УДК 517.927

А.Р. Абдуллаев, Э.В. Плехова, Е.В. Сергеева

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

О ЛИНЕЙНОМ СИНГУЛЯРНОМ УРАВНЕНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Получены неулучшаемые относительно параметров k и m условия разрешимости задачи Коши для линейного функционально-дифференциального уравнения $x''(t)+\frac{k}{t}x'(t)+\frac{m}{t^2}x(t)+a(t)x'_h(t)+b(t)x_g(t)=f(t)$. Обсуждается вопрос о применении полученных результатов для исследования на разрешимость начальной задачи для квазилинейных сингулярных уравнений.

Ключевые слова: сингулярное уравнение, функционально-дифференциальное уравнение, задача Коши, однозначная разрешимость, отклоняющийся аргумент.

A.R. Abdullaev, E.V. Plekhova, E.V. Sergeeva

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

ABOUT LINEAR SINGULAR SECOND-ORDER EQUATIONS WITH DEVIATING ARGUMENT

In the article we have got conditions of solvability Cauchy's problem for a linear functional differential equation $x''(t)+\frac{k}{t}x'(t)+\frac{m}{t^2}x(t)+a(t)x'_h(t)+b(t)x_g(t)=f(t)$ cannot be improved concerning parameters k and m. There is also talk about application of results obtained for researching initial-value problem for quasi-linear singular equation on the solvability.

Keywords: singular equation, functional-differential equation, Cauchy problem, unique solvability, deviating argument.

Рассмотрим уравнение

$$x''(t)+\frac{k}{t}x'(t)+\frac{m}{t^2}x(t)+a(t)x'_h(t)+b(t)x_g(t)=f(t), \tag{1}$$

где $t\in[0,1]$; k,m – действительные параметры.

Здесь

$$y_h(t)=\begin{cases} y(h(t)), \text{ если } h(t)\in[0,1], \\ 0, \text{ если } h(t)\notin[0,1], \end{cases} \quad x_g(t)=\begin{cases} x(g(t)), \text{ если } g(t)\in[0,1], \\ 0, \text{ если } g(t)\notin[0,1], \end{cases}$$

функции $a, b, h, g:[0,1] \to R$ предполагаются измеримыми. Всюду в работе уравнение (1) рассматривается при условиях $x(0+)=0$, $x'(0+)=0$. Таким образом, разрешимость уравнения (1) при отмеченных условиях означает разрешимость задачи Коши для уравнения (1) с нулевыми начальными условиями.

Положим, $E=[0,1]$, и пусть $L_2 = L_2(E)$ – пространство суммируемых с квадратом функций $x: E \to R$; $W_2^0 = W_2^0(E)$ – пространство абсолютно непрерывных вместе с первой производной функций, таких, что вторая производная суммируема с квадратом и $x(0)=x'(0)=0$. Норму на пространстве W_2^0 определим равенством $\|x\|_{W_2^0} = \|x''\|_{L_2}$.

Пространство L_2 будем рассматривать как гильбертово с соответствующим скалярным произведением [1].

Всюду далее будем предполагать выполненными следующие условия:

– С1: $k+m \ge 0$, $k-2m \ge 0$;

– С2: существуют интегралы

$$\int_{h^{-1}(E)} h(t)a^2(t)\,dt, \qquad \int_{g^{-1}(E)} g^3(t)b^2(t)\,dt.$$

1. Запишем уравнение (1) в операторном виде

$$Ax + Bx = f, \tag{2}$$

где линейные операторы $A, B: W_2^0 \to L_2$ определены равенствами

$$(Ax)(t) = x''(t) + \frac{k}{t}x'(t) + \frac{m}{t^2}x(t), \quad (Bx)(t) = a(t)x_h'(t) + b(t)x_g(t).$$

Как известно, уравнение $Ax=0$ – классическое уравнение Эйлера [2].

Приведем необходимые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть выполнено условие С1. Тогда оператор A обратим, и $\|A^{-1}\| \le 1$.

Доказательство. Рассмотрим представление оператора $A: W_2^0 \to L_2$ в виде произведения $A = QJ$, где оператор $J: W_2^0 \to L_2$; $Jx = x''$ – изометрический изоморфизм; $Q:L_2 \to L_2$ – интегральный оператор, определенный равенством

$$Qy = y(t) + \frac{k+m}{t}\int_0^t y(s)\,ds - \frac{m}{t^2}\int_0^t sy(s)\,ds.$$

Для доказательства утверждения леммы достаточно доказать обратимость оператора Q и справедливость неравенства $\|Qy\|_{L_2} \geq \|y\|_{L_2}$. Для реализации этого плана сначала докажем справедливость неравенства $(Qy, y) \geq \|y\|^2$. Отсюда будут следовать обратимость положительного оператора Q и требуемая оценка. Оператор Q можно представить в виде $Q = I + (k+m)C_0 - mC_1$, где C_0, C_1 – операторы Чезаро (или операторы Харди–Литтльвуда [3]), определенные равенствами

$$(C_0 y)(t) = \frac{1}{t}\int_0^t y(s)\,ds,\ (C_1 y)(t) = \frac{1}{t^2}\int_0^t sy(s)\,ds.$$

Через C_0^*, C_1^* обозначим сопряженные с C_0 и C_1 операторы. Воспользуемся следующими соотношениями, доказанными в работе [4]:

$$(C_0 y, y) = \frac{1}{2}\left\|C_0^* y\right\|^2,\ (C_1 y, y) = \frac{3}{2}\left\|C_1^* y\right\|^2,\ \left\|C_1^* y\right\| \leq \left\|C_0^* y\right\|,\quad y \in L_2.$$

Для произвольного $y \in L_2$ имеем

$$(Qy, y) = \|y\|^2 + \frac{k+m}{2}\left\|C_0^* y\right\|^2 - \frac{3m}{2}\left\|C_1^* y\right\|^2. \tag{3}$$

Рассмотрим два случая:

– пусть $m \geq 0$, с учетом условия C1 имеем $(Qy, y) \geq$ $\geq \|y\|^2 + \dfrac{k+2m}{2}\left\|C_0^* y\right\|^2 \geq \|y\|^2$;

– если же $m < 0$, то в силу $k+m \geq 0$ второе и третье слагаемые в правой части равенства (3) неотрицательны, поэтому $(Qy, y) \geq \|y\|^2$.

Таким образом, оператор Q обратим, и $\left\|Q^{-1}\right\| \leq 1$. Поскольку J – метрический изоморфизм, то оператор A обратим, и $\left\|A^{-1}\right\| = \left\|J^{-1}Q^{-1}\right\| \leq \left\|Q^{-1}\right\| \leq 1$.

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть выполнено условие С2. Тогда оператор B – линейный ограниченный, и справедлива оценка

$$\|B\| \le \left(\int\limits_{h^{-1}(E)} h(t)a^2(t)\,dt \right)^{1/2} + \left(\frac{1}{3} \int\limits_{g^{-1}(E)} g^3(t)b^2(t)\,dt \right)^{1/2}.$$

Доказательство. Представим оператор B в виде суммы

$$B = T_1 + T_2,\ T_1, T_2 : W_2^0 \to L_2\ \ (T_1x)(t) = a(t)x_h'(t),\ (T_2x)(t) = b(t)x_g(t)$$

и найдем оценки норм для каждого из операторов T_1 и T_2.

Для произвольного $x \in W_2^0$ справедливо представление $x'(t) = \int\limits_0^t x''(s)\,ds$. Отсюда следует справедливость неравенства $|x'(t)| \le t^{1/2}\|x\|_{W_2^0}$, $t \in E$. Для произвольного $t \in h^{-1}(E)$ имеем $|x'(h(t))| \le (h(t))^{1/2}\|x\|_{W_2^0}$. Следовательно,

$$\|T_1x\|_{L_2} \le \left(\int\limits_{h^{-1}(E)} h(t)a^2(t)\,dt \right)^{1/2} \|x\|_{W_2^0}.$$

Аналогичные рассуждения позволяют получить оценку $\|T_2\|$:

$$\|T_2\|_{L_2} \le \left(\frac{1}{3} \int\limits_{g^{-1}(E)} g^3(t)b^2(t)\,dt \right)^{1/2}.$$

Лемма доказана.

2. Основной результат работы сформулируем в следующем утверждении.

Теорема. Пусть выполнены условия С1, С2 и

$$\left(\int\limits_{h^{-1}(E)} h(t)a^2(t)\,dt \right)^{1/2} + \left(\frac{1}{3} \int\limits_{g^{-1}(E)} g^3(t)b^2(t)\,dt \right)^{1/2} < 1. \tag{4}$$

Тогда уравнение (1) имеет единственное решение в пространстве W_2^0 для любого $f \in L_2$.

Доказательство. Будем рассматривать уравнение (1) в операторном виде (2). Благодаря обратимости оператора A уравнение (2) эквивалентно уравнению

$$x = A^{-1}(Bx + f). \tag{5}$$

В силу условия (4) справедливо неравенство $\left\| A^{-1}B \right\| < 1$. Теперь утверждение теоремы следует из обратимости оператора $I - A^{-1}B$.

Теорема доказана.

Следствие 1. Если в условиях теоремы $h(t) = k_1 t, \quad g(t) = k_2 t$, $0 \le k_1, k_2 \le 1$ и выполнено условие

$$\left(\frac{k_1}{2} \int_0^1 a^2\left(\sqrt{t}\right) dt \right)^{1/2} + \left(\frac{k_2^3}{12} \int_0^1 b^2\left(\sqrt[4]{t}\right) dt \right)^{1/2} < 1,$$

то уравнение (1) имеет единственное решение в пространстве W_2^0 для любого $f \in L_2$.

Доказательство состоит в непосредственной проверке условий теоремы.

Замечание. Отметим, что в условиях следствия 1 функции $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$ необязательно являются суммируемыми с квадратом, как показывает пример следующего уравнения:

$$x''(t) + \frac{k}{t} x'(t) + \frac{m}{t^2} x(t) + \frac{1}{\sqrt{t}} x'(k_1 t) + \frac{1}{\sqrt{t^3}} x(k_2 t) = f(t), \quad t \in E.$$

Следствие 2. Пусть $h(t) = t - t_1$, $g(t) = t - t_2$, $0 \le t_1, t_2 \le 1$ и выполнено условие

$$\left(\int_0^{1-t_1} t a^2(t + t_1) dt \right)^{1/2} + \left(\frac{1}{3} \int_0^{1-t_2} t^3 b^2(t + t_2) dt \right)^{1/3} < 1.$$

Тогда уравнение (1) имеет единственное решение в пространстве W_2^0 для любого $f \in L_2$.

Отметим, что выполнение требуемого неравенства в следствии 2 зависит в том числе и от величин «запаздывания» t_1 и t_2.

Утверждение теоремы может применяться для исследования на разрешимость широкого класса квазилинейных сингулярных краевых задач с линейным сингулярным оператором A. Так, например, разрешимость задачи Коши для уравнения

$$x''(t) = -\frac{\gamma}{t}x'(t) + x(t) + |x(t)|^{\lambda}\operatorname{sgn}x(t) \qquad (6)$$

при $\gamma > 0$ и $0 < \lambda < 1$ элементарно следует из доказанной теоремы, если учесть, что функция $f(u) = |u|^{\lambda}\operatorname{sgn}u$ обладает тем же свойством, что и $\lim\limits_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u} = 0$.

Напомним, что уравнение (6) возникает в нелинейной теории поля при изучении взаимодействия элементарных частиц [5].

Список литературы

1. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.

2. Симонов Н.И. Прикладные методы анализа у Эйлера. – М.: ГИТТЛ, 1957. – 168 с.

3. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

4. Абдуллаев А.Р., Конопацкая Е.В., Плехова Э.В. О дифференциальном операторе второго порядка с сингулярным потенциалом // Научно-технический вестник Поволжья. – 2014. – № 6. – С. 14–18.

5. Кигурадзе М.Т., Шехтер Б.Л. Сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Современные проблемы математики. Новейшие достижения. – М.: ВИНИТИ, 1987. – Т. 30. – С. 105–208.

References

1. Liusternik L.A., Sobolev V.I. Elementy funktsional'nogo analiza [Elements of functional analysis]. Moscow: Nauka, 1965. 520 p.

2. Simonov N.I. Prikladnye metody analiza u Eilera [Applied methods of analysis of Euler]. Moscow: GITTL, 1957. 168 p.

3. Krein S.G., Petunin Iu.I., Semenov E.M. Interpoliatsiia lineinykh operatorov [Interpolation of linear operators]. Moscow: Nauka, 1978. 400 p.

4. Abdullaev A.R., Konopatskaia E.V., Plekhova E.V. O differentsial'nom operatore vtorogo poriadka s singuliarnym potentsialom [On the second order differential operators with singular potentials]. *Nauchno-tekhnicheskii vestnik Povolzh'ia*, 2014, no. 6, pp. 14-18.

5. Kiguradze M.T., Shekhter B.L. Singuliarnye kraevye zadachi dlia obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii vtorogo poriadka [Singular boundary value problems for ordinary differential equations of the second order]. *Sovremennye problemy matematiki. Noveishie dostizheniia*. Moscow: VINITI, 1987, vol. 30, pp. 105-208.

Получено 16.08.2016

Об авторах

Абдуллаев Абдула Рамазанович (Пермь, Россия) – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Высшая математика», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: h.m@pstu.ru).

Плехова Эльвира Валентиновна (Пермь, Россия) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: elvira.plekhova@mail.ru).

Сергеева Екатерина Викторовна (Пермь, Россия) – ассистент кафедры «Высшая математика», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: evkonopatskaya@yandex.ru).

About the authors

Abdula R. Abdullaev (Perm, Russian Federation) – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Department Mathematics, Perm National Research University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: h.m@pstu.ru).

El'vira V. Plekhova (Perm, Russian Federation) – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of High Mathematics, Perm National Research University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: elvira.plekhova@mail.ru).

Ekaterina V. Sergeeva (Perm, Russian Federation) – Assistant, Head of Department Mathematics, Perm National Research University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: evkonopatskaya@yandex.ru).