

УДК 537.611

**И.П. Попов**

Курганский государственный университет, Курган, Россия

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМАЛЬНОГО АНАЛОГА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ**

Показано, что классическая модель магнитного поля допускает нарушение третьего закона Ньютона, исключает взаимодействие соосных элементов проводников с токами, не предусматривает существование моментов сил, действующих на элементы проводников, при этом направление вектора напряженности поля не совпадает с направлением вектора силы, действующей на элемент проводника с током, индукция зависит от свойств среды, а напряженность – нет, дивергенция поля равна нулю, законом Ампера принято считать формулу, в общем случае не совместимую с его основным результатом, закон электромагнитной индукции является феноменологическим. Построена модель формального аналога электромагнитного поля, не имеющая указанных особенностей, в частности, формальные аналоги закона электромагнитной индукции являются простым следствием других свойств и соотношений поля, при этом построенная модель удовлетворяет основному требованию Ампера – безусловному выполнению третьего закона Ньютона.

**Ключевые слова:** псевдовектор, магнитное поле, третий закон Ньютона, соосные элементы проводников, моменты сил, напряженность, индукция, дивергенция.

**I.P. Popov**

Kurgan State University, Kurgan, Russian Federation

## **MATHEMATICAL MODELING OF THE FORMAL ANALOGY OF ELECTROMAGNETIC FIELD**

It is shown that the classical model of the magnetic field violates Newton's third law, excludes interaction elements coaxial conductors with currents, does not provide for the existence of the moments of the forces acting on the elements of the conductors, and the direction of the field vector does not coincide with the direction of the force acting on an element of the conductor with current induction depends on the properties of the medium, and the intensity – no, the divergence of the field is equal to zero, Ampere's law is considered to be a formula in the general case is incompatible with its main result, the law of electromagnetic induction is phenomenological. A model of a formal analogue of the electromagnetic field, which has no specified features, in particular, the formal analogy of the law of electromagnetic induction is a simple consequence of the other properties and relations of the field, while the constructed model satisfies the basic requirement Ampere – unconditional implementation of Newton's third law.

**Keywords:** pseudovector, magnetic field, Newton's third law, the elements of coaxial conductors, the moments of forces, tension, induction, divergence.

## Введение

В существующей модели магнитного поля силы взаимодействия между замкнутыми контурами с токами удовлетворяют третьему закону Ньютона (ТЗН). Однако эти силы являются результатом сложения элементарных сил, действующих между малыми элементами проводников с токами, для которых ТЗН может нарушаться [1–3]. На рис. 1 представлен предельный случай такого нарушения.

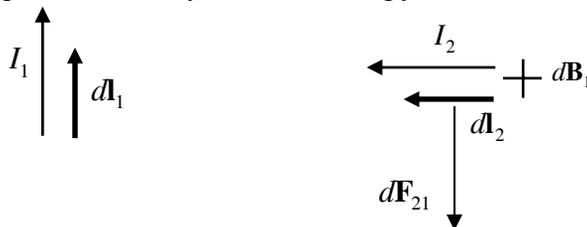


Рис. 1. Нарушение ТЗН

Первый элемент проводника  $d\mathbf{l}_1$  с током  $I_1$  действует на второй с силой

$$d\mathbf{F}_{21} = I_2 [d\mathbf{l}_2, d\mathbf{B}_1] = \frac{\mu_0 \mu I_1 I_2}{4\pi r^3} [d\mathbf{l}_2, [d\mathbf{l}_1, \mathbf{r}]], \quad (1)$$

где  $d\mathbf{B}_1$  – магнитная индукция;  $\mu_0 \mu$  – магнитная проницаемость;  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор.

Эта сила имеет максимальное значение, поскольку все перемножаемые векторы взаимно перпендикулярны. В то же время второй элемент действует на первый с силой

$$d\mathbf{F}_{12} = I_1 [d\mathbf{l}_1, d\mathbf{B}_2] = \frac{\mu_0 \mu I_1 I_2}{4\pi r^3} [d\mathbf{l}_1, [d\mathbf{l}_2, \mathbf{r}]] = 0,$$

так как  $d\mathbf{l}_2$  и  $\mathbf{r}$  коаксиальны.

Модель магнитного поля имеет ряд других противоречий, которые будут показаны ниже.

Целью настоящей работы является не исправление существующей теории электромагнитного поля, а построение в  $\mathbb{R}^3$  модели формального аналога электромагнитного поля, с одной стороны, максимально похожей на электромагнитное поле, с другой – не вступающей в противоречие с ТЗН – одним из основных законов механики – и сво-

бодной от других противоречий модели электромагнитного поля. На невозможность нарушения ТЗН при взаимодействии проводников с токами указывал Ампер [4].

Далее величины формального аналога электромагнитного поля для отличия их от соответствующих величин электромагнитного поля обозначаются другим шрифтом:  $q, I, B, H, D, E, F \rightarrow q, I, B, H, D, E, F$ .

В качестве одной из предпосылок дальнейшего рассмотрения может быть рассмотрена измененная конфигурация вышеприведенного примера, в которой второй проводник расположен параллельно первому, при этом они перпендикулярны соединяющему их радиус-вектору так, что силы взаимодействия лежат на одной прямой. ТЗН в этом случае не нарушается. При этом

$$dF = -\frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I_1 dl_1 I_2 dl_2}{r^2}. \quad (2)$$

### **1. Первый признак формального аналога электромагнитного поля, совпадающий с соответствующим признаком магнитного поля**

Этот признак состоит в том, что если элементы формальных аналогов токов  $I_1 d\mathbf{l}_1$  и  $I_2 d\mathbf{l}_2$  лежат в одной плоскости  $S$  и перпендикулярны соединяющему их радиус-вектору  $\mathbf{r}$ , то так же, как и в выражении (2), они взаимодействуют с силой

$$dF_{12} = -dF_{21} = -m \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \cdot I_2 d\mathbf{l}_2}{4\pi r^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r},$$

$$dF = -m \frac{(I_1 dl_1)_n^S (I_2 dl_2)_n^S}{4\pi r^2}.$$

Здесь  $m$  – формальный аналог магнитной проницаемости.

Если  $S_1$  и  $S_2$  – плоскости, образованные соответственно парами векторов  $I_1 d\mathbf{l}_1$ ,  $\mathbf{r}$  и  $I_2 d\mathbf{l}_2$ ,  $\mathbf{r}$ , и  $\alpha$  – угол между  $S_1$  и  $S_2$ , то

$$dF = -m \frac{(I_1 dl_1)_n^{S_1} (I_2 dl_2)_n^{S_2}}{4\pi r^2} \cos \alpha. \quad (3)$$

## 2. Второе противоречие модели магнитного поля

Несмотря на то что Ампер считал, что силы взаимодействия соосных токов существуют (этот вывод он сделал в том числе и на основании собственных многочисленных экспериментов), в классической модели магнитного поля соосные проводники с токами не взаимодействуют.

Из того обстоятельства, что сила взаимодействия элементов проводников с токами является градиентом энергии магнитного поля, созданного этими элементами, следует, что между элементами со стабилизированными токами существует сила взаимодействия, если при изменении расстояния между ними энергия результирующего поля, созданного элементами, изменяется. Впредь, для того чтобы не усложнять рассуждения учетом влияния электромагнитной индукции, имеет-ся в виду, что рассматриваемые токи являются стабилизированными.

Если соосные проводники с токами не взаимодействуют, то для них должно выполняться тождество

$$\int_{\infty}^0 F dr = A = W_0 - W_{\infty} \equiv 0,$$

где  $A$  – работа;  $W$  – энергия суммарного поля обоих проводников.

Это легко проверить.

При условии  $d\mathbf{l}_1 = d\mathbf{l}_2 = d\mathbf{l}$ ,  $I_1 = -I_2$  и  $r = \infty$

$$W_{\infty} = 2\mu_0\mu \int_V \frac{H^2}{2} dV \neq 0,$$

где  $H$  – напряженность поля одного проводника.

При  $r = 0$   $W_0 = 0$  и  $W_0 - W_{\infty} \neq 0$ . Это означает, что соосные проводники с токами взаимодействуют с силой

$$F = \frac{dW}{dr}. \quad (4)$$

В связи с этим возникает необходимость выяснить, в какой мере эксперименты, выполненные Био и Саваром, исключают возможность существования этой силы.

Данные эксперименты, по существу, не являлись опытами по определению напряженности магнитного поля. Это и не были экспери-

менты по определению взаимодействия линейных проводников с током. Они задумывались и осуществлялись для определения силы взаимодействия проводников и постоянного магнита. Не случайно в формулу входила магнитная масса  $m$  ( $F = mIdl\sin\phi/r^2$  [5]). Поскольку же действие магнита определяется действием круговых токов, которые можно условно заменить одним эквивалентным круговым током, то эксперименты, по существу, показывали, как отрезок линейного проводника взаимодействует с круговым током.

Пусть магнит располагается на оси линейного проводника (но не на самом проводнике) так, чтобы ось совпадала с плоскостью кругового тока магнита. Круговой ток можно представить в виде двух токов, направленных в противоположные стороны и соосных линейному проводнику. Один из этих токов в соответствии с формулой (4) притягивается к линейному проводнику, а второй с такой же по величине силой отталкивается от него, и суммарное осевое усилие равно нулю. По этой причине эксперименты Био и Савара не смогли выявить силу взаимодействия соосных проводников и, следовательно, не дают никаких оснований ее запретить.

Таким образом, вторым противоречием классической модели магнитного поля является противоречие с методом определения силы как градиента энергии, т.е. отсутствие учета силового взаимодействия между соосными составляющими элементов проводников с токами.

Модель квазиэлектромагнитного поля свободна от указанного противоречия.

*Замечание.* Нетрудно убедиться, что ТЗН нарушается тогда, когда векторы  $d\mathbf{l}$  имеют продольные составляющие, коаксиальные радиус-вектору. Из этого следует вывод: если исходить из того, что ТЗН нарушаться не может в силу своей всеобщности (по крайней мере в условиях магнитостатики), значит при классическом расчете из-за двойного векторного произведения (1) теряются силы взаимодействия продольных проводников или их составляющих. На существование этих сил указывал Ампер, и их наличие обосновано выше.

Поскольку расчет сил методом двойного векторного произведения корректен лишь в случае, когда перемножаемые векторы ортогональны, следует прибегать к более универсальному методу определения сил как градиента энергии [см. формулу (4)].

### 3. Второй признак формального аналога электромагнитного поля, не совпадающий с соответствующим противоречивым признаком магнитного поля

Этот признак заключается в том, что соосные элементы формальных аналогов токов  $I_1 d\mathbf{l}_1$  и  $I_2 d\mathbf{l}_2$  взаимодействуют с силой

$$d\mathbf{F}_{12} = -d\mathbf{F}_{21} = -k_\tau m \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \cdot I_2 d\mathbf{l}_2}{4\pi r^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r},$$

$$dF = -k_\tau m \frac{(I_1 dl_1)_\tau (I_2 dl_2)_\tau}{4\pi r^2}, \quad (5)$$

где  $k_\tau$  – некоторый безразмерный коэффициент, величина которого будет установлена ниже. В классической модели магнитного взаимодействия эта сила считается равной нулю.

### 4. Общий случай взаимного расположения элементов формальных аналогов токов

В общем случае взаимодействующие элементы формальных аналогов токов  $I_1 d\mathbf{l}_1$  и  $I_2 d\mathbf{l}_2$  расположены под углом  $\gamma$  относительно друг друга и составляют с соединяющим их радиус-вектором  $\mathbf{r}$  углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . В соответствии с теоремой косинусов для сторон сферического треугольника [6] можно показать:

$$\cos\gamma = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\alpha + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2. \quad (6)$$

Векторы  $I_1 d\mathbf{l}_1$  и  $I_2 d\mathbf{l}_2$  можно разложить на поперечные  $(I_1 dl_1)_n^{S1}$ ,  $(I_2 dl_2)_n^{S2}$  и продольные  $(I_1 dl_1)_\tau$ ,  $(I_2 dl_2)_\tau$  составляющие относительно радиус-вектора. В соответствии с выражениями (3), (5) и (6) суммарная сила взаимодействия элементов формальных аналогов токов  $I_1 d\mathbf{l}_1$  и  $I_2 d\mathbf{l}_2$  равна

$$dF = -m \frac{(I_1 dl_1)_n^{S1} (I_2 dl_2)_n^{S2}}{4\pi r^2} \cos\alpha - k_\tau m \frac{(I_1 dl_1)_\tau (I_2 dl_2)_\tau}{4\pi r^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= -m \frac{(I_1 dl_1 \sin \varphi_1)(I_2 dl_2 \sin \varphi_2)}{4\pi r^2} \cos \alpha - k_\tau m \frac{(I_1 dl_1 \cos \varphi_1)(I_2 dl_2 \cos \varphi_2)}{4\pi r^2} = \\
&= -m \frac{I_1 dl_1 I_2 dl_2}{4\pi r^2} (\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \alpha + k_\tau \cos \varphi_1 \cos \varphi_2) = \\
&= -m \frac{I_1 dl_1 I_2 dl_2}{4\pi r^2} [\cos \gamma + (k_\tau - 1) \cos \varphi_1 \cos \varphi_2]. \quad (7)
\end{aligned}$$

Суммарная сила взаимодействия  $d\mathbf{F}$  направлена вдоль  $\mathbf{r}$ .

Выражение (7) совпадает с основной формулой Ампера применительно к магнитному взаимодействию. По-видимому, является недоразумением считать законом Ампера выражение (1), которое в общем случае не совместимо с его основным результатом.

При этом Ампер полагал, что  $k_\tau = -0,5$ . Однако эта величина нуждается в уточнении. Для ее определения потребуется прояснить ситуацию с моментами.

### 5. Моменты сил в классическом магнитном поле и заимствование результатов для формального аналога электромагнитного поля

Если в системе из  $n$  контуров с токами какой-то контур под действием поля повернется на угол  $d\varphi$ , то энергия магнитного поля изменится на величину  $dW_M$  и совершится механическая работа  $Md\varphi$ , где  $M$  – момент, действующий по направлению  $d\varphi$  [7]. Для  $k$ -го контура уравнение по второму закону Кирхгофа следующее:

$$i_k R_k + d\Psi_k / dt = e_k.$$

При умножении уравнения на  $i_k dt$  получается

$$i_k^2 R_k dt + i_k d\Psi_k = e_k i_k dt.$$

Для всей совокупности контуров

$$\sum_{k=1}^n i_k^2 R_k dt + \sum_{k=1}^n i_k d\Psi_k = \sum_{k=1}^n e_k i_k dt$$

или

$$\sum_{k=1}^n i_k d\Psi_k = \sum_{k=1}^n e_k i_k dt - \sum_{k=1}^n i_k^2 R_k dt.$$

Это энергия, полученная от источников электродвижущей силы за вычетом тепла. В соответствии с законом сохранения энергии получим

$$\sum_{k=1}^n i_k d\Psi_k = Md\varphi + dW_M,$$

$$M = \frac{\sum_{k=1}^n i_k d\Psi_k - dW_M}{d\varphi}. \quad (8)$$

В частном случае, если при повороте контура на угол  $d\varphi$  токи во всех контурах меняются таким образом, чтобы потокосцепления оставались неизменными, т.е.  $d\Psi_k = 0$ ,  $M = -dW_M/d\varphi$ .

Представляет интерес другой частный случай со стабилизированными токами ( $i_k = \text{const}$ ), для которых

$$W_M = \frac{1}{2} \sum i_k \Psi_k,$$

$$dW_M = \frac{1}{2} d \sum i_k \Psi_k = \frac{1}{2} \sum i_k d\Psi_k.$$

При подстановке в выражение (8)

$$M = \frac{\sum_{k=1}^n i_k d\Psi_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n i_k d\Psi_k}{d\varphi} = \frac{dW_M}{d\varphi}.$$

Таким образом, получены следующие результаты:

1. В обоих рассмотренных частных случаях приращение энергии магнитного поля  $dW_M$  равно механической работе  $Md\varphi$ .

2. В первом частном случае работа совершается за счет изменения энергии поля.

3. Во втором частном случае и работа, и изменение энергии осуществляются за счет энергии внешних источников.

4. На объекты ( $Idl$ ), испытывающие воздействие со стороны магнитного поля, действуют моменты, если энергия совокупного магнитного поля является функцией углов (одной из сторон которых является  $d\mathcal{L}$ ).

5. Для определения моментов нужно аналитические выражения для энергии магнитного поля продифференцировать по углам, функции которых входят в состав этих выражений.

6. В первом частном случае поле стремится повернуть взаимодействующий с ним объект таким образом, чтобы энергия поля убывала.

7. В случае стабилизированных токов поле стремится повернуть взаимодействующий с ним объект таким образом, чтобы энергия поля возрастала.

8. Для описания формального аналога электромагнитного поля заимствуются результаты, описанные в п. 4, 5, 7 вышеприведенного перечня, а именно:

8.1. На элементы формальных аналогов токов  $I d\mathbf{l}$ , испытывающие воздействие со стороны поля, действуют моменты, если энергия совокупного поля является функцией углов (одной из сторон которых является  $I d\mathbf{l}$ ).

8.2. Для определения моментов нужно аналитические выражения для энергии формального аналога электромагнитного поля продифференцировать по углам, функции которых входят в состав этих выражений.

8.3. В случае стабилизированных формальных аналогов токов поле стремится повернуть взаимодействующий с ним элемент  $I d\mathbf{l}$  таким образом, чтобы энергия поля возрастала.

## 6. Уточнение величины $k_\tau$

В соответствии с выражением (7) энергия формального аналога электромагнитного поля равна

$$W = \int \mathbf{F} d\mathbf{r} = m \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 I_2 d\mathbf{l}_2}{4\pi r} [\cos \gamma + (k_\tau - 1) \cos \varphi_1 \cos \varphi_2] + C. \quad (9)$$

Для наглядности можно допустить, что  $\alpha = 0$ , а углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  острые, равны между собой и расположены по одну сторону от радиус-вектора.

Пусть  $k_\tau > 1$ . В соответствии с п. 8.3 поле стремится повернуть элементы таким образом, чтобы энергия поля возросла. Это значит, что моменты  $M_{12}$  и  $M_{21}$  направлены в одну сторону, в сторону уменьше-

ния  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , и принцип противодействия нарушается. Таким образом, предположение  $k_\tau > 1$  неверно.

Пусть  $k_\tau > 1$ . Моменты  $M_{12}$  и  $M_{21}$  тоже направлены в одну сторону, в сторону увеличения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , и принцип противодействия снова нарушается. Таким образом, предположение  $k_\tau > 1$  тоже неверно.

Единственным непротиворечивым значением  $k_\tau$  является  $k_\tau > 1$ . Несмотря на то что Ампер применительно к классическому магнитному полю получил другое значение ( $k_\tau = -0,5$ ), он сделал правильный вывод: *система стремится уменьшить угол  $\gamma$ , т.е. элементы стремятся повернуться так, чтобы стать параллельными друг другу.*

Этот вывод распространяется на формальный аналог электромагнитного поля.

При этом выполняется аналог третьего закона Ньютона для моментов

$$d\mathbf{M}_{12} = -d\mathbf{M}_{21}.$$

### 7. Энергия, силы и моменты для формального аналога электромагнитного поля

Из уравнения (9) с учетом того, что  $k_\tau > 1$ , получим

$$W = m \frac{I_1 dl_1 I_2 dl_2}{4\pi r} \cos \gamma + C = m \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \cdot I_2 d\mathbf{l}_2}{4\pi r} + C. \quad (10)$$

$$dF_{12} = -dF_{21} = \frac{\partial W}{\partial r} = -m \frac{I_1 dl_1 I_2 dl_2}{4\pi r^2} \cos \gamma.$$

Для параллельных (антипараллельных) элементов формальных аналогов тока  $I d\mathbf{l}$  сила взаимодействия не зависит от углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , в частности, соосные элементы притягиваются (отталкиваются) с такой же силой, как и перпендикулярные соединяющему их радиус-вектору (при одинаковом расстоянии между ними). Это также следует из выражений (3) и (5) с учетом того, что  $k_\tau > 1$ .

Векторная форма записи следующая:

$$d\mathbf{F}_{12} = -d\mathbf{F}_{21} = -\frac{m I_1 I_2}{4\pi r^3} (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2) \mathbf{r}_{12}. \quad (11)$$

Другими словами, ТЗН для формального аналога электромагнитного поля выполняется при любом взаимном расположении элементов формальных аналогов тока  $I d\mathbf{l}$ .

В соответствии с формулой (6)

$$dF = -m \frac{(I_1 dl_1 \sin \varphi_1)(I_2 dl_2 \sin \varphi_2)}{4\pi r^2} \cos \alpha - m \frac{(I_1 dl_1 \cos \varphi_1)(I_2 dl_2 \cos \varphi_2)}{4\pi r^2}.$$

Первое слагаемое является силой взаимодействия между поперечными составляющими элементов, второе слагаемое – силой взаимодействия между продольными составляющими.

Для частного случая, соответствующего выражению (3) ( $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2, \alpha = 0$ ),

$$dF_n = -m \frac{I_1 dl_1 I_2 dl_2}{4\pi r^2}.$$

Для другого частного случая, соответствующего выражению (5) ( $\varphi_1 = \varphi_2 = \alpha = 0$ ),

$$dF_\tau = -m \frac{I_1 dl_1 I_2 dl_2}{4\pi r^2}.$$

Для этих двух частных случаев  $dF_n = dF_\tau$ .

В соответствии с п. 8.1 и 8.2 на элементы формальных аналогов тока  $I d\mathbf{l}$  действуют моменты

$$dM_{12} = -dM_{21} = \frac{\partial W}{\partial \beta} = -m \frac{I_1 dl_1 I_2 dl_2}{4\pi r} \sin \gamma,$$

$$d\mathbf{M}_{12} = -d\mathbf{M}_{21} = -\frac{m I_1 I_2}{4\pi r} [d\mathbf{l}_1, d\mathbf{l}_2]. \quad (12)$$

Другими словами, аналог ТЗН для моментов для формального аналога электромагнитного поля выполняется при любом взаимном расположении элементов формальных аналогов тока  $I d\mathbf{l}$ .

$$dM_{\varphi_1} = \frac{\partial W}{\partial \varphi_1} = m \frac{I_1 dl_1 I_2 dl_2}{4\pi r} (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \alpha - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2),$$

$$dM_{\varphi_2} = \frac{\partial W}{\partial \varphi_2} = m \frac{I_1 dl_1 I_2 dl_2}{4\pi r} (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \alpha - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2),$$

$$dM_\alpha = \frac{\partial W}{\partial \alpha} = -m \frac{I_1 dl_1 I_2 dl_2}{4\pi r} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \alpha,$$

$$dM = dF r \operatorname{tg} \gamma,$$

$$dM_\alpha = dF_n r \operatorname{tg} \alpha,$$

$$dM_{\varphi_1} = dF_\tau r \operatorname{tg} \varphi_1 - dF_n r \operatorname{ctg} \varphi_1,$$

$$dM_{\varphi_2} = dF_\tau r \operatorname{tg} \varphi_2 - dF_n r \operatorname{ctg} \varphi_2.$$

### 8. Напряженность для формального аналога электромагнитного поля. Подразумеваемые (мнимые) векторы. Комбинированные векторы

Силу классического магнитного взаимодействия принято представлять в виде произведения двух векторов  $d\mathbf{F}_{21} = [I_2 d\mathbf{l}_2, d\mathbf{B}_1]$ . Здесь

индукция  $d\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi r^3} [I_1 d\mathbf{l}_1, \mathbf{r}]$ . При этом  $I_1 d\mathbf{l}_1$  и  $\mathbf{r}$  связаны между собой векторной операцией.

Для единообразия формальный аналог силы магнитного взаимодействия (11) также можно представить в виде произведения напряженности на величину  $I_2 d\mathbf{l}_2$ . При этом напряженность очевидным образом и по аналогии с классическим аналогом должна включать в себя векторы  $I_1 d\mathbf{l}_1$  и  $\mathbf{r}$ . Вместе с тем вектор  $I_1 d\mathbf{l}_1$  не должен быть связан с вектором  $\mathbf{r}$  векторной операцией (как в классическом аналоге), поскольку в (11) он (вектор  $I_1 d\mathbf{l}_1$ ) уже связан с  $I_2 d\mathbf{l}_2$  операцией скалярного произведения.

Для выполнения указанных условий существующих средств векторной алгебры недостаточно. В этой связи вводятся в рассмотрение *подразумеваемые (мнимые) векторы* или *псевдовекторы*, а также *комбинированные векторы*.

*Псевдовектор* – это скаляр, в котором содержится информация о *включенном* в него векторе.

Обозначение псевдовектора:

$$\{\mathbf{p}\} = \{\mathbf{i}p_x + \mathbf{j}p_y + \mathbf{k}p_z\}, \quad \{\mathbf{p}\} = p.$$

*Комбинированный вектор* – это произведение вектора и псевдовектора.

Обозначение комбинированного вектора:

$$\mathbf{b}_u^{\{p\}} = b \left\{ \frac{\mathbf{p}}{p} \right\} \frac{\mathbf{u}}{u}.$$

Нижний индекс содержит информацию о направлении вектора, верхний индекс – о направлении псевдовектора.

С учетом введенных понятий напряженность для формального аналога электромагнитного поля можно представить в виде

$$\begin{aligned} |d\mathbf{H}_r^{\{I\mathbf{d}\}}| &= m \frac{I dl}{4\pi r^2}, \\ d\mathbf{H}_r^{\{I\mathbf{d}\}} &= -m \frac{I dl}{4\pi r^2} \left\{ \frac{I d\mathbf{l}}{I dl} \right\} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{m}{4\pi r^3} \{I d\mathbf{l}\} \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (13)$$

*Величина напряженности для формального аналога электромагнитного поля, созданного элементом формального аналога тока  $I d\mathbf{l}$ , не зависит от угла между радиус-вектором  $\mathbf{r}$  и  $I d\mathbf{l}$ .*

### 9. Третье и четвертое противоречия классической модели магнитного поля

В описаниях силовых полей, созданных ранее классической модели магнитного поля, – гравитационного и электростатического – напряженность определяется как сила, действующая на единичный объект, порождающий поле. Соответственно этому, направление вектора напряженности естественным образом совпадает с направлением вектора силы. В классической модели магнитного поля вектор напряженности ортогонален вектору силы. В модели формального аналога электромагнитного поля это противоречие устранено.

У гравитационного и электростатического полей напряженность зависит от свойств среды. При этом в описании электростатического поля индукция от свойств среды не зависит. В классической модели магнитного поля все наоборот. В этом заключается его четвертое противоречие с традиционной моделью поля. Нет причины переносить это противоречие на модель формального аналога электромагнитного поля.

## 10. Индукция и потенциал для формального аналога электромагнитного поля

Индукция для формального аналога электромагнитного поля определяется по формуле

$$d\mathbf{B}_r^{(I/dl)} = -\frac{I dl}{4\pi r^2} \left\{ \frac{I d\mathbf{l}}{I dl} \right\} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{1}{4\pi r^3} \{I d\mathbf{l}\} \mathbf{r}, \quad (14)$$

$$\mathbf{H} = m\mathbf{B}.$$

Формальный аналог электромагнитного поля имеет радиальный характер, следовательно, оно является потенциальным. При  $dl \rightarrow 0$  эквипотенциальными поверхностями являются сферы. Для такого поля в соответствии с [7]

$$d\mathbf{H}_r^{(I/dl)} = \text{grad}\varphi,$$

где  $\varphi$  – потенциал поля.

Если выбрать систему координат таким образом, чтобы ось абсцисс совпала с радиус-вектором, то

$$d\mathbf{H}_r^{(I/dl)} = -\frac{m}{4\pi r^2} \{I d\mathbf{l}\} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{m}{4\pi r^2} \{I d\mathbf{l}\} \mathbf{i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i},$$

$$\varphi = \frac{m}{4\pi x} \{I d\mathbf{l}\} + C_\varphi = \frac{m}{4\pi r} \{I d\mathbf{l}\} + C_\varphi.$$

## 11. Свойства мнимых и комбинированных векторов и операции с ними

1.  $|\mathbf{e}_u^{\{p\}}| = e.$

2.  $\mathbf{u}_u^{\{p\}} = \mathbf{u}^{\{p\}} = \mathbf{u} \left\{ \frac{\mathbf{p}}{p} \right\}, \quad \mathbf{p}_u^{\{p\}} = \{p\} \frac{\mathbf{u}}{u}.$

3.  $e\{p\} = \{ep\}.$

4. При взаимодействии мнимых векторов на них распространяются все правила операций с векторами.

5. Мнимый вектор и вектор взаимодействуют между собой как скаляр и вектор.

6. При взаимодействии комбинированных векторов между собой могут использоваться двойные записи операций: « $\{\cdot\} \cdot$ », « $\{\cdot\} \times$ »,

« $\{\times\} \cdot$ », « $\{\times\} \times$ », « $\{+\} +$ », « $\{\times\} +$ », « $\{+\} \times$ », « $\{\cdot\} +$ », « $\{+\} \cdot$ ». Операция в скобках связывает мнимые векторы. Вторая операция связывает векторы. При перемножении псевдовектора и комбинированного вектора нет необходимости размещать знак произведения в скобках. Очевидно, что знак произведения « $\cdot$ » или « $\times$ » в этом случае распространяется на псевдовекторные составляющие.

7. При необходимости скобки раскрываются применением двойных скобок. Например,  $\{e\{\mathbf{p}\}\} = e\mathbf{p}$ .

8. В присутствии вектора  $\mathbf{u}$  скобка раскрываться не может. Исключение составляет случай, когда выражение, стоящее в скобке, является скаляром (например, в результате скалярного произведения векторов).

$$\begin{aligned} 9. \mathbf{p}_u^{\{p\}} \{\cdot\} + \mathbf{q}_v^{\{q\}} &= \{\mathbf{p}\} \frac{\mathbf{u}}{u} \{\cdot\} + \{\mathbf{q}\} \frac{\mathbf{v}}{v} = \\ &= \{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}\} \left( \frac{\mathbf{u}}{u} + \frac{\mathbf{v}}{v} \right) = pq \cos(p, q) \left( \frac{\mathbf{u}}{u} + \frac{\mathbf{v}}{v} \right). \end{aligned}$$

10. В отсутствии вектора  $\mathbf{u}$  скобка не раскрывается, если другая часть равенства является скалярной величиной.

$$11. \mathbf{e}_u^{\{p\}} + \mathbf{b}_v^{\{p\}} = e \left\{ \frac{\mathbf{p}}{p} \right\} \frac{\mathbf{u}}{u} + b \left\{ \frac{\mathbf{p}}{p} \right\} \frac{\mathbf{v}}{v} = \left\{ \frac{\mathbf{p}}{p} \right\} \left( e \frac{\mathbf{u}}{u} + b \frac{\mathbf{v}}{v} \right) = \left\{ \frac{\mathbf{p}}{p} \right\} \mathbf{c} = \mathbf{c}^{\{p\}}.$$

$$\begin{aligned} 12. \mathbf{e}_u^{\{p\}} + \mathbf{b}_u^{\{q\}} &= e \left\{ \frac{\mathbf{p}}{p} \right\} \frac{\mathbf{u}}{u} + b \left\{ \frac{\mathbf{q}}{q} \right\} \frac{\mathbf{u}}{u} = \frac{\mathbf{u}}{u} \left\{ e \frac{\mathbf{p}}{p} + b \frac{\mathbf{q}}{q} \right\} = \\ &= \frac{\mathbf{u}}{u} \{\mathbf{c}\} = c \left\{ \frac{\mathbf{c}}{c} \right\} \frac{\mathbf{u}}{u} = \mathbf{c}_u^{\{c\}}. \end{aligned}$$

$$12.1. \mathbf{e}^{\{p\}} + \mathbf{e}^{\{q\}} = \mathbf{e} \left\{ \frac{\mathbf{p}}{p} \right\} + \mathbf{e} \left\{ \frac{\mathbf{q}}{q} \right\} = \mathbf{e} \left\{ \frac{\mathbf{p} + \mathbf{q}}{p + q} \right\} = \mathbf{e}\{\mathbf{r}\} = \mathbf{e}^{\{r\}}.$$

$$12.2. \{\mathbf{p}\} + \{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{q}\} + \{\mathbf{p}\} = \{\mathbf{p} + \mathbf{q}\}.$$

$$13. \mathbf{e}_u^{\{p\}} \cdot b^{\{q\}} = e \left\{ \frac{\mathbf{p}}{p} \right\} \frac{\mathbf{u}}{u} \cdot b \left\{ \frac{\mathbf{q}}{q} \right\} = eb \left\{ \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{p \cdot q} \right\} \frac{\mathbf{u}}{u} = eb \left( \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{p \cdot q} \right) \frac{\mathbf{u}}{u} = c \frac{\mathbf{u}}{u} = \mathbf{c}_u.$$

$$13.1. \{\mathbf{p}\} \cdot \{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}\} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}.$$

$$14. \mathbf{e}_u^{\{p\}} \times b^{\{q\}} = e \left\{ \frac{\mathbf{p}}{p} \right\} \frac{\mathbf{u}}{u} \times b \left\{ \frac{\mathbf{q}}{q} \right\} = eb \left\{ \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{q}}{p \cdot q} \right\} \frac{\mathbf{u}}{u} = \mathbf{c}_u^{\{r\}}.$$

$$14.1. \{\mathbf{p}\} \times \{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{p} \times \mathbf{q}\}.$$

$$14.2. \mathbf{e}_u^{(p)} \times b^{(p)} = 0.$$

$$15. \{\nabla\} e = \left\{ \mathbf{i} \frac{\partial e}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial e}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial e}{\partial z} \right\}.$$

$$16. \{\nabla\} \cdot \{\mathbf{p}\} = \left\{ \frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z} \right\} = \frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{p}.$$

$$17. \{\nabla\} \times \{\mathbf{p}\} = \{\nabla \times \mathbf{p}\}.$$

## 12. Связь между величинами формального аналога электромагнитного поля

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_{12} &= d\mathbf{H}_r^{(I_1 d\mathbf{l}_1)} \cdot \{I_2 d\mathbf{l}_2\} = -\frac{m}{4\pi r^3} \{I_1 d\mathbf{l}_1\} \mathbf{r} \cdot \{I_2 d\mathbf{l}_2\} = \\ &= -m \frac{\{I_1 d\mathbf{l}_1 \cdot I_2 d\mathbf{l}_2\}}{4\pi r^3} \mathbf{r} = -m \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \cdot I_2 d\mathbf{l}_2}{4\pi r^3} \mathbf{r}_{12}, \end{aligned} \quad (15)$$

что совпадает с формулой (11). Полученное выражение существенно отличается от формулы (1), которую принято называть законом Ампера.

$$\begin{aligned} d\mathbf{M}_{12} &= \left\{ d\mathbf{H}_r^{(I_1 d\mathbf{l}_1)} \{\times\} \cdot \{I_2 d\mathbf{l}_2\} \mathbf{r} \right\} = \left\{ -\frac{m}{4\pi r^3} \{I_1 d\mathbf{l}_1\} \mathbf{r} \{\times\} \cdot \{I_2 d\mathbf{l}_2\} \mathbf{r} \right\} = \\ &= -\left\{ \frac{m \{I_1 d\mathbf{l}_1 \times I_2 d\mathbf{l}_2\}}{4\pi r^3} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \right\} = -\frac{m I_1 I_2}{4\pi r} [d\mathbf{l}_1, d\mathbf{l}_2], \end{aligned} \quad (16)$$

что совпадает с выражением (12).

$$W = \varphi \cdot \{I_2 d\mathbf{l}_2\} = \frac{m}{4\pi r} \{I_1 d\mathbf{l}_1\} \cdot \{I_2 d\mathbf{l}_2\} + C = m \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \cdot I_2 d\mathbf{l}_2}{4\pi r} + C,$$

что совпадает с выражением (10).

## 13. Теорема Гаусса для формального аналога электромагнитного поля

Поскольку формальный аналог электромагнитного поля имеет радиальный характер, для него выполняется теорема Гаусса:

$$\oint_S \mathbf{B}_r^{\left\{ \sum I_{\Delta} + \sum I_{cm \Delta} \right\}} \cdot ds = \left\{ \sum I_{\Delta} + \sum I_{cm \Delta} \right\},$$

где  $S$  – площадь замкнутой поверхности, ограничивающей некоторый объем;  $I_{\text{см}}$  – формальный аналог тока смещения.

В дифференциальной форме

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_r \left\{ \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right\} = \nabla \cdot \mathbf{B}_r \left\{ \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right\} = \left\{ \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right\}, \quad (17)$$

где  $\mathbf{j}$  – формальный аналог плотности тока;  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  – формальный аналог плотности тока смещения;  $\mathbf{D}$  – формальный аналог электрического смещения или электрической индукции.

Скобки могут быть раскрыты двойными скобками (см. п. 7, разд. 11):

$$\left\{ \operatorname{div} \mathbf{B}_r \left\{ \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right\} \right\} = \left\{ \left\{ \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right\} \right\} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Еще одним противоречием классической модели магнитного поля является равенство нулю его дивергенции.

Непрекращающиеся попытки отыскания в рамках классической теории магнитного заряда и магнитного монополя равносильны попыткам опровержения известного математического тождества

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} \equiv 0.$$

В то же время элемент  $l d\mathbf{l}$  удовлетворяет представлениям о магнитном заряде. Соответственно, абстрактное поле (13), (14), им порожденное, удовлетворяет представлениям о магнитном монополе.

#### 14. Деление векторов

Для дальнейшего рассмотрения требуется определить операции деления вектора на вектор.

*Скалярное деление двух векторов* можно определить так: частное  $\mathbf{e}/\mathbf{b}$  от скалярного деления вектора  $\mathbf{e}$  на вектор  $\mathbf{b}$  есть скаляр:

$$p = \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{b}} = \mathbf{e} \cdot \frac{1}{\mathbf{b}} = \mathbf{e} \cdot \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} = \frac{1}{b^2} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{b}) = \frac{c}{b^2} = \frac{e}{b} \cos \theta, \quad (18)$$

где  $\theta$  – угол между векторами  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{b}$ .

При этом

$$\frac{\mathbf{e} \mathbf{b}}{\mathbf{b} \mathbf{e}} = \cos^2 \theta.$$

Векторное деление двух векторов можно определить следующим образом: частное  $\mathbf{e} \div \mathbf{b}$  от векторного деления вектора  $\mathbf{e}$  на вектор  $\mathbf{b}$  есть вектор:

$$\mathbf{q} = \mathbf{e} \div \mathbf{b} = \mathbf{e} \times \frac{1}{\mathbf{b}} = \mathbf{e} \times \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} = \frac{1}{b^2} (\mathbf{e} \times \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{d}}{b^2} = \frac{e}{b} \frac{\mathbf{d}}{d} \sin \theta. \quad (19)$$

При этом

$$(\mathbf{e} \div \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} \div \mathbf{e}) = -\sin^2 \theta, \quad \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{b}} \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{e}} - (\mathbf{e} \div \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} \div \mathbf{e}) = 1, \quad p^2 + \mathbf{q}^2 = \frac{e^2}{b^2}.$$

Теоремы о полном делении векторов:

1. Если известны частные от скалярного  $p$  и векторного  $\mathbf{q}$  деления двух векторов  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{b}$ , а также делитель  $\mathbf{b}$ , то делимое определяется как

$$\mathbf{e} = \mathbf{b}p + \mathbf{b} \times \mathbf{q}.$$

Доказательство:

$$\mathbf{b}p + \mathbf{b} \times \mathbf{q} = \frac{1}{b^2} [\mathbf{b}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{b})] = \frac{1}{b^2} [\mathbf{b}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{e}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})] = \mathbf{e}.$$

2. Если известны частные от скалярного  $p$  и векторного  $\mathbf{q}$  деления двух векторов  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{b}$ , а также делимое  $\mathbf{e}$ , то делитель определяется как

$$\mathbf{b} = \frac{p\mathbf{e} + \mathbf{q} \times \mathbf{e}}{p^2 + \mathbf{q}^2}.$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \frac{p\mathbf{e} + \mathbf{q} \times \mathbf{e}}{p^2 + \mathbf{q}^2} &= \frac{1}{b^2} \frac{b^2}{e^2} [(\mathbf{e} \cdot \mathbf{b})\mathbf{e} + (\mathbf{e} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{e}] = \\ &= \frac{1}{e^2} [(\mathbf{e} \cdot \mathbf{b})\mathbf{e} + \mathbf{b}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) - \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{b})] = \mathbf{b}. \end{aligned}$$

## 15. Формальный аналог индуцированного электрического поля

Формальный аналог напряженности электрического поля – это сила, действующая на единичный формальный аналог электрического заряда  $q$ . Пусть последний движется со скоростью  $\mathbf{v}$ . Могут быть рассмотрены следующие частные случаи.

1. Продольное движение (рис. 2).



Рис. 2. Продольное движение

В соответствии с формулой (15) формальный аналог напряженности электрического поля

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{E}_\tau &= \frac{d\mathbf{F}}{dq} = \frac{1}{dq} d\mathbf{H}_r^{(I/dl_\tau)} \cdot \{I_q d\mathbf{l}_q\} = \frac{1}{dq} d\mathbf{H}_r^{(I/dl_\tau)} \cdot \left\{ \frac{dq}{dt} d\mathbf{l}_q \right\} = \\
 &= d\mathbf{H}_r^{(I/dl_\tau)} \cdot \left\{ \frac{d\mathbf{l}_q}{dt} \right\} = d\mathbf{H}_r^{(I/dl_\tau)} \cdot \{\mathbf{v}\} = \\
 &= -\frac{m}{4\pi r^3} \{I d\mathbf{l}_\tau\} \mathbf{r} \cdot \{\mathbf{v}\} = -\frac{m}{4\pi r^3} \{I d\mathbf{l}_\tau \cdot \mathbf{v}\} \mathbf{r} = \\
 &= -\frac{m/dl_\tau}{4\pi r^3} v \mathbf{r} = -\frac{m/dl_\tau}{4\pi r^2} v \frac{I d\mathbf{l}_\tau}{I dl_\tau} = dH_\tau v \frac{I d\mathbf{l}_\tau}{I dl_\tau}. \quad (20)
 \end{aligned}$$

В скалярной форме

$$dE_\tau = dH_\tau v.$$

Формальный аналог ЭДС

$$d\xi = dE_\tau dl = dH_\tau v dl.$$

2. Поперечное движение (рис. 3).

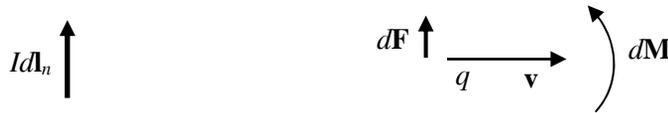


Рис. 3. Поперечное движение

В соответствии с выражением (16)

$$d\mathbf{M} = \{d\mathbf{H}_r^{(I/dl_n)} \{ \times \} \cdot \{I_q d\mathbf{l}_q\} \mathbf{r}\} = \{d\mathbf{H}_r^{(I/dl_n)} \{ \times \} \cdot \{dq \mathbf{v}\} \mathbf{r}\}.$$

С другой стороны,

$$d\mathbf{M} = [\mathbf{r}, d\mathbf{F}].$$

В соответствии с выражением (19)

$$d\mathbf{F}_n = d\mathbf{M} \div \mathbf{r} = \{d\mathbf{H}_r^{(I/dl_n)} \{ \times \} \cdot \{dq \mathbf{v}\} \mathbf{r}\} \div \mathbf{r} = \{d\mathbf{H}_r^{(I/dl_n)} \{ \times \} \cdot \{dq \mathbf{v}\} \mathbf{r}\} \times \frac{\mathbf{r}}{r^2},$$

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{E}_n &= \frac{d\mathbf{F}_n}{dq} = \frac{1}{dq} d\mathbf{M} \div \mathbf{r} = \{d\mathbf{H}_r^{(l\mathbf{d}_n)}\{\times\} \cdot \{\mathbf{v}\}\mathbf{r}\} \div \mathbf{r} = \{d\mathbf{H}_r^{(l\mathbf{d}_n)}\{\times\} \cdot \{\mathbf{v}\}\mathbf{r}\} \times \frac{\mathbf{r}}{r^2} = \\
 &= -\frac{m}{4\pi r^3} \{ \{l\mathbf{d}_n\} \mathbf{r} \{\times\} \cdot \{\mathbf{v}\}\mathbf{r} \} \times \frac{\mathbf{r}}{r^2} = -\frac{m}{4\pi r^3} \{ \{l\mathbf{d}_n \times \mathbf{v}\} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \} \times \frac{\mathbf{r}}{r^2} = \\
 &= -\frac{m}{4\pi r^3} (l\mathbf{d}_n \times \mathbf{v}) \times \mathbf{r} = -\frac{m}{4\pi r^2} v(-l\mathbf{d}_n) = \frac{m}{4\pi r^2} v l\mathbf{d}_n = -dH_n v \frac{l\mathbf{d}_n}{l\mathbf{d}_n}. \quad (21)
 \end{aligned}$$

В скалярной форме

$$dE_n = -dH_n v.$$

Формальный аналог ЭДС

$$d\xi = dE_n dl = -dH_n v dl.$$

## 16. Изменяющееся поле

Для точки, расположенной в конце радиус-вектора  $\mathbf{r}$ , изменение величины  $l\mathbf{d}$  равносильно перемещению вектора  $l\mathbf{d}$  вдоль радиус-вектора  $\mathbf{r}$  с некоторой скоростью. Это дает возможность использовать результаты предыдущего раздела.

1. Продольное (относительно  $l\mathbf{d}$ ) поле.

На рис. 2 заряд удаляется от источника поля, поэтому оно уменьшается. Если заряд неподвижен, то для уменьшения поля источник должен двигаться со скоростью, имеющей противоположный знак. С учетом этого и в соответствии с выражением (20)

$$d\mathbf{E}_\tau = -dH_\tau v \frac{l\mathbf{d}_\tau}{l\mathbf{d}_\tau} = -dH_\tau \frac{dr}{dt} \frac{l\mathbf{d}_\tau}{l\mathbf{d}_\tau}, \quad \frac{d\mathbf{E}_\tau}{dr} = -\frac{dH_\tau}{dt} \frac{l\mathbf{d}_\tau}{l\mathbf{d}_\tau}, \quad \frac{dE_\tau}{dr} = -\frac{dH_\tau}{dt}. \quad (22)$$

2. Поперечное (относительно  $l\mathbf{d}$ ) поле.

В соответствии с выражением (21)

$$\frac{d\mathbf{E}_n}{dr} = \frac{dH_n}{dt} \frac{l\mathbf{d}_n}{l\mathbf{d}_n}, \quad \frac{dE_n}{dr} = \frac{dH_n}{dt}. \quad (23)$$

В произвольной точке поле можно разложить на продольную и поперечную составляющие.

$$\frac{d\mathbf{E}}{dr} = \frac{d\mathbf{E}_\tau}{dr} + \frac{d\mathbf{E}_n}{dr} = \frac{dH}{dt} \left( \frac{l\mathbf{d}_n}{l\mathbf{d}_n} - \frac{l\mathbf{d}_\tau}{l\mathbf{d}_\tau} \right) = \frac{dH}{dt} \left( \frac{l\mathbf{d}_n - l\mathbf{d}_\tau}{l\mathbf{d}} \right) = \frac{dH}{dt} \frac{l\mathbf{d}^*}{l\mathbf{d}}, \quad (24)$$

здесь  $l\mathbf{d}^*$  – вектор, сопряженный вектору  $l\mathbf{d}$  (рис. 4).



Рис. 4. Сопряженные векторы

Выражения (20)–(24) являются формальными аналогами закона электромагнитной индукции, которые, в отличие от классической феноменологической модели электромагнитного поля, являются простым следствием других свойств и соотношений поля.

### 17. Скалярная производная векторов

В отличие от производной вектора по другому вектору [8] скалярную производную векторов можно интерпретировать как скалярное деление [см. формулу (18)] дифференциалов двух векторов.

$$\begin{aligned} d\mathbf{a} \cdot \frac{1}{d\mathbf{b}} &= d(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \cdot \frac{1}{d(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k})} = \\ &= (da_x\mathbf{i} + da_y\mathbf{j} + da_z\mathbf{k}) \cdot \frac{1}{db_x\mathbf{i} + db_y\mathbf{j} + db_z\mathbf{k}} = da_x\mathbf{i} \cdot \frac{1}{db_x\mathbf{i} + db_y\mathbf{j} + db_z\mathbf{k}} \cdot \frac{db_x\mathbf{i}}{db_x\mathbf{i}} + \\ &+ da_y\mathbf{j} \cdot \frac{1}{db_x\mathbf{i} + db_y\mathbf{j} + db_z\mathbf{k}} \cdot \frac{db_y\mathbf{j}}{db_y\mathbf{j}} + da_z\mathbf{k} \cdot \frac{1}{db_x\mathbf{i} + db_y\mathbf{j} + db_z\mathbf{k}} \cdot \frac{db_z\mathbf{k}}{db_z\mathbf{k}} = \\ &= \frac{da_x db_x}{(db_x)^2} + \frac{da_y db_y}{(db_y)^2} + \frac{da_z db_z}{(db_z)^2} = \frac{da_x}{db_x} + \frac{da_y}{db_y} + \frac{da_z}{db_z}. \end{aligned}$$

Представляет интерес частный случай, когда берется скалярная производная по радиус-вектору  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ .

$$d\mathbf{a} \cdot \frac{1}{d\mathbf{r}} = \frac{da_x}{dx} + \frac{da_y}{dy} + \frac{da_z}{dz} = \text{div} \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d}{d\mathbf{r}} = \nabla. \quad (25)$$

### 18. Формальный аналог полной системы уравнений Максвелла в дифференциальной форме

Очевидным образом формальный аналог третьего уравнения Максвелла математически изоморфен оригиналу.

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{dq}{dV}.$$

В качестве четвертого уравнения следует рассматривать полученное выше выражение теоремы Гаусса для формального аналога электромагнитного поля

Аналогом первого уравнения можно считать выражение (24).

Для получения аналога второго уравнения в выражении (17) можно использовать формулу (25):

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_r \left\{ \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right\} = d \mathbf{B}_r \left\{ \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right\} \cdot \frac{1}{d\mathbf{r}} = \left\{ \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right\}, \quad \frac{d\mathbf{B}}{dr} = j + \frac{dD}{dt}. \quad (26)$$

Таким образом, аналог полной системы уравнений Максвелла в дифференциальной форме имеет следующий вид:

$$\begin{array}{ll} \text{I. } \frac{d\mathbf{E}}{dr} = \frac{dH}{dt} \frac{1}{dl^*}, & \text{III. } \operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{dq}{dV}, \\ \text{II. } d \mathbf{B}_r \left\{ \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right\} \cdot \frac{1}{d\mathbf{r}} = \left\{ \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right\}, & \text{IV. } \left\{ \operatorname{div} \mathbf{B}_r \left\{ \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right\} \right\} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \end{array}$$

Здесь  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ , где  $\epsilon$  – формальный аналог диэлектрической проницаемости.

### 19. Формальный аналог электромагнитных волн

Совместное решение уравнений (23) (для поперечного поля) и (26) при условии  $j = 0$  дает:

$$\frac{d^2 \mathbf{E}_n}{dr dt} = m \frac{d^2 \mathbf{B}_n}{dt^2}, \quad \frac{d^2 \mathbf{B}_n}{dr^2} = \epsilon \frac{d^2 \mathbf{E}_n}{dr dt}, \quad \frac{d^2 \mathbf{B}_n}{dr^2} = \epsilon m \frac{d^2 \mathbf{B}_n}{dt^2}.$$

Последнее – классическое волновое уравнение. Его решение представляет собой монохроматическую волну:

$$\mathbf{B}_n = \mathbf{B}_{n0} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r} + \delta)},$$

где  $\omega$  – циклическая частота;  $\mathbf{k}$  – волновое число;  $\delta$  – начальная фаза [9, 10]. Скорость волны

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon m}}.$$

Аналогично находится формальный аналог электрической (поперечной) составляющей волны:

$$E_n = E_{n0} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \delta)}.$$

Очевидно, что от продольной составляющей аналога электрического поля [см. формулу (22)] волна не возникает.

### Заключение

Классическая модель электромагнитного поля имеет следующие особенности:

- допускает нарушения ТЗН;
- исключает взаимодействие соосных элементов проводников с токами;
- не предусматривает существование моментов сил, действующих на элементы проводников;
- направление вектора напряженности поля не совпадает с направлением вектора силы, действующей на элемент проводника с током;
- индукция зависит от свойств среды, а напряженность – нет;
- дивергенция поля равна нулю;
- законом Ампера принято считать формулу, в общем случае не совместимую с его основным результатом;
- закон электромагнитной индукции является феноменологическим.

Указанные особенности, по-видимому, в меньшей степени обусловлены субъективными факторами и в значительной степени являются следствием ограниченности арсенала средств векторной алгебры. Не вводя в рассмотрение мнимые и комбинированные векторы и имея возможность использовать только операции произведения векторов, невозможно выражение (1) сконструировать как-то иначе, так, чтобы, в частности, не нарушался ТЗН.

Построенная модель формального аналога электромагнитного поля этих особенностей не имеет. В частности, формальные аналоги закона электромагнитной индукции являются простым следствием других свойств и соотношений поля.

Построенная модель удовлетворяет основному требованию Ампера для магнитостатики – безусловному выполнению ТЗН.

Кроме того, в абстрактной модели ключевую роль необходимо играют магнитный заряд  $l\mathbf{l}$  и магнитный монополь  $d\mathbf{H}_r^{\{\mp d\mathbf{l}\}}$ .

### Список литературы

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 3. Электричество. – М.: Физматлит; Изд-во Моск. физ.-техн. ин-та, 1977. – 688 с.
2. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Физматлит, 2003. – 616 с.
3. Томилин А.К., Прокопенко Е.В. Продольные колебания упругого электропроводного стержня в неоднородном магнитном поле // Вестник Том. гос. ун-та. Математика и механика. – 2013. – № 1 (21). – С. 104–111.
4. Ампер А.М. Электродинамика. – М.: АН СССР, 1954. – 492 с.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, 1966. – Т. 3. – 656 с.
6. Корн Г. Справочник по математике. – М.: Наука, 1977. – 832 с.
7. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. – М.: Высшая школа, 1986. – 263 с.
8. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: Наука, 1965. – 780 с.
9. Попов И.П. Математическое моделирование формального аналога волновой функции // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Прикладная математика и вопросы управления. – 2016. – № 1. – С. 9–14.
10. Попов И.П. Математическое моделирование волнового пакета, образованного двумя плоскими монохроматическими волнами де Бройля // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Прикладная математика и вопросы управления. – 2016. – № 2. – С. 7–13.

### References

1. Sivukhin D.V. Obshchii kurs fiziki. Vol. 3. Elektrichestvo [The general course of physics. Vol. 3. Electricity]. Moscow, 1977. 688 p.
2. Tamm I.E. Osnovy teorii elektrichestva [Fundamentals of the theory of electricity]. Moscow, 2003. 616 p.
3. Tomilin A.K., Prokopenko E.V. Prodol'nye kolebaniia uprugogo elektroprovodnogo sterzhnia v neodnorodnom magnitnom pole [The longitudinal vibrations of elastic conductive rod in a nonuniform magnetic field]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2013, no. 1 (21), pp. 104-111.

4. Amper A.M. Elektrodinamika [Electrodynamics]. Moscow, 1954. 492 p.
5. Fikhtengol'ts G.M. Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniia. Vol. 3 [Differential and integral calculus. Vol. 3]. Moscow, 1966. 656 p.
6. Korn G. Spravochnik po matematike [Mathematical handbook]. Moscow, 1977. 832 p.
7. Bessonov L.A. Teoreticheskie osnovy elektrotekhniki. Elektromagnitnoe pole [Theoretical foundations of electrical engineering. Electromagnetic field]. Moscow, 1986. 263 p.
8. Ango A. Matematika dlia elektro- i radioinzhenerov [Mathematics for electrical and radio engineers]. Moscow, 1965. 780 p.
9. Popov I.P. Matematicheskoe modelirovanie formal'nogo analoga volnovoi funktsii [Mathematical modeling of a formal analogue of the wave function]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Prikladnaia matematika i voprosy upravleniia*, 2016, no. 1, pp. 9-14.
10. Popov I.P. Matematicheskoe modelirovanie volnovogo paketa, obrazovannogo dvumia ploskimi monokhromaticheskimi volnami de Broilia [Mathematical modeling of the wave packet formed by two plane monochromatic waves of de Broglie]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Prikladnaia matematika i voprosy upravleniia*, 2016, no. 2, pp. 7-13.

Получено 25.07.2016

### Об авторе

**Попов Игорь Павлович** (Курган, Россия) – старший преподаватель кафедры «Технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты», Курганский государственный университет (640669, г. Курган, ул. Гоголя, 25, e-mail: ip.popov@yandex.ru).

### About the author

**Igor' P. Popov** (Kurgan, Russian Federation) – Senior Lecturer, Department of Mechanical Engineering, Machine Tools and Instruments, Kurgan State University (25, Gogolya st., Kurgan, 640669, Russian Federation, e-mail: ip.popov@yandex.ru).