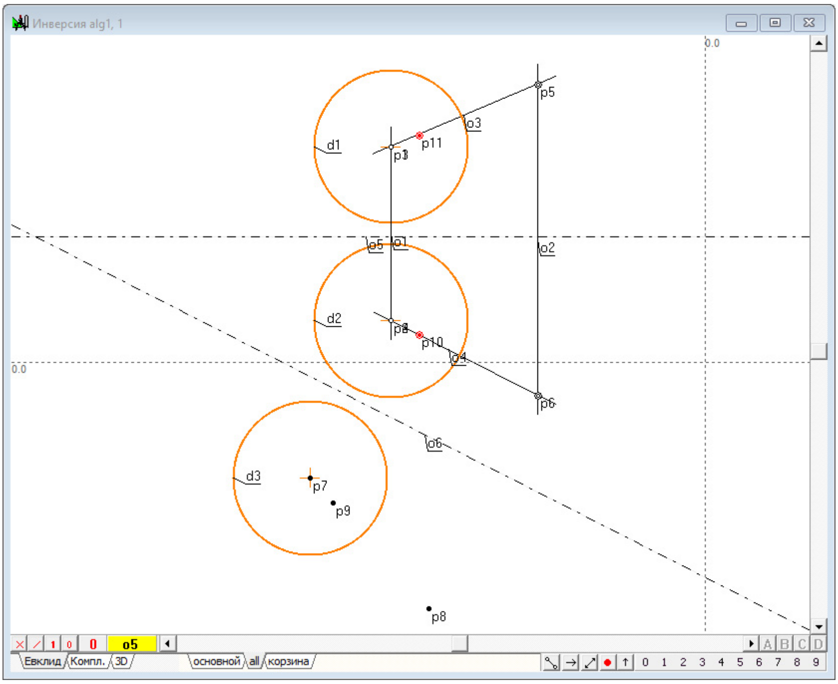

Рис. 2. Модель, реализующая построение образа точки в инверсии относительно сферы в трехмерном пространстве

Выделим в качестве входных параметров алгоритма проекции очерков сферы инверсии и проекции исходной точки, а в качестве выходных параметров – проекции искомой точки. С этого момента конструктивная модель готова к применению в основной задаче.

Вернемся к исходному алгоритму. Зададим где-либо центр сферы инверсии (p_{10}, p_{11}) и проведем ее очерки (окружности d_3 и d_4). Применим к модели этой сферы, а также к точке, моделирующей поверхность сферы (*xz*, *xy*), только что разработанный алгоритм преобразования точки в инверсии относительно сферы. На выходе этого преобразования получим точки *xxz* и *xxy*, моделирующие точку поверхности циклиды Дюпена [11–16]. Задав вариацию параметров в диапазоне par_1 от 0 до 360°, а par_2 – в диапазоне от 0 до 1°, выполним визуализацию полученной сцены. Результат работы модели показан на рис. 3.

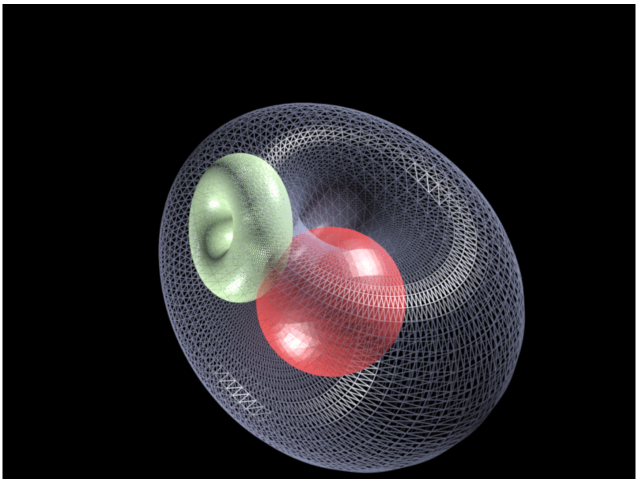

Рис. 3. Модель поверхности циклиды Дюпена
как результат инверсии тора относительно сферы

Наличие конструктивной модели синтеза поверхности циклиды Дюпена на основе торовой поверхности и сферы позволяет использовать ее в том числе для получения классов поверхностей в зависимости от изменения других параметров модели.

Перейдем ко второму примеру. Решим задачу, подобную первой, но в качестве исходных данных в ней будет выступать поверхность гиперболоида, заданного тремя скрещивающимися прямыми [17]. Итак, поверхность задана прямыми a (o_1–o_2), b (o_3–o_4) и c (o_5–o_6) (рис. 4).

Для построения поверхности, образованной скольжением прямой линии по исходно заданным прямым, выберем на одной из них (например, на линии b) фиксированную точку B (p_1–p_2). Эта точка в соединении с линией a образует плоскость *alpha* (o_{12}, o_{13}–o_{14}, o_{15}), а в соединении с линией c – плоскость *beta* (o_{16}, o_{17}–o_{18}, o_{19}). Плоскости *apha* и *beta* пересекаются по прямой линии d (o_{36}–o_{37}), являющейся образующей гиперболоида и находящейся в непосредственной зависимости от расположения точки B. Вынуждая точку B перемещаться по прямой b в зависимости от значений «медленного» параметра положения par_1 в некотором диапазоне значений, образуем поверхность гиперболоида, «заметаемого» движущейся образующей d (рис. 5).

Зададим также на прямой d точку D (xz, xy), определив ее положение «быстрым» параметром par_2. Таким образом, задача моделирования поверхности гиперболоида решена.

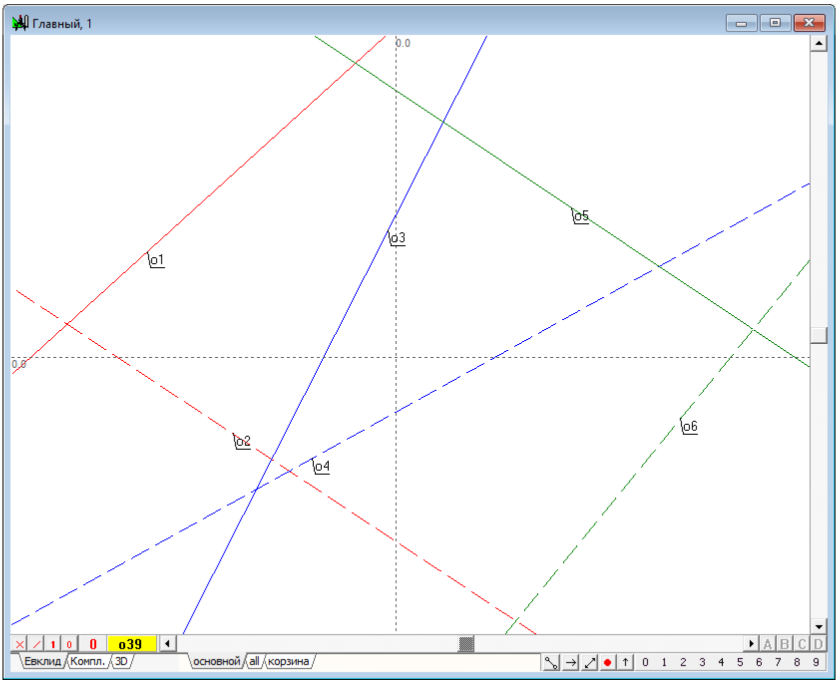

Рис. 4. Исходные данные для решения задачи о моделировании гиперболоида и его образа в инверсии относительно сферы

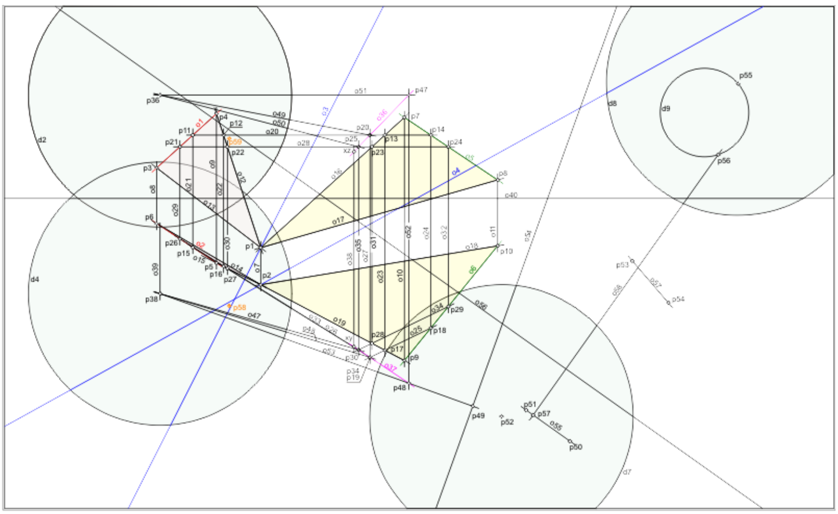

Рис. 5. Конструктивная геометрическая модель задачи о построении гиперболоида и его образа в инверсии

Для выполнения операции инверсии в этой задаче применим подход, несколько отличающийся от предыдущей задачи. Из теории преобразования инверсии известно, что прямая линия в инверсии переходит в окружность, проходящую через центр инверсии. В связи с этим, задав исходное расположение сферы инверсии, преобразуем исходную систему проекций так, чтобы в одном из полей плоскость, образованная соединением движущейся прямой линии d и центра сферы, наблюдалась в натуральную величину. В нашем случае такое положение прямой d в дополнительном поле отображается линией o_{57}, а очерк сферы инверсии представлен окружностью d_8. Ясно, что такая прямая будет преобразована в инверсии в окружность d_9, проходящую через центр p_{55} окружности d_8. Расположив на d_9 точку p_{56} и установив управление ее положением в зависимости от «быстрого» параметра par_3, получим возможность промоделировать поверхность-образ гиперболоида относительно сферы. Для этого, безусловно, требуется восстановить проекции точки этой поверхности в исходных полях (p_{59}, p_{58}), определяемой в дополнительных полях точками p_{56} и p_{57}.

Результат работы совокупного алгоритма представлен на рис. 6.

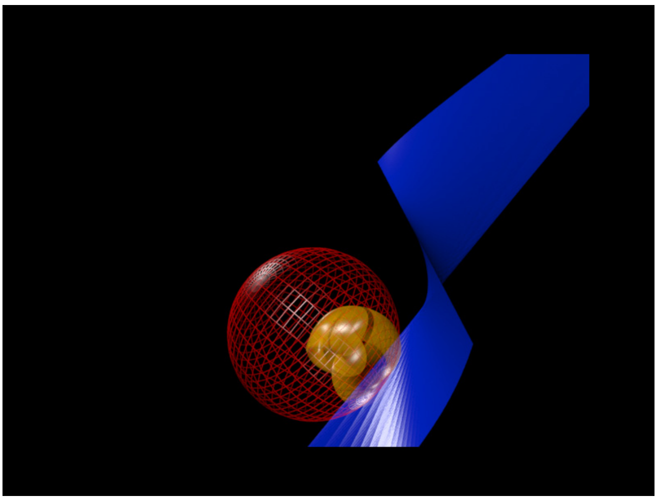

Рис. 6. Генерация лоскута поверхности гиперболоида, заданного тремя скрещивающимися прямыми, и его образ в инверсии относительно сферы

Представленные в данной статье модели поверхностей исключительно просты и основаны на элементарных вычислительных операциях. Тем не менее они демонстрируют, что конструктивный геометрический метод обладает практически безграничными возможностями в задачах проектирования поверхностей, равно как и в других геометрических задачах. Наличие инструментов автоматизации конструктивного геометрического моделирования позволяет применять в решениях как известные геометрические преобразования [1, 2, 18], так и разрабатывать новые, ранее казавшиеся не выполнимыми из-за высокой трудоемкости и инструментальных ограничений. Следует обратить внимание на то, что доступность информации о функциональном составе алгоритма и его структуре, представленной в виде фактологической модели [10], позволяет выполнять не только сугубо вычислительные, но и символьно-логические преобразования геометрических моделей. Это означает, что конструктивные модели, по сути, представляют собой данные для программ метауровня, способных осуществлять символьную или иную логическую интерпретацию подобных данных, наподобие тех методов, которые используются в автоматических решателях уравнений, символьном дифференцировании и тому подобных задачах, но уже применительно к геометрии. Такой подход позволит, в частности, определять дифференциальные характеристики моделей не путем задания малых приращений параметров, а на основе логического вывода, что, без сомнения, не только повысит точность и достоверность результатов, но и предоставит принципиально новые возможности для синтеза геометрических алгоритмов.

Список литературы

1. Иванов Г.С. Конструирование технических поверхностей (математическое моделирование на основе нелинейных преобразований). – М.: Машиностроение, 1987. – 192 с.

2. Грязнов Я.А. Отсек каналовой поверхности как образ цилиндра в расслояемом образовании // Геометрия и графика. – 2012. – Т. 1. – С. 17–19.

3. Короткий В.А., Усманова Е.А., Хмарова Л.И. Компьютерное моделирование технических поверхностей // Геометрия и графика. – 2015. – Т. 3, № 4. – С. 19–26.

4. Умбетов Н.С. Конструирование эквипотенциальной поверхности // Геометрия и графика. – 2012. – Т. 1. – С. 11–14.

5. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н. Энциклопедия аналитических поверхностей. – М.: Либроком, 2015. – 560 с.

6. Бакельман И.Я. Инверсия. – М.: Наука, 1966. – 79 с.

7. Волошинов Д.В. Геометрическая лаборатория. Закладываем основы // Качество графической подготовки: проблемы, традиции и инновации: материалы VII Междунар. интернет-конф., февраль – март 2017 г. – Пермь, 2017.

8. Волошинов Д.В. Геометрическая лаборатория. Инструменты ортогональности // Качество графической подготовки: проблемы, традиции и инновации: материалы VII Междунар. интернет-конф., февраль – март 2017 г. – Пермь, 2017.

9. Волошинов Д.В. Геометрическая лаборатория. Новый геометрический инструмент // Качество графической подготовки: проблемы, традиции и инновации: материалы VII Междунар. интернет-конф., февраль – март 2017 г. – Пермь, 2017.

10. Волошинов Д.В. Конструктивное геометрическое моделирование. Теория, практика, автоматизация: монография. – Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2010. – 355 с.

11. Сальков Н.А. Свойства циклид Дюпена и их применение. Часть 1 // Геометрия и графика. – 2015. – Т. 3, № 1. – С. 16–25.

12. Сальков Н.А. Свойства циклид Дюпена и их применение. Часть 2 // Геометрия и графика. – 2015. – Т. 3, № 2. – С. 9–22.

13. Сальков Н.А. Свойства циклид Дюпена и их применение. Часть 3. Сопряжения // Геометрия и графика. – 2015. – Т. 3, № 4. – С. 3–14.

14. Сальков Н.А. Циклида Дюпена и кривые второго порядка. Часть 1 // Геометрия и графика. – 2016. – Т. 4, № 2. – С. 19–28.

15. Сальков Н.А. Циклида Дюпена и кривые второго порядка. Часть 2 // Геометрия и графика. – 2016. – Т. 4, № 3. – С. 17–28.

16. Сальков Н.А. Циклида Дюпена и ее приложение: монография. – М.: ИНФРА-М, 2016. – 141 с.

17. Хейфец А.Л. Геометрически точная 3D-анимация кинематических поверхностей // Качество графической подготовки: проблемы, традиции и инновации: материалы VII Междунар. интернет-конф., февраль – март 2017 г. – Пермь, 2017.

18. Геометрические преобразования в начертательной геометрии и инженерной графике / В.И. Серегин, Г.С. Иванов, И.Ф. Боровиков, Л.С. Сенченкова // Геометрия и графика. – 2015. – Т. 3, № 2. – С. 23–28.

References

1. Ivanov G.S. Konstruirovanie tekhnicheskikh poverkhnostei (matematicheskoe modelirovanie na osnove nelineinykh preobrazovanii) [Designing of technical surfaces (mathematical modelling on the basis of nonlinear transformations)]. Moscow, Mashinostroenie, 1987. 192 p

2. Griaznov Ia.A. *Otsek kanalovoi poverkhnosti kak obraz tsilindra v rassloiaemom obrazovanii* [Channel surface compartment as image of the cylinder in stratifiable formation]. – *Geometriia i grafika*. 2012, vol. 1, iss. 1, pp. 17-19.

3. Korotkii V.A., Usmanova E.A., Khmarova L.I. *Komp'iuternoe modelirovanie tekhnicheskikh poverkhnostei* [Computer Simulation of Kinematic Surfaces] – *Geometriia i grafika*. 2015. vol. 3, iss. 4, pp. 19–26.

4. Umbetov N.S. *Konstruirovanie ekvipotentsial'noi poverkhnosti* [Design of an equipotential surface] – *Geometriia i grafika*. 2012. vol. 1. pp. 11-14.

5. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. Entsiklopediia analiticheskikh poverkhnostei [Encyclopedia of the analytical surfaces]. Moscow, LIBROKOM, 2015, 560 p.

6. Bakel'man I.Ia. Inversiia [Inversion]. Moscow, Nauka. 1966, 79 p.

7. Voloshinov D.V. Geometricheskaia laboratoriia. Zakladyvaem osnovy [Geometric laboratory. Laying foundations]. *Kachestvo graficheskoi podgotovki: problemy, traditsii i innovatsii. Materialy VII mezhdunarodnoi Internet-konferentsii*. February – Mart 2017, Perm, 2017.

8. Voloshinov D.V. Geometricheskaia laboratoriia. Instrumenty ortogonal'nosti [Geometric laboratory. Tools of orthogonality]. *Kachestvo graficheskoi podgotovki: problemy, traditsii i innovatsii. Materialy VII mezhdunarodnoi Internet-konferentsii*. February – Mart 2017, Perm, 2017

9. Voloshinov D.V. Geometricheskaia laboratoriia. Novyi geometricheskii instrument [The new geometric tool]. *Kachestvo graficheskoi podgotovki: problemy, traditsii i innovatsii. Materialy VII mezhdunarodnoi Internet-konferentsii*. February – Mart 2017, Perm, 2017

10. Voloshinov D.V. Konstruktivnoe geometricheskoe modelirovanie. Teoriia, praktika, avtomatizatsiia [Constructive geometric modeling. Theory, practice, automation]. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2010, 355 p.

11. Sal'kov N.A. *Svoistva tsiklid Diupena i ikh primenenie. Chast' 1* [Properties of Cyclide Dyupen and Their Application. Part 1] – *Geometriia i grafika*. 2015, vol. 3, iss. 1, pp. 16-25.

12. Sal'kov N.A. *Svoistva tsiklid Diupena i ikh primenenie. Chast' 2* [Properties of Cyclide Dyupen and Their Application. Part 2] – *Geometriia i grafika*. 2015, vol. 3, iss. 2, pp. 9-22.

13. Sal'kov N.A. *Svoistva tsiklid Diupena i ikh primenenie. Chast' 3. Sopriazheniia* [Properties of Dupin Cyclide and Their Application. Part 3: The Problem of Apollonius] – *Geometriia i grafika*. 2015, vol. 3, no. 4, pp. 3-14.

14. Sal'kov N.A. *Tsiklida Diupena i krivye vtorogo poriadka. Chast' 1* [Dupin Cyclide and Second-Order Curves. Part 1] – *Geometriia i grafika*. 2016, vol. 4, iss. 2, pp. 19-28.

15. Sal'kov N. A. Tsiklida Diupena i krivye vtorogo poriadka. Chast' 2 [Dupin Cyclide and Second-Order Curves. Part 2] – *Geometriia i grafika*. 2016, vol. 4, iss. 3, pp. 17-28.

16. Sal'kov N.A. Tsiklida Diupena i ee prilozhenie [Dupin Cyclide and its Application] – Moscow, INFRA-M, 2016, 141 p.

17. Kheifets A.L. Geometricheski tochnaia 3D animatsiia kinematicheskikh poverkhnostei [Geometrically accurate 3D animation of the kinematic surfaces]. *Kachestvo graficheskoi podgotovki: problemy, traditsii i innovatsii. Materialy VII mezhdunarodnoi Internet-konferentsii*. February – Mart 2017, Perm, 2017.

18. Seregin V.I., Ivanov G.S., Borovikov I.F., Senchenkova L.S. *Geometricheskie preobrazovaniia v nachertatel'noi geometrii i inzhenernoi grafike* [Geometric Transformations in Descriptive Geometry And Engineering Graphics]. – *Geometriia i grafika*. 2015, vol. 3, iss. 2, pp. 23–28.

Получено 26.02.2017

Об авторах

Волошинов Денис Вячеславович (Санкт-Петербург, Россия) – доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Информатика и компьютерный дизайн», Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций имени профессора М.А. Бонч-Бруевича (193232, Санкт-Петербург, пр. Большевиков, 22, корп. 1, e-mail: volosh@pochta.ru).

Казначеева Екатерина Сергеевна (Санкт-Петербург, Россия) – студентка, кафедра «Информатика и компьютерный дизайн», Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций имени профессора М.А. Бонч-Бруевича (193232, Санкт-Петербург, пр. Большевиков, 22, корп. 1, e-mail: ekaterina2694@mail.ru).

Хайбрахманова Екатерина Сергеевна (Санкт-Петербург, Россия) – студентка, кафедра «Информатика и компьютерный дизайн», Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций имени профессора М.А. Бонч-Бруевича (193232, Санкт-Петербург, пр. Большевиков, 22, корп. 1, e-mail: katusha.1994.10@mail.ru).

About the authors

Denis V. Voloshinov (Saint Petersburg, Russian Federation) – Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Head of the Department Informatics and Computer Design, The Bonch-Bruevich Saint-Petersburg State University of Telecommunications (22-1, Bolshevikov av., Saint Petersburg, 193232, Russian Federation, e-mail: volosh@pochta.ru).

Ekaterina S. Kaznacheeva (Saint Petersburg, Russian Federation) – Student, Department of Informatics and Computer Design, The Bonch-Bruevich Saint-Petersburg State University of Telecommunications (22-1, Bolshevikov av., Saint Petersburg, 193232, Russian Federation, e-mail: ekaterina2694@mail.ru).

Ekaterina S. Khaibrakhmanova (Saint Petersburg, Russian Federation) – Student, Department of Informatics and Computer Design, The Bonch-Bruevich Saint-Petersburg State University of Telecommunications (22-1, Bolshevikov av., Saint Petersburg, 193232, Russian Federation, e-mail: katusha.1994.10@mail.ru).