УДК 517.927

А.Р. Абдуллаев, Э.В. Плехова

Пермский национальный исследовательский
политехнический университет, Пермь, Россия

ОБ ОБРАТИМОСТИ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА, СВЯЗАННОГО С СИНГУЛЯРНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Получено представление обратного и правого обратного операторов для оператора вида $I + kC_{\alpha}$, действующего в пространстве L_2, где I – тождественный оператор, C_{α} – обобщенный оператор Чезаро, k – действительный параметр. Этот оператор возникает при исследовании различных сингулярных дифференциальных уравнений прикладного характера. Результаты работы найдут применение при исследовании краевых задач для сингулярных дифференциальных уравнений, в том числе при изучении асимптотики решений.

Ключевые слова: сингулярные дифференциальные уравнения, оператор Чезаро и Харди–Литтльвуда, обратимость, правый обратный.

A.R. Abdullaev, E.V. Plekhova

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

ON INVERTIBILITY OF A LINEAR OPERATOR CONNECTED WITH SINGULAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

In this paper a representations of inverse and right inverse operators for operator of the form $I + kC_{\alpha}$ on the Lebesgue space L_2 were obtained. Here I – identity operator and C_{α} generalized Cesaro operator, k – real parameter. Such operator appears while studying various singular differential equations. The results can be used to study boundary value problems for singular differential equations, including the study of the asymptotic behavior of solutions.

Keywords: singular differential equations, operator Cesaro and Hardy–Littlewood, invertibility, right inverse.

Оператор C_0, определенный равенством

$$\left(C_0 y\right)(t)=\frac{1}{t}\int_0^t y(s)\,ds,$$

известен в литературе как оператор Чезаро [1]. В отечественных работах его называют оператором Харди–Литтльвуда (см., например, [2, с. 187]). Вместе с оператором C_0 рассмотрим оператор

$$\left(C_\alpha y\right)(t)=\frac{1}{t^{\alpha+1}}\int_0^t s^\alpha y(s)\,ds,$$

называемый обобщенным оператором Чезаро.

При исследовании сингулярных дифференциальных уравнений значительную роль играет оператор $B_k : L_2 \to L_2$, определяемый равенством

$$\left(B_k y\right)(t)=y(t)+\frac{k}{t}\int_0^t y(s)\,ds.$$

Рассмотрим некоторые примеры. Радиальное уравнение Шредингера [3] – это линейное сингулярное уравнение второго порядка вида

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{t}\frac{dx}{dt}+\omega(t)x(t)=f(t), \tag{1}$$

где $0<t<+\infty$, $k=2$, $\omega(t)=\frac{1}{t}-\frac{l(l+1)}{t^2}+2E$, l, E – физические параметры уравнения. Л. Эйлер рассматривал однородное уравнение вида (1) [4] с $k=2\beta+1$, $\omega(t)=\frac{\alpha^2}{l^2}=\mathrm{const}$, $0<t<a$, где α,β,l – параметры, в связи с задачей о колебаниях круглой мембраны.

В работе [5] найдено описание спектра оператора $C_\alpha : L_2 \to L_2$. В предлагаемой работе для действительных значений параметра k найдены явные представления обратного и правого обратного операторов $B_k : L \to L_2, B_k = I + kC_\alpha$. Удобство полученных представлений состоит в том, что они выражаются в конечном виде через обобщенный оператор Чезаро. Эти представления могут найти применение, в частности, при исследовании краевых задач для уравнения (1) с различными функциями $\omega(t)$ [6].

Пусть $L_2 = L_2[0,1]$ – пространство суммируемых с квадратом функций $x:[0,1]\to R$. Пространство L_2 будем рассматривать как гильбертово со скалярным произведением $(x, y) = \int_0^1 x(t)\, y(t)\, dt$. Это скалярное произведение согласовано с выбранной нормой пространства L_2. Всюду в работе операторы C_α и B_k будем рассматривать как действующие в пространстве L_2, т.е. $C_\alpha, B_k : L_2 \to L_2$.

Далее будем предполагать выполненным условие $\alpha > -\frac{1}{2}$, в этом случае оператор $C_\alpha : L_2 \to L_2$ является ограниченным [5].

В следующем утверждении нам потребуется понятие правого обратного оператора. Пусть X, Y – банаховы пространства и $L : X \to Y$ – линейный ограниченный сюръективный оператор с дополняемым ядром $\ker L$ [7].

Пусть $P : X \to X$ – линейный ограниченный проектор на ядро оператора L, т.е. такой оператор, что $P^2 = P$ и $R(P) = \ker L$. Пусть $K : Y \to X$ – линейный ограниченный правый обратный оператор, т.е. $LK = I$. Правый обратный $K : Y \to X$ называется согласованным с проектором P (или ассоциированным с P), если $KL = I - P = P^c$, где P^c – дополнительный проектор. При этом пишут $K = K_p$, имея в виду проектор P, с которым согласован правый обратный оператор.

Теорема 1. Справедливы утверждения:

1. Если $k > -\alpha - \frac{1}{2}$, то оператор $(I + kC_\alpha) : L_2 \to L_2$ обратим. При этом обратный оператор $(I + kC_\alpha)^{-1} : L_2 \to L_2$ имеет представление $(I + kC_\alpha)^{-1} = I - kC_{\alpha+k}$.

2. Если $k < -\alpha - \frac{1}{2}$, то оператор $(I + kC_\alpha) : L_2 \to L_2$ сюръективен и имеет одномерное ядро. При этом существует ограниченный правый обратный $(I + kC_\alpha)_p^{-1} : L_2 \to L_2$, определяемый равенством

$$(I + kC_\alpha)_p^{-1} = I + kD_{\alpha+k},$$

где $\left(D_{\alpha+k}y\right)(t)=\frac{1}{t^{\alpha+k+1}}\int_t^1 s^{\alpha+k}y(s)\,ds.$ Этот правый обратный согласован с проектором, определяемым равенством $Py=-\frac{k}{t^{\alpha+k+1}}\int_0^1 s^{\alpha}y(s)\,ds.$

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть $k>-\alpha-\frac{1}{2}$. Обратимость оператора, а именно $\left(I+kC_{\alpha}\right)$, следует из утверждения о спектре обобщенного оператора Чезаро [5]. Найдем представление обратного оператора. Для этого рассмотрим следующее уравнение относительно функции $y(\cdot)$:

$$y(t)+\frac{k}{t^{\alpha+1}}\int_0^t s^{\alpha}y(s)ds=f(t).$$

С помощью непосредственной проверки можно убедиться, что решение этого уравнения можно представить в виде

$$y(t)=f(t)-\frac{k}{t^{\alpha+k+1}}\int_0^t s^{\alpha+k}f(s)ds.$$

Следовательно, в качестве алгебраически обратного оператора можно рассматривать оператор, соответствующий правой части полученного представления, т.е. $\left(I+kC_{\alpha}\right)^{-1}=I-kC_{\alpha+k}$. Остается проверить, что оператор $C_{\alpha+k}:L_2\to L_2$ является ограниченным. Действительно, при $k>-\alpha-\frac{1}{2}$ и $\alpha>-\frac{1}{2}$ получим $\alpha+k>-\frac{1}{2}$. Это означает, что оператор $C_{\alpha+k}:L_2\to L_2$ ограничен. Утверждение 1 теоремы 1 доказано.

Докажем утверждение 2 теоремы. Пусть $k<-\alpha-\frac{1}{2}$. Тот факт, что оператор $\left(I+kC_{\alpha}\right):L_2\to L_2$ является сюръективным, доказан в работе [5]. Следовательно, существует ограниченный правый обратный $\left(I+kC_{\alpha}\right)_p^{-1}:L_2\to L_2$. Для доказательства справедливости представления правого обратного в утверждении 2 теоремы для произвольного $z\in L_2$ проверим справедливость равенства

$$\left(I+kC_{\alpha}\right)\left(I+kD_{\alpha+k}\right)z=z.$$

Имеем

$$\frac{1}{t^{\alpha+1}}\int_{0}^{t}\frac{1}{s^{k+1}}\left(\int_{s}^{1}\tau^{\alpha+k}z(\tau)\,d\tau\right)ds=$$

$$=-\frac{1}{k}\frac{1}{t^{\alpha+1}}\left[\frac{1}{t^{k}}\int_{t}^{1}s^{\alpha+k}z(s)\,ds+\int_{0}^{t}s^{\alpha}z(s)\,ds\right]=-\frac{1}{k}\left(D_{\alpha+k}z+C_{\alpha}z\right).$$

Следовательно,

$$\left(I+kC_{\alpha}\right)\left(I+kD_{\alpha+k}\right)z=$$

$$=z+kD_{\alpha+k}z+kC_{\alpha}z+k^{2}\frac{1}{t^{\alpha+k}}\int_{0}^{t}s^{\alpha}\left[\frac{1}{s^{\alpha+k+1}}\int_{s}^{1}\tau^{\alpha+k}z(\tau)d\tau\right]ds=$$

$$=z+kD_{\alpha+k}z+kC_{\alpha}z-k\left(D_{\alpha+k}z+C_{\alpha}z\right)=z.$$

Отметим, что при $k<-\alpha-\frac{1}{2}$ и $z\in L_2$ все интегралы, возникающие в приведенных преобразованиях, существуют.

Для завершения доказательства утверждения 2 остается проверить справедливость равенства $\left(I+kD_{\alpha+k}\right)\left(I+kC_{\alpha}\right)=I-P,$ где $Py=-\frac{k}{t^{\alpha+k+1}}\int_{0}^{1}s^{\alpha}y(s)\,ds.$ Это равенство проверяется непосредственно.

Теорема доказана.

При исследовании краевых задач для сингулярных дифференциальных уравнений значительный интерес представляют такие правые обратные к оператору $\left(I+kC_{\alpha}\right),$ которые согласованы с таким проектором P, что $\left\|P^{c}\right\|=1.$ В этом случае соответствующий правый обратный имеет минимальную норму [8].

Построенный в теореме 1 правый обратный имеет достаточно удобный для применения вид. Однако этот оператор не является оптимальным с точки зрения минимальности его нормы. Для этого достаточно убедиться в том, что для соответствующего проектора $\left\|P^{c}\right\|>1.$

Опишем процедуру построения правого обратного с минимальной нормой.

Пусть P_1 и P_2 – два проектора на ядро линейного сюръективного оператора L, K_1 – правый обратный, ассоциированный с проектором P_1. Докажем, что равенством $K_2 = P_2^c K_1$ определяется правый обратный, согласованный с проектором P_2.

Проверим, что оператор $P_2^c K_1$ является правым обратным, согласованным с проектором P_2. Имеем:

1) $LK_1 = LP_2^c K_1 - L\left(I - P_2\right) K_1 = LK_1 - LP_2 K_1 = LK_1 = I$;

2) $K_2 L = P_2^c K_1 L = P_2^c P_1^c = P_2^c$.

Если при этом проектор P_2 имеет единичную норму, то построенный правый обратный K_2 будет обладать минимальной нормой [8]. Реализуем предложенную процедуру и построим правый обратный с минимальной нормой.

Теорема 2. Если $k < -\alpha - \dfrac{1}{2}$, то оператор, определенный равенством

$$\left(I + kC_\alpha\right)_2^{-1} z =$$
$$= z\left(t\right) + \left(k + 2\alpha + 1\right) t^{-k-\alpha-1} \int\limits_0^1 z\left(s\right) s^{-k-\alpha-1} ds + kt^{-k-\alpha-1} \int\limits_t^1 z\left(s\right) s^{k+\alpha} ds,$$

является правым обратным к оператору $\left(I + kC_\alpha\right): L_2 \to L_2$ и имеет минимальную норму.

Доказательство. Элемент $y_0 = \sqrt{-2k - 2\alpha - 1} t^{-k-\alpha-1}$ является элементом ядра оператора $I + kC_\alpha$ и $\|y_0\| = 1$. Оператор $P_2 y = \left(y, y_0\right) y_0 =$ $= \left(-2k - 2\alpha - 1\right) t^{-k-\alpha-1} \int\limits_0^1 y\left(s\right) s^{-k-\alpha-k} ds$ является проектором с единичной нормой. Тогда оператор $P_2^c \left(I + kD_{k+\alpha}\right)$ – правый обратный с минимальной нормой.

Получим выражение для этого оператора. Для этого предварительно найдем представление оператора $P_2 D_{k+\alpha}$:

$$P_2 D_{k+\alpha} z = t^{-k-\alpha-1} \int_0^1 z(s) s^{-k-\alpha-1} ds.$$

С учетом этого получаем

$$(I + kC_\alpha)_{P_2}^{-1} z =$$

$$= z(t) + (k + 2\alpha + 1) t^{-k-\alpha-1} \int_0^1 z(s) s^{-k-\alpha-1} ds + kt^{-k-\alpha-1} \int_t^1 z(s) s^{k+\alpha} ds.$$

Теорема доказана.

В качестве примера применения теоремы рассмотрим оператор $I + kC_\alpha$, соответствующий уравнению Шредингера. В этом случае $\alpha = 0$ и $k = 2$, следовательно, оператор $I + 2C_0$ обратим, причем $(I + 2C_0)^{-1} f = f(t) - \frac{2}{t^2} \int_0^t sf(s) ds$.

Список литературы

1. Muntean I. The spectrum of the Cesaro operator // Mathematica. Revue d`analyse numerique et de theorie de l`approximation. – 1980. – Vol. 22 (15). – № 1. – P. 97–105.

2. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

3. Барабанов А.Л. Квантовая механика (конспект лекций). Часть 1. – М., 2005.

4. Симонов Н.И. Прикладные методы анализа у Эйлера. – М.: ГИТТЛ, 1957. – 168 с.

5. Абдуллаев А.Р., Плехова Э.В. О спектре оператора Чезаро // Науч.-техн. вестник Поволжья. – 2011. – № 4. – С. 33–37.

6. Сахнович Л.А. О спектре радиального уравнения Шредингера в окрестности нуля // Математический сборник. Одесса. – 1965. – № 2.

7. Абдуллаев А.Р., Бурмистрова А.Б. Элементы теории топологически нетеровых операторов. – Челябинск, 1994.

8. Абдуллаев А.Р., Брагина Н.А. Операторы Грина с минимальной нормой // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2003. – № 4. – С. 3–7.

References

1. Muntean I. The spectrum of the Cesaro operator. *Mathematica. Revue d`analyse numerique et de theorie de I`approximation*, 1980, vol. 22 (15), no. 1, pp. 97-105.

2. Krein S.G., Petunin Iu.I., Semenov E.M. Interpoliatsiia lineinykh operatorov [Interpolation of linear operators]. Moscow: Nauka, 1978. 400 p.

3. Barabanov A.L. Kvantovaia mekhanika (konspekt lektsii). Chast' 1. [Quantum mechanics (lecture notes). Part 1]. Moscow, 2005.

4. Simonov N.I. Prikladnye metody analiza u Eilera [Applied methods of analysis of Euler]. Moscow: GITTL, 1957. 168 p.

5. Abdullaev A.R., Plekhova E.V. O spektre operatora Chezaro [The spectrum of the Cesaro operator]. *Nauchno-tekhnicheskii vestnik Povolzh'ia*, 2011, vol. 4, pp. 33-37.

6. Sakhnovich L.A. O spektre radial'nogo uravneniia Shredingera v okrestnosti nulia [On the spectrum of the radial Schrödinger equation in a neighborhood of zero]. *Matematicheskii sbornik. Odessa*, 1965, vol. 2.

7. Abdullaev A.R., Burmistrova A.B. Elementy teorii topologicheski neterovykh operatorov [Elements of the theory of topological Noetherian operators]. Cheliabinsk, 1994.

8. Abdullaev A.R, Bragina N.A. Operatory Grina s minimal'noi normoi [Green operator with minimal norm]. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika*, 2003, vol. 4, pp. 3-7.

Получено 25.10.2016

Об авторах

Абдуллаев Абдула Рамазанович (Пермь, Россия) – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Высшая математика», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: h.m@pstu.ru).

Плехова Эльвира Валентиновна (Пермь, Россия) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: elvira.plekhova@mail.ru).

About the authors

Abdula R. Abdullaev (Perm, Russian Federation) – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Department Mathematics, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: h.m@pstu.ru).

Elvira V. Plekhova (Perm, Russian Federation) – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of High Mathematics, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: elvira.plekhova@mail.ru).