

УДК 539.3

Г.Л. Колмогоров, А.А. Акулова

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

ПРЕДЕЛЬНАЯ НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ ДЛИННОМЕРНЫХ ТРУБОБЕТОННЫХ КОЛОНН

На основании прочностного расчета предложена методика определения несущей способности трубобетонных колонн при действии основного сжимающего напряжения. Трубобетонная колонна рассматривается как трансверсально-изотропная композиционная конструкция. При расчете несущей способности использованы математический аппарат теории упругости для бетонного сердечника и аппарат механики оболочек для трубы. Несущая способность определяется из условия разрушения оболочки-трубы. В качестве примера приведены результаты расчета несущей способности трубобетонной колонны для конкретной геометрии стальной трубы в зависимости от предела прочности на растяжение материала трубы для некоторых марок заполняющего трубы бетона.

Ключевые слова: трансверсально-изотропный композит, трубобетонная колонна, несущая способность, механика теории упругости, механика оболочек, прочность, разрушение.

G.L. Kolmogorov, A.A. Akulova

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

ULTIMATE BEARING CAPACITY AND STRENGTH OF LONG COMPOSITE COLUMNS

Based on the strength calculation the method of determining the load bearing capacity of pipe-concrete columns under the action of the main compressive stress is proposed. The pipe-concrete column is considered as the transversely isotropic composite structure. The mathematical apparatus of the theory of elasticity is used when calculating the carrying capacity of the concrete core, the mechanic of shells is used for the pipe calculation. The load bearing capacity is determined from the condition of the shell-tube destruction. As an example the calculation's results of determining pipe-concrete column carrying capacity for the particular geometry of the steel pipe according to the tensile strength of the pipe material are shown for some grades of concrete filling pipe.

Keywords: transversely isotropic composite pipe-concrete column, bearing capacity, elasticity mechanics, mechanic shells, strength, destruction.

В настоящее время все более широкое применение при строительстве высотных зданий и сооружений находят трубобетонные колонны, состоящие из наружной оболочки (стальной трубы), запол-

ненной высокопрочным бетоном [1]. Применение трубобетонных колонн позволяет возводить строительные сооружения с более низкими трудозатратами.

Стальная оболочка в виде трубы играет роль и опалубки, и арматуры, повышая несущую способность, что позволяет возводить колонны зданий и сооружений с высокой производительностью и более низкими затратами. Кроме технологических преимуществ, трубобетонные колонны обладают повышенной несущей способностью и сейсмостойкостью [2].

В настоящее время данные трубобетонные колонны используются при строительстве моста Крым – Кавказ. Для них характерна большая длина, поскольку транспортная эстакада поднята достаточно высоко над уровнем моря. Наличие большой длины предполагает расчет на устойчивость трубобетонных колонн.



Рис. 1. Сечение трубобетонной колонны

Целью работы является оценка предельной несущей способности и деформативности стальных трубобетонных колонн при действии осевой нагрузки.

На рис. 1 показано сечение трубобетонной колонны, состоящей из оболочки с наружным радиусом R_1 и бетонного сердечника радиусом R_0 .

При действии осевого сжимающего усилия в сечениях трубобетонной колонны реализуется осесимметричное напряженно-деформированное состояние, поэтому при расчете несущей способности используется математический аппарат теории упругости для сердечника и аппарат механики и оболочек наружной части колонн.

Деформация центральной части трубобетонной колонны описывается следующим дифференциальным уравнением для осесимметричного тела в цилиндрической системе координат [3]:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (u \cdot r) \right] = 0, \quad (1)$$

где u – деформация в радиальном направлении.

Решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$u = c_1 \frac{r}{2} + \frac{c_2}{r}, \quad (2)$$

где c_1 и c_2 – постоянные интегрирования.

Из соотношения (2) следуют бесконечно большие перемещения при $r = 0$, поэтому полагаем, что $c_2 = 0$, и уравнение (2) принимает вид

$$u = c_1 \frac{r}{2}. \quad (3)$$

При известных перемещениях и напряжениях состояние характеризуется следующими уравнениями теории упругости для радиальных и окружных (тангенциальных) напряжений в сердечнике:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E_6}{1-\mu_6^2} \left(\frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} \right) + \frac{\mu_6}{1-\mu_6} \sigma_z \\ \sigma_t &= \frac{E_6}{1-\mu^2} \left(\frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} \right) + \frac{\mu_6}{1-\mu_6} \sigma_z \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

где E_6, μ_6 – модуль упругости и коэффициент Пуассона заполняющего центральную часть колонны бетона соответственно; σ_z – нормальные напряжения, действующие в направлении оси трубобетонной колонны.

Подставляя выражение (2) в уравнения (4), получим после преобразований равенство и постоянство по сечению радиальных и тангенциальных напряжений:

$$\sigma_r = \sigma_t = \frac{1}{1-\mu_6} \left(E_6 \cdot \frac{c_1}{2} + \mu_6 \sigma_z \right). \quad (5)$$

Осевое напряжение σ_z определяется из условий восприятия части нагрузки центральной частью колонны. Для этого определим общую относительную осевую деформацию колонны под действием осевого усилия:

$$\varepsilon_z = -\frac{P}{\pi R_1^2 E_{\text{пр}}}, \quad (6)$$

где P – действующее осевое усилие; πR_1^2 – площадь сечения трубобетонной колонны; $E_{\text{пр}}$ – приведенный модуль упругости. Знак минус в соотношении (6) означает, что под действием усилия P в колонне возникают осевые деформации сжатия.

Следует отметить, что трубобетонная колонна представляет собой трансверсально-изотропный композит, к которому относят композиты, обладающие симметрией свойств в плоскости, перпендикулярной оси композита [4].

Приведенный модуль упругости трансверсально-изотропного композита с достаточно высокой точностью определяется по правилу смеси:

$$E_{\text{пр}} = E_{\text{б}}c + E_{\text{тр}}(1 - c), \quad (7)$$

где c – объемное содержание бетона; $E_{\text{тр}}$ – модуль упругости материала трубы.

Осевая деформация приводит ε_z к появлению осевых напряжений в бетоне, которые определяются законом Гука:

$$\sigma_z^{\text{б}} = E_{\text{тр}}\varepsilon_z = -\frac{P}{\pi R_1^2} \cdot \frac{E_{\text{б}}}{E_{\text{пр}}}, \quad (8)$$

соответственно, осевые напряжения в трубе равны:

$$\sigma_z^{\text{тр}} = E_{\text{тр}}\varepsilon_z = -\frac{P}{\pi R_1^2} \cdot \frac{E_{\text{тр}}}{E_{\text{пр}}}. \quad (9)$$

При этом напряженное состояние в бетоне определяется по формуле

$$\sigma_r = \sigma_t = \frac{1}{1-\mu_6} \left(\frac{E_6}{2} c_1 - \mu_6 \frac{P}{\pi R_1^2} \bar{E}_6 \right), \quad (10)$$

где \bar{E}_6 – относительный модуль упругости бетона, $\bar{E}_6 = \frac{E_6}{E_{тр}}$.

Входящую в соотношение (10) постоянную интегрирования c_1 определим из равенства радиальных перемещений на контакте бетон – труба.

Труба при этом рассматривается как цилиндрическая оболочка, находящаяся под действием радиального напряжения σ_r в бетоне и осевого напряжения σ_z .

Оболочка-труба под осевой нагрузкой не испытывает действия изгибающих моментов и рассматривается по безмоментной теории оболочек, усилия при этом определяются по уравнению [5]

$$\frac{N_z}{r_1} + \frac{N_t}{r_2} = \mathcal{Z}, \quad (11)$$

где N_z и N_t – усилия в направлении оси «труба-оболочка» и окружном направлении соответственно; r_1 и r_2 – радиусы кривизны оболочки в этих же направлениях; \mathcal{Z} – внешняя радиальная нагрузка, равная радиальному напряжению в бетоне на контакте бетон – труба.

Для цилиндрической оболочки $r_1 = \infty$ радиус в окружном направлении равняется внутреннему радиусу трубы $r_2 = R_0$. С учетом данных радиусов уравнение (11) упрощается и принимает вид

$$N_t = \mathcal{Z} R_0, \quad (12)$$

при этом в трубе действуют окружные напряжения

$$\sigma_t = \frac{N_t}{h} = \mathcal{Z} \frac{R_0}{h}, \quad (13)$$

что после подстановки значения $\mathcal{Z} = \sigma_r$ из выражения (10) дает

$$\sigma_t = \frac{1}{1-\mu_6} \left(\frac{E_6}{2} c_1 - \mu_6 \frac{P}{\pi R_1^2} \bar{E}_6 \right) \frac{R_0}{h}. \quad (14)$$

В трубе-оболочке реализуется плоское напряженное состояние, кроме окружного напряжения (14), действует сжимающее напряжение σ_z , определяемое соотношением (8).

Для плоского напряженного состояния, реализуемого в трубе-оболочке, относительная деформация в окружном направлении определяется законом Гука:

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E_{\text{тр}}} (\sigma_t - \mu_{\text{тр}} \sigma_z), \quad (15)$$

где $\mu_{\text{тр}}$ – коэффициент Пуассона материала трубы соответственно.

После подстановки соотношений (13), (14) для напряжений σ_t и σ_z в уравнение (15) и преобразований получим:

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E_{\text{тр}}} \left[\frac{1}{1 - \mu_6} \left(E_6 \frac{c_1}{2} - \mu_6 \frac{P}{\pi R_1^2} \bar{E}_6 \right) \frac{R_0}{h} + \mu_{\text{тр}} \frac{P}{\pi R_1^2} \bar{E}_{\text{тр}} \right], \quad (16)$$

где $E_{\text{тр}}$ – модуль упругости материала трубы; $\bar{E}_{\text{тр}}$ – относительный модуль упругости трубы, $\bar{E}_{\text{тр}} = \frac{E_{\text{тр}}}{E_{\text{пр}}}$.

Относительная окружная деформация в соответствии с теорией оболочек равна [5]

$$\varepsilon_t = \frac{u_{\text{тр}}}{R_0}, \quad (17)$$

где $u_{\text{тр}}$ – радиальное перемещение (прогиб) оболочки-трубы.

Из данного соотношения следует:

$$u_{\text{тр}} = \varepsilon_t R_0. \quad (18)$$

Радиальная деформация (18) должна быть равна радиальной деформации бетона на контакте бетонный сердечник – оболочка в форме трубы $u_{\text{тр}} = u_6$, при этом радиальная деформация бетона определяется соотношением (3):

$$u_6 |_{r=R_0} = c_1 \frac{R_0}{2}. \quad (19)$$

Определив ε_t в соответствии с соотношением (16) и учитывая выражения (18), (19), после преобразований и упрощений получим c_1 в следующем виде:

$$c_1 = \frac{2PE_{\text{тр}}}{\pi R_1^2 E_{\text{пр}} E_{\text{б}}} \cdot \frac{\mu_{\text{б}}}{\mu_{\text{тр}}}. \quad (20)$$

Подставив полученное значение c_1 в соотношение (10), имеем:

$$\mathcal{Z} = \sigma_r = \frac{\mu_{\text{б}}}{\mu_{\text{тр}}(1-\mu_{\text{б}})} \cdot \frac{P}{\pi R_1^2} (\bar{E}_{\text{тр}} - \mu_{\text{тр}} \bar{E}_{\text{б}}). \quad (21)$$

В соответствии с соотношением (21) получим:

$$\sigma_t = \frac{\mu_{\text{б}}}{\mu_{\text{тр}}(1-\mu_{\text{б}})} \cdot \frac{P}{\pi R_1^2} (\bar{E}_{\text{тр}} - \mu_{\text{тр}} \bar{E}_{\text{б}}) \frac{R_0}{h}. \quad (22)$$

Прочность трубы-оболочки определяется значениями окружных напряжений. При достижении σ_t предела прочности материала трубы на растяжение произойдет разрушение оболочки-трубы от окружных напряжений. Приравняв $\sigma_t = \sigma_b$ (σ_b – предел прочности материала трубы на растяжение), получим предельную несущую способность трубобетонной колонны:

$$P_{\text{пр}} = \frac{\pi R_1^2 \mu_{\text{тр}} (1-\mu_{\text{б}}) \sigma_b}{\mu_{\text{б}} (\bar{E}_{\text{тр}} - \mu_{\text{тр}} \bar{E}_{\text{б}})} \cdot \frac{h}{R_0}. \quad (23)$$

Формулу (23) можно несколько упростить, полагая, что $\frac{R_1}{R_0} \approx 1$:

$$P_{\text{пр}} = \frac{\pi R_1 \mu_{\text{тр}} (1-\mu_{\text{б}}) h}{\mu_{\text{б}} (\bar{E}_{\text{тр}} - \mu_{\text{тр}} \bar{E}_{\text{б}})} \sigma_b. \quad (24)$$

Ниже на рис. 2 приведены расчетные значения несущей способности трубобетонной колонны с $R_0 = 0,5$ м, $R_1 = 0,51$ м для трех марок бетона. Упругие характеристики, принятые в расчете, приведены в табл. 1.

Таблица 1

Значения физических констант для компонентов композита

Физические константы	Сталь	Бетон		
		M200	M350	M400
Модуль упругости E , 10^4 МПа	20	2	3	4
Коэффициент Пуассона μ	0,33	0,2	0,2	0,2

Для принятых размеров трубобетонных колонн объемная доля сердечника составляет $c = 0,96$. Приведенные модули упругости при этом соответственно равны $E_{\text{тр}_1} = 2,72 \cdot 10^4$ МПа; $E_{\text{тр}_2} = 3,68 \cdot 10^4$ МПа; $E_{\text{тр}_3} = 4,64 \cdot 10^4$ МПа. Относительные модули упругости для бетона равны $\bar{E}_{\sigma_1} = 0,1$; $\bar{E}_{\sigma_2} = 0,15$; $\bar{E}_{\sigma_3} = 0,2$.

Следовательно, для трубы имеем:

$$\bar{E}_{\text{тр}_1} = 7,3529; \bar{E}_{\text{тр}_2} = 5,4347; \bar{E}_{\text{тр}_3} = 4,31.$$

Из рис. 2 следует повышение несущей способности трубобетонной колонны с увеличением предела прочности стальной трубы и применением более качественного бетона.

Таким образом, на основании математического аппарата механики сплошных сред из условий прочности определена несущая способность трубобетонных колонн.

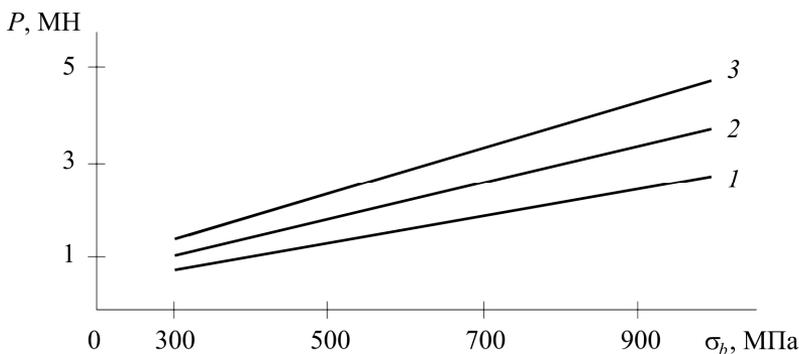


Рис. 2. Несущая способность трубобетонной колонны:
1 – бетон M200; 2 – бетон M350; 3 – бетон M450

Важным вопросом данной статьи является расчет трубобетонной колонны на устойчивость, учитывая большую длину колонн, при строи-

тельстве моста Крым – Кавказ. Для расчета на устойчивость используется формула Эйлера для определения критической силы:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}, \quad (25)$$

где EJ – жесткость колонны при изгибе; l – длина трубобетонной колонны.

При использовании формулы (26) полагаем, что $P_{пр} = P_{кр}$. По несущей способности трубобетонной колонны (24) определяется критическая длина, соответствующая потере устойчивости:

$$l = \pi \sqrt{\frac{EJ}{P_{кр}}}. \quad (26)$$

Суммарная жесткость трубобетонной колонны при изгибе следующая:

$$EJ_{\Sigma} = E_6 J_6 + E_{тр} J_{тр}, \quad (27)$$

где $J_6, J_{тр}$ – моменты инерции центральной части и трубы.

Для рассматриваемой конструкции получим:

$$EJ_{\Sigma} = E_6 \frac{\pi R_0^4}{4} \left(1 + \frac{E_{тр}}{E_6} (\bar{R}_1^4 - 1) \right), \quad (28)$$

где \bar{R}_1 – параметр, характеризующий относительную толщину стенки трубы, $\bar{R}_1 = R_1 / R_0$.

После нахождения жесткости трубобетонной колонны при изгибе для трех марок бетона подставим получившиеся результаты в формулу (26) и найдем критическую длину колонны.

По формуле (28) определим суммарную жесткость при изгибе трубобетонной колонны для трех марок бетона. Используя формулу (26), рассчитаем критическую длину трубобетонных колонн для предельной несущей способности трубобетонных колонн, представленных на рис. 2. Результаты расчета приведены в табл. 2.

Таблица 2

Критическая длина трубобетонных колонн

σ_b , МПа	Критическая длина трубобетонных колонн в зависимости от предела прочности стальной трубы для трех марок бетона, м							
	300	400	500	600	700	800	900	1000
Бетон М200	149,04	128,89	115,18	105,39	97,74	91,13	85,72	81,44
Бетон М350	143,8	124,51	111,43	101,77	94,25	88,04	83,03	78,7
Бетон М450	140,89	121,91	108,98	99,62	92,19	86,02	81,25	77,06

Таким образом, предложена методика расчета предельной несущей способности трубобетонных колонн из условий прочности стальной трубы-оболочки. Оценена устойчивость трубобетонных колонн, получены критические длины для трубобетонных колонн, соответствующие по мере устойчивости при действии осевого сжимающего усилия. Наличие аналитических зависимостей (24) и (26) позволяет говорить об универсальности предложенной методики.

Список литературы

1. Кришан А.Л., Кришан М.А., Сабирова Р.Р. Перспективы применения трубобетонных колонн на строительных объектах России // Вестник Магнитогор. гос. техн. ун-та им. Г.И. Носова. – 2014. – № 1. – С. 137–140.
2. Колмогоров Г.Л., Путилова Е.М., Сайгина Л.С. Несущая способность трубобетонных колонн под действием осевых усилий // Строительная механика и расчет сооружений. – 2012. – № 4. – С. 8–10.
3. Хан Х.Г. Теория упругости и основы линейной теории. Ее применение. – М.: Мир, 1988. – 343 с.
4. Кристенсен Р. Введение в механику композитов: пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 334 с.
5. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 636 с.

References

1. Krishan A.L., Krishan M.A. Shakirov R.R. Perspektivy primeneniia trubobetonnykh kolonn na stroitel'nykh ob"ektakh Rossii [Prospects for the use of pipe-concrete columns on construction sites in Russia]. *Vestnik Magnitogorskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta imeni G.I. Nosova*, 2014, no. 1, pp. 137-140.

2. Kolmogorov G.L. Putilova E.M., Saigina L.S. Nesushchaia sposobnost' trubobetonnykh kolonn pod deistviem osevykh usilii [The bearing capacity of pipe-concrete columns under the action of axial forces]. *Stroitel'naia mekhanika i raschet sooruzhenii*, 2012, no. 4, pp. 8-10.

3. Khan H.G. Teoriia uprugosti i osnovy lineinoi teorii. Ee primenenie [The theory of elasticity and the fundamentals of the linear theory. Her application]. Moscow: Mir, 1988. 343 p.

4. Kristensen R. Vvedenie v mekhaniku kompozitov [Introduction to the mechanics of composites]. Moscow: Mir, 1982. 334 p.

5. Timoshenko S.P., Voinovskii-Kriger S. Plastiny i obolochki [Plates and shells]. Moscow: Nauka, 1966. 636 p.

Получено 16.08.2016

Об авторах

Колмогоров Герман Леонидович (Пермь, Россия) – доктор технических наук, профессор кафедры «Динамика и прочность машин», Пермский национальный исследовательский политехнический университет, заслуженный работник высшей школы РФ (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: dpm@pstu.ru).

Акулова Анна Алексеевна (Пермь, Россия) – бакалавр, кафедра «Динамика и прочность машин», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: biniton1@ya.ru).

About the authors

German L. Kolmogorov (Perm, Russian Federation) – Doctor of Technical Sciences, Professor of Department of Dynamics and Strength of Machines, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: dpm@pstu.ru).

Anna A. Akulova (Perm, Russian Federation) – Bachelor, Department of Dynamics and Strength of Machines, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: biniton1@ya.ru).