

УДК 514.18

Я.А. Кокарева

Донской государственный технический университет,
Ростов-на-Дону, Россия

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ОСНОВЕ КООРДИНАЦИИ ПРОСТРАНСТВА ВИНТОВЫМИ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ЛИНИЯМИ

Рассмотрен алгоритм синтеза поверхностей путем погружения произвольной линии в конгруэнцию на основе конструктивно-параметрического метода формообразования. Получены параметрические уравнения координации пространства винтовыми и эллиптическими линиями, на основании которых определены u -, v - и w -конгруэнции. Визуализированы поверхности полученных конгруэнций. Определена общая структура поверхностей.

Ключевые слова: конструктивно-параметрический метод, формообразование, конгруэнция линий, координация пространства, криволинейные координаты.

Ia.A. Kokareva

Don State Technical University,
Rostov-on-Don, Russian Federation

ANALYTICAL MODEL OF SURFACES BASED ON THE SPACE'S COORDINATION BY HELIX AND ELLIPSES

In the article the algorithm of surface's construction on the basis of a construct-parametrical method of a shaping by immersion of any line in congruence is considered. The parametrical equations of coordination of space by helix and ellipses, on the basis of which u -, v - and w -congruences are defined, are received. The surfaces of the resulting congruences are visualized. The general structure of surfaces is determined.

Keywords: construct-parametrical method, shaping, congruence of lines, space's coordination, curvilinear coordinates.

Формообразование поверхностей является неотъемлемой частью проектирования. С развитием технологий, методов расчетов, появлением новых материалов, позволяющих реализовать все более футуристические проекты, развиваются и методы формообразования поверхностей.

Методы формообразования исторически развивались в соответствии с доступными способами визуализации и расчета конструкций: синтетический [1–3], конструктивно-синтетический [4–6], кинематический [7–9], метод преобразований [10, 11], метод криволинейного проектирования [12–14], параметрический [15], методы представления кусочно-аналитическими функциями [8, 16, 17].

Наличие аналитической модели при проектировании сложных криволинейных форм упрощает расчеты конструкции. Однако часто по аналитическому представлению практически невозможно представить будущую форму поверхности. Одним из методов формообразования, который позволяет включить в уравнения поверхностей конструктивные элементы с задаваемыми параметрами, является конструктивно-параметрический метод, разработанный И.А. Скиданом и его учениками [18–22].

Цель данной статьи – синтез параметрических уравнений и визуализация поверхностей u -, v - и w -конгруэнций конструктивно-параметрическим методом на основе конструктивной схемы координации пространства винтовыми и эллиптическими линиями.

Суть конструктивно-параметрического метода сводится к тому, что используется конструктивная модель будущей поверхности в качестве переходной от задуманной к аналитической. При этом пространство параметризуется в соответствии с этой моделью, т.е. создается конструктивная схема координации пространства заданными линиями в качестве координатных. При этом, с одной стороны, пространство задается криволинейными координатами, а с другой – эти же координатные линии образуют три взаимосвязанных конгруэнции линий. Для образования поверхности используется погружение линии в одну из конгруэнций.

Приведем алгоритм синтеза параметрических уравнений поверхности, полученной путем погружения линии в конгруэнцию:

1. Создание конструктивной схемы координации пространства линиями.
2. Составление параметрических уравнений конгруэнции-координации в виде

$$x = f_1(u, v, w); \quad y = f_2(u, v, w); \quad z = f_3(u, v, w). \quad (1)$$

С помощью уравнений (1) также задаются три конгруэнции – u -, v - и w -линий.

3. Выражение криволинейных координат через прямоугольные декартовы:

$$u = \varphi_1(x, y, z); \quad v = \varphi_2(x, y, z); \quad w = \varphi_3(x, y, z). \quad (2)$$

4. Задание параметрических уравнений погружаемой в конгруэнцию линии:

$$X = F_1(t); \quad Y = F_2(t); \quad Z = F_3(t). \quad (3)$$

5. Подстановка уравнений (3) в уравнения (2) вместо x, y, z соответственно:

$$u = \varphi_1(X(t), Y(t), Z(t)); \quad v = \varphi_2(X(t), Y(t), Z(t)); \quad w = \varphi_3(X(t), Y(t), Z(t)). \quad (4)$$

6. В зависимости от выбранной конгруэнции линий (u, v или w) в уравнения (1) подставляются два уравнения (4), за исключением того, название которого входит в выбранную конгруэнцию. Например, для синтеза уравнений поверхностей конгруэнции w -линий в уравнения (1) подставляются выражения для u и v из уравнений (4):

$$x = f_1(u(t), v(t), w); \quad y = f_2(u(t), v(t), w); \quad z = f_3(u(t), v(t), w). \quad (5)$$

Рассмотрим конструктивную схему координации пространства винтовыми и эллиптическими линиями (рис. 1):

- ◆ u – параметр положения точки на заданной винтовой цилиндрической линии, являющейся местом центров сечений-эллипсов;
- ◆ v – параметр главной оси эллипса;
- ◆ w – параметр положения точки M на эллипсе.

Фактически конструктивная схема представляет собой множество соосных винтовых поверхностей с подобными сечениями-эллипсами в плоскостях, перпендикулярных плоскости XOY .

Согласно вышеприведенному алгоритму составим параметрические уравнения конгруэнции-координации.

В плоскости сечения $u = u_0$ уравнения плоского поля концентрических подобных эллипсов (s – коэффициент соотношения полуосей эллипса) с учетом параметра-радиуса a и параметра-шага b винтовой линии будут иметь вид

$$x' = v \cos w + a; \quad y' = s v \sin w + b u. \quad (6)$$

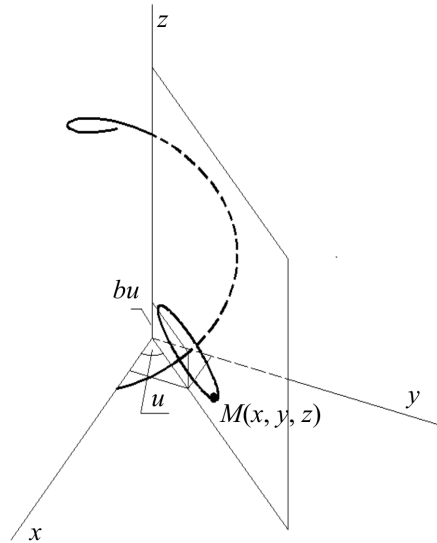


Рис. 1. Конструктивная схема координации пространства винтовыми и эллиптическими линиями

С учетом поворота плоскости найдем уравнения конгруэнции-координации:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos u = (v \cos w + a) \cos u, \\ y &= x' \sin u = (v \cos w + a) \sin u, \\ z &= y' = sv \sin w + bu. \end{aligned} \quad (7)$$

Область определения функций (7) определяем, рассчитав якобиан и приравняв его к нулю:

$$J = -vs (a + v \cos w) = 0. \quad (8)$$

Анализируя выражение (8), можно определить, что при $v = 0$ мы получаем уравнение винтовой цилиндрической линии, на которой располагаются центры эллипсов, а выражение в скобках определяет плоское поле эллипсов.

Координатные поверхности заданной криволинейной системы координат:

- ◆ $u = \text{const}$ – плоское поле концентрически расположенных эллипсов;
- ◆ $v = \text{const}$ – винтовая поверхность с сечением-эллипсом, перпендикулярным плоскости XOY ;
- ◆ $w = \text{const}$ – винтовая линейчатая поверхность.

Координатные линии:

- ◆ u -линии – винтовые цилиндрические линии;
- ◆ v -линии – прямые линии;
- ◆ w -линии – эллипсы.

Далее при выполнении пунктов 3–6 приведенного алгоритма были получены изображения поверхностей u -, v - и w -конгруэнций (рис. 2, 3).

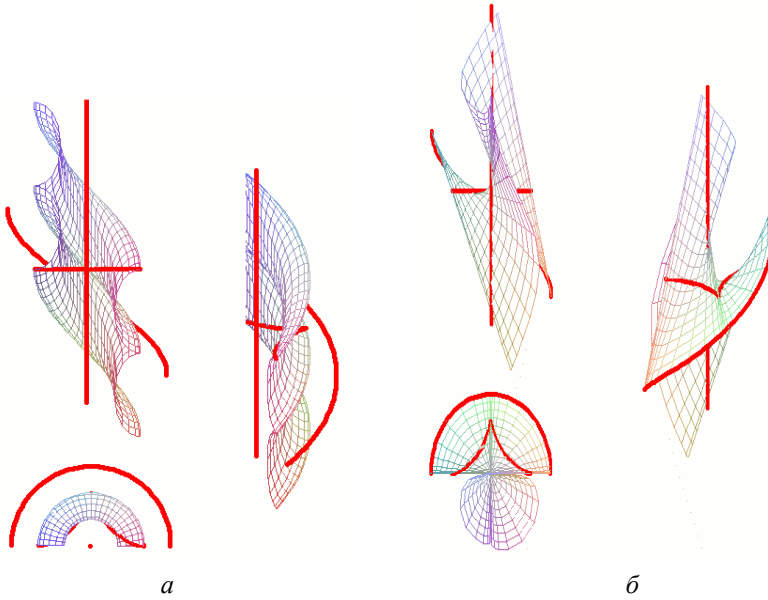


Рис. 2. Пример поверхности: a – u -конгруэнции; b – v -конгруэнции

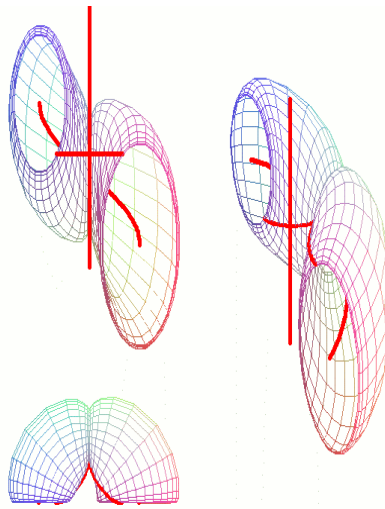


Рис. 3. Пример поверхности w -конгруэнции

В конгруэнции (7) погружена астроида:

$$X = \cos^3 t; Y = \sin^3 t; Z = 2.$$

Постоянные параметры конгруэнции: $a = 1,5$, $b = 1$, $s = 2$. Сами уравнения выражений (2) и поверхностей (5) не приведены из-за громоздкости полученного результата.

Рассмотрим структуру полученных поверхностей.

1. Поверхности u -конгруэнции являются винтовыми поверхностями, образующие которых пересекают погружаемую линию.

1. Поверхности v -конгруэнции являются линейчатыми поверхностями с тремя направляющими: осью OZ , погружаемой линией и винтовой цилиндрической линией с параметрами a и b .

1. Поверхности w -конгруэнции являются каналовыми поверхностями с эллиптическими сечениями, перпендикулярными плоскости XOY , центры которых образуют винтовую линию с параметрами a и b . Поверхность содержит погружаемую линию.

При приближении к значениям $u = \pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) поверхности не определены.

Полученные типы поверхностей: винтовая, каналовая и линейчатая с тремя направляющими – могут быть использованы в технических проектах и дизайнерских решениях.

Список литературы

1. Reye T. Geometrie der Lage. – Leipzig, 1910. – Vol. 1–3.
2. Salmon G. A Treatise on the analytic geometry of three dimensions. – New York: Chelsea Publishing Company, 1965 (reprint). – 486 p.
3. Sanger R.G. Synthetic projective geometry. – New York; London: McCraw – Hill Book Company, 1939. – 175 p.
4. Подгорный А.Л. Конструирование поверхностей оболочек по заданным условиям на основе выделения их из конгруэнций прямых // Прикладная геометрия и инженерная графика. – 1969. – Вып. VIII. – С. 17–28.
5. Підгорний О.Л., Несвідомін В.М. Створення комп'ютерних моделей нелінійчатої поверхні 3-го порядку методами синтетичної геометрії // Прикладная геометрия и инженерная графика. – 2008. – Вип. 79. – С. 9–15.
6. Михайленко В.Е., Обухова В.С., Подгорный А.Л. Формообразование оболочек в архитектуре. – Киев: Будівельник, 1972. – 208 с.

7. Короткий В.А., Усманова Е.А., Хмарова Л.И. Компьютерное моделирование кинематических поверхностей // Геометрия и графика. – 2016. – Т. 3, № 4. – С. 19–26. DOI: 10.12737/17347
8. Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование. – М.: Изд-во физ.-матем. лит., 2012. – 472 с.
9. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н. Энциклопедия аналитических поверхностей. – М.: Либроком, 2010. – 560 с.
10. Иванов Г.С. Конструирование технических поверхностей (математическое моделирование на основе нелинейных преобразований). – М.: Машиностроение, 1987. – 192 с.
11. Надолинный В.А. Основы теории проективных рациональных поверхностей: дис. ... д-ра техн. наук: 05.01.01. – М., 1989. – 202 с.
12. Обухова В.С. Двухосевое проектирование кривых линий // Прикладная геометрия и инженерная графика. – 1965. – Вып. I. – С. 39–47.
13. Обухова В.С. Обобщение нелинейных систем проекций и одноосевые системы // Прикладная геометрия и инженерная графика. – 1970. – Вып. 10. – С. 17–27.
14. Сименко О.В. Проекціювання променями конгруенції циліндричних гвинтових ліній сталого кроку // Праці Таврійського державного агротехнічного університету. – 2004. – Т. 23, вип. 4. – С. 86–91.
15. Сальков Н.А. Параметрическая геометрия в геометрическом моделировании // Геометрия и графика. – 2014. – Т. 2, № 3. – С. 7–13. DOI: 10.12737/6519
16. Замятин А.В., Кубарев А.Е., Замятина Е.А. Алгоритм аппроксимации поверхности сплайнами [Электронный ресурс] // Наукосведение. – 2012. – № 3 (12). – URL: naukovedenie.ru/sbornik12/12-90.pdf (дата обращения: 12.01.2017).
17. Circular arc snakes and kinematic surface generation / M. Barton, L. Shi, M. Kilian, J. Wallner, H. Pottmann // Eurographics: Computer Graphics Forum. – Oxford: Blackwell Publishing Ltd., 2013. – Vol. 32, № 2. DOI: 10.1111/cgf.12020
18. Сименко О.В. Аналітичні та комп'ютерно-графічні моделі нетрадиційних систем проекціювання та їхніх проекціювальних поверхонь: дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01. – Донецьк, 2006. – 216 с.
19. Скідан І.А., Кокарева Я.А. Аналітичний опис еліптичної конгруенції прямих та її поверхонь // Праці Таврійського державного агротехнічного університету. – 2010. – Т. 48, вип. 4. – С. 36–43.

20. Кокарева Я.А. Аналітичні та комп'ютерні моделі поверхонь конгруенцій першого порядку прямих: дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01. – Макіївка, 2011. – 203 с.

21. Кокарева Я.А. Параметрические уравнения конгруэнции прямых, заданной фокальными окружностями // Научное обозрение. – 2014. – № 11-3. – С. 689–692.

22. Кокарева Я.А. Поверхности конгруэнции эквиаффинных образов окружности [Электронный ресурс] // Инженерный вестник Дона. – 2016. – № 4. – URL: <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2016/3863> (дата обращения: 14.01.2017).

References

1. Reye T. Geometrie der Lage. Leipzig, 1910, vol. 1-3.
2. Salmon G. A Treatise on the Analytic Geometry of Three Dimensions. New York, Chelsea Publishing Company, 1965 (reprint), 486 p.
3. Sanger R.G. Synthetic projective geometry. New York, London, McCraw – Hill Book Company, 1939, 175 p.
4. Podgornyi A.L. *Konstruivovanie poverkhnostei oboloček po zadannym usloviiam na osnove vydeleniia ikh iz kongruentsii priamykh* [The design of the surfaces of the membranes according to the preset conditions on the basis of their allocation of congruences direct]. *Prikladnaia geometriia i inzhenernaia grafika*. 1969, iss. VIII, pp. 17-28.
5. Pidgornii O.L., Nesvidomin V.M. Stvorennia komp'uternikh modelei neliniichatoї poverkhni 3-go poriadku metodami sintetichnoї geometrii [The creation of computer models deliniate the surface of the 3-th order methods of synthetic geometry]. *Prikladnaia geometriia i inzhenernaia grafika*. 2008, iss. 79, pp. 9-15.
6. Mikhailenko V.E., Obukhova V.S., Podgornyi A.L. Formoobrazovanie oboloček v arkhitekture [The shaping of shells in architecture]. Kiev, Budivel'nik, 1972, 208 p.
7. Korotkii V.A., Usmanova E.A., Khmarova L.I. *Komp'uternoe modelirovanie kinematicheskikh poverkhnostei* [Computer simulation of kinematic surfaces]. *Geometriia i grafika*. 2016, vol. 3, iss. 4, pp. 19-26, DOI: 10.12737/17347.
8. Golovanov N.N. Geometricheskoe modelirovanie [Geometric simulation]. Moscow, Izd-vo fiziko-matematicheskoi literatury, 2012, 472 p.

9. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. Entsiklopediia analiticheskikh poverkhnostei [Encyclopedia of the analytical surfaces]. Moscow, Librokom, 2010, 560 p.

10. Ivanov G.S. Konstruirovaniye tekhnicheskikh poverkhnostei (matematicheskoye modelirovaniye na osnove nelineynykh preobrazovaniy) [Designing of technical surfaces (mathematical modelling on the basis of nonlinear transformations)]. Moscow, Mashinostroyeniye, 1987. 192 p

11. Nadolinnyi V.A. Osnovy teorii proyektivnykh ratsional'nykh poverkhnostei [Fundamentals of the theory of projective rational surfaces]. Doctor's degree dissertation. Moscow, 1989, 202 p.

12. Obukhova V.S. *Dvuyosevoye proyektirovaniye krivykh linii* [Two axial projecting curves]. *Prikladnaya geometriya i inzhenernaya grafika*. 1965, iss. I, pp. 39-47.

13. Obukhova V.S. *Obobshcheniye nelineynykh sistem proyeksii i odnooseyevykh sistem* [Generalization of nonlinear systems of projections and the one-axis system]. *Prikladnaya geometriya i inzhenernaya grafika*. 1970, iss. 10, pp. 17-27.

14. Simenko O.V. *Proyektirovaniye promenyami kongruentsnykh tsilindricheskikh gvintovykh linii stalogo kroku* [The projection rays of congruence cylindrical helix with a constant pitch]. *Pratsi Tavriys'kogo derzhavnogo agrotekhnicheskogo universitetu*. 2004, iss. 4, vol. 23, pp. 86-91.

15. Sal'kov N.A. *Parametricheskaya geometriya v geometricheskom modelirovanii* [Parametric Geometry in Geometric Modeling]. *Geometriya i grafika*. 2014, vol. 2, iss. 3, pp. 7-13, DOI: 10.12737/6519.

16. Zamiatin A.V., Kubarev A.E., Zamiatina E.A. *Algoritm approksimatsii poverkhnosti splainami* [Algorithm of approximation of a surface splines]. *Naukovedeniye*. 2012, no. 3, iss. 12, available at: naukovedeniye.ru/sbornik12/12-90.pdf

17. Barton M., Shi L., Kilian M., Wallner J., Pottmann H. Circular Arc Snakes and Kinematic Surface Generation. Computer Graphics Forum "Eurographics". Oxford, Blackwell Publishing Ltd, 2013, vol. 32, no. 2, DOI: 10.1111/cgf.12020.

18. Simenko O.V. *Analitichni ta komp'yuterno-grafichni modeli netraditsiynikh sistem proyektirovaniya ta ikhnikh proyektivnykh poverkhnostey* [Analytical and computer-graphics model of unconventional systems of the projection and the projection tive surfaces]. Ph. D. thesis. Donetsk, 2006, 216 p.

19. Skidan I.A., Kokareva Ia.A. *Analitichnii opis eliptichnoï kongruentsii priamikh ta ïï poverkhon'* [Analytical description of congruence elliptical straight and its surfaces]. *Pratsi Tavriis'kogo derzhavnogo agrotekhnichnogo universitetu*. 2010, iss. 4, vol. 48, pp. 36-43.

20. Kokareva Ia.A. *Analitichni ta komp'iuterni modeli poverkhon' kongruentsii pershogo poriadku priamikh* [Analytical and computer models of the surfaces congruence first order direct]. Ph. D. thesis. Makeevka, 2011, 203 p.

21. Kokareva Ia.A. *Parametricheskie uravneniia kongruentsii priamykh, zadannoi fokal'nymi okruzhnostiami* [Parametric equations of the congruence of straight lines preset by focal circumferences]. *Nauchnoe obozrenie*. 2014, no. 11-3, pp. 689-692.

22. Kokareva Ia.A. *Poverkhnosti kongruentsii ekviaffinnykh obrazov okruzhnosti* [The surface of congruency equiaffine images of the circle]. *Inzhenernyi vestnik Dona*. 2016, no. 4, available at: <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2016/3863>.

Получено 26.02.2017

Об авторе

Кокарева Яна Андреевна (Ростов-на-Дону, Россия) – кандидат технических наук, доцент кафедры «Информационные системы в строительстве», Донской государственной технической университет (344000, Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1, e-mail: kokareva.ya.a@gmail.com).

About the author

Iana A. Kokareva (Rostov-on-Don, Russian Federation) – Ph.D. in Technical Sciences, Associate Professor, Department of Information System in the Civil Engineering, Don State Technical University (1, Gagarin Square, Rostov-on-Don, 344000, Russian Federation, e-mail: kokareva.ya.a@gmail.com).