УДК 530.145.65

И.П. Попов

Курганский государственный университет, Курган, Российская Федерация

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВОГО ПАКЕТА, ОБРАЗОВАННОГО ДВУМЯ ПЛОСКИМИ МОНОХРОМАТИЧЕСКИМИ ВОЛНАМИ ДЕ БРОЙЛЯ

Рассматривается квантовая система в пространстве $\mathbb{R}^3$, образованная двумя частицами, имеющими одинаковые массы *m* и движущимися с фиксированными нерелятивистскими однонаправленными скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, при этом имеется в виду, что волновые функции частиц представляют собой плоские монохроматические волны де Бройля. Доказаны две теоремы, связывающие групповую скорость волнового пакета, образованного частицами, с параметрами гармоник. В первой теореме утверждается, что групповая скорость равна отношению разности циклических частот гармоник к разности их волновых чисел. В этой связи отмечено, что формула, в которой групповая скорость равна производной циклической частоты по волновому числу, является предельным случаем доказанного выражения. Вторая теорема устанавливает, что групповая скорость рассматриваемого волнового пакета равна сумме фазовых скоростей его гармоник.

Ключевые слова: групповая скорость, циклическая частота, волновое число, фазовая скорость, волны де Бройля.

I.P. Popov

Kurgan State University, Kurgan, Russian Federation

MATHEMATICAL MODELING OF THE WAVE PACKET FORMED BY TWO PLANE MONOCHROMATIC DE BROGLIE WAVES

We consider a quantum system in a space $\mathbb{R}^3$, formed by the two particles have the same mass *m* and moving with fixed unidirectional non-relativistic velocities $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$, while it is understood that the wave functions of the particles are flat monochromatic de Broglie waves. Two theorems are proved, linking the group velocity of the wave packet formed by particles with harmonics parameters. The first theorem states that the group velocity is the ratio of the difference between the cyclic frequency harmonics to the difference between their wave numbers. In this regard, it noted that the formula in which the group velocity is equal to the derivative of the cyclic frequency of the wave number, is the limiting case of proven expression. The second theorem states that the group velocity of the wave packet under consideration is equal to the sum of the phase velocities of its harmonics.

Keywords: group velocity, angular frequency, wave number, phase velocity, de Broglie waves.

В ряде задач исследуются квантовые системы, состоящие из двух частиц [1–3]. При этом преимущественно рассматриваются частицы, связанные взаимодействием в большей [1, 2] или меньшей [3] степени. Потенциал взаимодействия существенно влияет на вид волновой функции и в любом случае обусловливает непрерывный спектр ее гармоник. Установление квазиимпульса двухчастичной системы [1] и интерпретация волновой функции как ядра интегрального оператора (Гильберта–Шмидта) [3] предполагают определение групповых скоростей волновых пакетов, что не представляет затруднений в силу непрерывности их спектров.

При движении частиц (не связанных взаимодействием) с неравными фиксированными скоростями частоты волн де Бройля образуют дискретный спектр, в связи с чем для определения групповой скорости волнового пакета формула

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \tag{1}$$

[4] не подходит, поскольку предполагает по крайней мере кусочно-непрерывную зависимость $\omega(k)$. Здесь ω – циклическая частота, k – волновое число.

Задача, таким образом, заключается в отыскании формулы групповой скорости для дискретных значений ω и k. Результаты решения этой задачи могут быть применены к классу частиц, не связанных полевыми взаимодействиями, в том числе к нейтронам, которые в результате некоторых ядерных реакций образуют двухчастичные квантовые системы, например

$$^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}n \to {}^{139}_{54}\mathrm{Xe} + {}^{95}_{38}\mathrm{Sr} + 2{}^{1}_{0}n.$$

Пусть две частицы образуют квантовую систему в пространстве $\mathbb{R}^3$, имеют одинаковые массы m и движутся с фиксированными нерелятивистскими однонаправленными скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. В рассматриваемый момент координаты частиц совпадают. В дальнейшем имеется в виду, что волновые функции частиц представляют собой плоские монохроматические волны де Бройля [5–8]:

$$\Psi_1(\mathbf{r}, t) = C_1 e^{-i(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r})},$$

$$\Psi_2(\mathbf{r},t) = C_2 e^{-i(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r})}.$$

При этом

$$|\Psi_1|^2 = \Psi_1 \Psi_1^* = |C_1|^2, \tag{2}$$

$$|\Psi_2|^2 = \Psi_2 \Psi_2^* = |C_2|^2. \tag{3}$$

Далее для упрощения прямолинейное движение рассматривается в $\mathbb{R}^1$. Из условия нормировки вероятностей

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_1|^2 \, dx = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_2|^2 \, dx = 1$$

с учетом формул (2) и (3) следует, что $C_1 = C_2$.

В связи с вышеизложенным волновой пакет имеет вид

$$\Psi(x,t) = Ce^{-i(\omega_1 t - k_1 x)} + Ce^{-i(\omega_2 t - k_2 x)}. \tag{4}$$

Для названных условий имеют место две теоремы, первую из которых предваряет следующая формула:

$$e^{iz_1} + e^{iz_2} = 2\cos\left(\frac{z_2 - z_1}{2}\right) e^{\frac{i}{2}(z_1 + z_2)}. \tag{5}$$

Действительно,

$$e^{iz_1} + e^{iz_2} = \cos z_1 + i\sin z_1 + \cos z_2 + i\sin z_2 =$$

$$= \cos z_1 + \cos z_2 + i(\sin z_1 + \sin z_2) =$$

$$= 2\cos\left(\frac{z_2 - z_1}{2}\right)\cos\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) + 2i\cos\left(\frac{z_2 - z_1}{2}\right)\sin\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) =$$

$$= 2\cos\left(\frac{z_2 - z_1}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) + i\sin\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right)\right] =$$

$$= 2\cos\left(\frac{z_2 - z_1}{2}\right) e^{\frac{i}{2}(z_1 + z_2)}.$$

Теорема № 1. Групповая скорость волнового пакета [формула (4)] определяется выражением

$$v_g = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1}. \tag{6}$$

Доказательство. В соответствии с формулой (5) выражение (4) приводится к виду

$$\Psi(x,t) = 2C\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t - \frac{k_2 - k_1}{2}x\right)e^{-\frac{i}{2}\left[(\omega_1+\omega_2)t - (k_1+k_2)x\right]}.$$

Модуль волновой функции следующий:

$$|\Psi| = 2C\left|\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t - \frac{k_2 - k_1}{2}x\right)\right|.$$

Групповая скорость – это скорость перемещения максимума модуля, который достигается при условии

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t - \frac{k_2 - k_1}{2}x = 0.$$

За время t максимум модуля перемещается на расстояние x [9]. Таким образом, его скорость или групповая скорость равна

$$v_g = \frac{x}{t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Формулу (6) можно представить в виде

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}.$$

Таким образом, формула (1) является предельным случаем выражения (6).

Теорема № 2. Групповая скорость волнового пакета [см. формулу (4)] равна сумме фазовых скоростей его гармоник:

$$v_g = v_{\varphi_1} + v_{\varphi_2} = \frac{\omega_1}{k_1} + \frac{\omega_2}{k_2}.$$

Доказательство. Пусть $v_2 = qv_1,\ q \in \mathbb{R}$. Из выражений для импульса и энергии

$$p = mv = \hbar k,$$

$$K = \frac{mv^2}{2} = \hbar\omega,$$

где $\hbar$ – постоянная Планка, следует:

$$k_2 = qk_1, \tag{7}$$

$$\omega_2 = q^2\omega_1. \tag{8}$$

При этом

$$v_{\varphi_2} = \frac{\omega_2}{k_2} = \frac{q^2\omega_1}{qk_1} = q\frac{\omega_1}{k_1} = qv_{\varphi_1},$$

$$v_g = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} = \frac{q^2\omega_1 - \omega_1}{qk_1 - k_1} = \frac{\omega_1\left(q^2 - 1\right)}{k_1(q-1)} = \frac{\omega_1}{k_1}(q+1) = v_{\varphi_1} + v_{\varphi_2}.$$

Теорема доказана.

В [10] показано, что

$$\hbar\omega = mv^2. \tag{9}$$

При этом выражения (7) и (8) остаются в силе, и теорема № 2 справедлива также при условии (9).

Таким образом, построение математической модели волнового пакета [см. формулу (4)], образованного двумя плоскими монохроматическими волнами де Бройля, позволило определить его групповую скорость [см. формулу (6)], которая при этом равна сумме фазовых скоростей его гармоник.

Список литературы

1. Лакаев С.Н., Алладустов Ш.У. Положительность собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на решетке // Теоретическая и математическая физика. – 2014. – Т. 178, № 3. – С. 390–402.

2. Двухчастичная матрица плотности и псевдопотенциал электрон-протонного взаимодействия для ультранизких температур /

М.А. Бутлицкий, Б.Б. Зеленер, Б.В. Зеленер, Э.А. Маныкин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48, № 1. – С. 154–158.

3. Хренников А.Ю. Интегральная интерпретация двухчастичной волновой функции и представление квантовых корреляций с помощью случайных полей // Теоретическая и математическая физика. – 2010. – Т. 164, № 3. – С. 386–393.

4. Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики. – М.: Наука, 1976. – 664 с.

5. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. – М.: Мир, 1968. – 384 с.

6. Боум А. Квантовая механика: основы и приложения: монография. – М.: Мир, 1990. – 720 с.

7. Бройль Л. де. Введение в волновую механику: пер. с фр. – М.: УРСС, 2005. – 232 с.

8. Попов И.П. О некоторых ограничениях применения интеграла Фурье // Прикладная математика и вопросы управления. – 2015. – № 1. – С. 19–25.

9. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 4. Оптика. – М.: Наука, 1980. – 752 с.

10. Попов И.П. Математическое моделирование формального аналога волновой функции // Прикладная математика и вопросы управления. – 2016. – № 1. – С. 9–14.

References

1. Lakaev S.N., Alladustov Sh.U. Polozhitel'nost' sobstvennykh znachenii dvukhchastichnogo operatora Shredingera na reshetke [The positivity of the eigenvalues of the two-particle Schrödinger operator on a lattice]. *Teoreticheskaia i matematicheskaia fizika*, 2014, vol. 178, no. 3, pp. 390-402.

2. Butlitskii M.A., Zelener B.B., Zelener B.V., Manykin E.A. Dvukhchastichnaia matritsa plotnosti i psevdopotentsial elektron-protonnogo vzaimodeistviia dlia ul'tranizkikh temperatur [The two-particle density matrix and the pseudopotential of the electron-proton interaction for ultra-low temperatures]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*, 2008, vol. 48, no. 1, pp. 154-158.

3. Khrennikov A.Iu. Integral'naia interpretatsiia dvukhchastichnoi volnovoi funktsii i predstavlenie kvantovykh korreliatsii s pomoshch'iu sluchainykh polei [Integrated interpretation of the two-particle wave function and representation of quantum correlations using random fields]. *Teoreticheskaia i matematicheskaia fizika*, 2010, vol. 164, no. 3, pp. 386-393.

4. Blokhintsev D.I. Osnovy kvantovoi mekhaniki [Principles of quantum mechanics]. Moscow, 1976. 664 p.

5. Feinman R., Khibs A. Kvantovaia mekhanika i integraly po traektoriiam [Quantum mechanics and path integrals]. Moscow, 1968. 384 p.

6. Boum A. Kvantovaia mekhanika: osnovy i prilozheniia [Quantum mechanics: fundamentals and applications]. Moscow, 1990. 720 p.

7. Broil' L. de. Vvedenie v volnovuiu mekhaniku [Introduction to wave mechanics]. Moscow, 2005. 232 p.

8. Popov I.P. O nekotorykh ogranicheniiakh primeneniia integrala Fur'e [Some limited use of the Fourier integral]. *Prikladnaia matematika i voprosy upravleniia*, 2015, no. 1, pp. 19-25.

9. Sivukhin D.V. Obshchii kurs fiziki. Vol. 4. Optika [The general course of physics. Vol. 4. Optics]. Moscow, 1980. 752 p.

10. Popov I.P. Matematicheskoe modelirovanie formal'nogo analoga volnovoi funktsii [Mathematical modeling of a formal analogue of the wave function]. *Prikladnaia matematika i voprosy upravleniia*, 2016, no. 1, pp. 9-14.

Получено 18.04.2016

Об авторе

Попов Игорь Павлович (Курган, Россия) – старший преподаватель кафедры «Технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты», Курганский государственный университет (640669, г. Курган, ул. Гоголя, 25, e-mail: ip.popow@yandex.ru).

About the author

Igor' P. Popov (Kurgan, Russian Federation) – Senior Lecturer, Department of Mechanical Engineering, Machine Tools and Instruments, Kurgan State University (25, Gogolia st., Kurgan, 640669, Russian Federation, e-mail: ip.popow@yandex.ru).