УДК 624.044.2

Г.Л. Колмогоров, Т.Е. Мельникова

Пермский национальный исследовательский
политехнический университет, Пермь, Российская Федерация

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РИТЦА–ТИМОШЕНКО ДЛЯ РАСЧЕТА КРУГЛЫХ ГИБКИХ ПЛАСТИН

Представлена методика расчета круглых гибких пластин, основанная на вариационном (энергетическом) подходе, в частности на принципе Лагранжа, и методе Ритца–Тимошенко. Предлагаемая методика позволяет более объективно оценить напряженное состояние гибких пластин, являющихся промежуточными в классификации по условиям нагружения между жесткими и абсолютно гибкими пластинами (мембранами). Описано практическое применение методики на примере анализа напряженно-деформированного состояния круглой пластины, защемленной по контуру и находящейся под действием равномерно распределенной по поверхности нагрузки. Предложенная методика может быть применена в технологических задачах обработки металлов давлением.

Ключевые слова: вариационный метод, гибкая круглая пластина, метод Ритца–Тимошенко, изгиб, напряженно-деформированное состояние.

G.L. Kolmogorov, T.E. Mel'nikova

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

APPLICATION OF THE METHOD OF RITZ–TIMOSHENKO FOR CALCULATE A ROUND FLEXIBLE PLATES

The technique of calculating a round flexible plates, based on a variation (energy) approach, in particular, the Lagrange principle and method of Ritz–Timoshenko. The offered methodology allows more objectively to estimate the tense state of flexible plates being intermediate in classification on the terms of gladdening between hard and absolutely flexible plates (by membranes). The practical application of the methodology described on the example of the analysis of the stress-strain state of a round plate, which freely supported on the perimeter and under the action of uniformly distributed over the surface of the load. An offer methodology can be applied in the technological tasks of treatment of metals pressure.

Keywords: building mechanics, variation method, round flexible plate, method of Ritz–Timoshenko, bending, stress-strain state.

В современной технике широкое применение находят гибкие пластины, к которым относятся пластины с прогибами, превышающими $^1/_4$–$^1/_5$ доли от размера ее толщины [1]. Существующие теории расчета пластин при изгибе относятся, как правило, к линейной теории жестких пластин, прогибы которых при наличии поперечной нагрузки не превышают указанных выше значений.

В отличие от жестких, для гибких пластин характерна нелинейная зависимость между нагрузкой и возникающими прогибами. При этом наряду с изгибными напряжениями в гибкой пластине действуют мембранные (цепные) усилия и напряжения, равномерно распределенные по толщине пластины.

Задачи прочности гибких пластин требуют интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных с функциональными коэффициентами [2–4], что является весьма затруднительным. В связи с этим для решения практических задач прочности гибких пластин актуальным является применение энергетического подхода и вариационного метода Ритца, позволяющего решать задачу без интегрирования дифференциальных уравнений [3, 4]. Применительно к расчету пластин метод Ритца предложен С.П. Тимошенко [1].

В соответствии с методом Ритца–Тимошенко определяется полная энергия системы:

$$Э = U + V, \tag{1}$$

где U – потенциальная энергия деформации пластины; V – потенциал нагрузки, равный работе внешних сил, взятой с обратным знаком, $V = -A_H$.

В данной работе использован метод Ритца–Тимошенко для расчета гибких круглых пластин при симметричном нагружении относительно оси пластины. При этом потенциальная энергия деформации гибкой пластины равна

$$U = U_M + U_N, \tag{2}$$

где U_M – потенциальная энергия изгиба пластины; U_N – потенциальная энергия мембранных сил.

Потенциальная энергия деформации изгиба круглой пластины определяется интегралом по площади, зависящим от функции прогибов [1]:

$$U_M = \frac{D}{2}\iint_F \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{2\mu}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] r dr d\theta, \tag{3}$$

где D – цилиндрическая жесткость пластины, $D = \dfrac{E \cdot h^3}{12 \cdot \left(1-\mu^2\right)}$, здесь E, μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластины соответственно, h – толщина пластины; $w(r)$ – функция прогибов круглой пластины.

Потенциальная энергия мембранных усилий может быть представлена в следующем виде:

$$U_N = \frac{1}{2}\iint_F \left(N_r \varepsilon_r + N_t \varepsilon_t\right) r dr d\theta, \tag{4}$$

где N_r, N_t – мембранные силы в радиальном и окружном направлениях соответственно; ε_r, ε_t – деформации в радиальном и тангенциальном направлениях.

Деформации при наличии больших прогибов круглой пластины выражаются следующими соотношениями:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2; \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r}, \tag{5}$$

где u – перемещение в радиальном направлении.

Мембранные усилия определяются законом Гука для плоского напряженного состояния:

$$N_r = \frac{Eh}{1-\mu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \mu\frac{u}{r}\right]; \quad N_t = \frac{Eh}{1-\mu^2}\left[\frac{u}{r} + \mu\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2\right]. \tag{6}$$

Выполнив соответствующие преобразования с учетом соотношений (4)–(6) и упрощения, получим для потенциальной энергии мембранных усилий выражение

$$\begin{aligned} U_N = \frac{Eh}{2\left(1-\mu^2\right)}\iint_F \Bigg[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)\mu\frac{u}{r} + 2\mu\frac{u}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \\ + \left(\frac{u}{r}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^4\Bigg] r dr d\theta. \end{aligned} \tag{7}$$

Составляющие потенциальной энергии [см. формулы (3), (7)] образуют с потенциалом нагрузки функционал полной энергии пластины [формула (2)], который учитывает и моменты, и мембранные усилия и может быть использован для расчета гибких пластин вариационными методами. Потенциал нагрузки рассчитывается в зависимости от условий нагружения пластины в каждом конкретном случае. При вычислении компонентов напряженно-деформированного состояния пластин при малых нагрузках и, соответственно, при малых прогибах составляющие потенциальной энергии мембранных сил малы, и решение, полученное по предлагаемой методике, достаточно хорошо коррелирует с известными точными решениями для жестких пластин.

В качестве примера использования данной методики рассмотрим поведение круглой защемленной по контуру пластины под действием равномерно распределенной по площади пластины нагрузки интенсивностью $p_0(r)$ = const. Для реализации функционала используем метод Ритца–Тимошенко. Запишем функцию предполагаемых прогибов в следующем виде

$$w(r) = a_1\left(a^2 - r^2\right)^2, \tag{8}$$

где a_1 – варьируемый параметр; a – радиус пластины.

Выражение (8) удовлетворяет граничным условиям закрепления пластины и условию симметрии деформирования:

$$w\big|_{r=a} = 0; \quad \left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=a} = 0; \quad \left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=0} = 0. \tag{9}$$

При больших прогибах, в отличие от жестких пластин, появляется перемещение в радиальном направлении, которое запишем в виде

$$u(r) = a_2 r\left(a - r\right). \tag{10}$$

При этом полагаем, что из условий симметрии выполняется условие $u\big|_{r=0} = 0,$ в защемлении – $u\big|_{r=a} = 0;$ параметр a_2 также определяется из решения вариационной задачи.

Подставляя функции (8) и (10) в уравнения составляющих потенциальной энергии (3) и (7), получим после преобразований выражения для энергии деформации изгиба и потенциальной энергии мембранных усилий следующее:

$$U_M = \frac{32}{8}\pi D a_1^2 a^6; \tag{11}$$

$$U_N = \frac{\pi E h}{1-\mu^2}\left(\frac{1}{4}a_2^2 \cdot a^4 + a_1^2 \cdot a_2 \cdot a^9\,\frac{2}{315}(41\cdot\mu - 23) + \frac{32}{105}a_1^4 a^{14}\right). \tag{12}$$

Работа распределенной нагрузки выражается интегралом:

$$A_H = \iint_F p_0 w(r) r dr d\theta = \frac{1}{3}\pi \cdot p_0 \cdot a_1 \cdot a^6. \tag{13}$$

С учетом потенциальной энергии изгибающих и мембранных напряжений и потенциала нагрузки полная энергия определяется в виде (1), при этом содержит неизвестные параметры a_1 и a_2. Параметры a_1 и a_2 определяются из условий минимума полной энергии системы. При этом для жестких пластин учитывается только потенциальная энергия изгиба [формула (11)], для гибких же пластин в соответствии с предлагаемой методикой учитывается и потенциальная энергия мембранных усилий [формула (12)].

Следует отметить, что решение данной задачи для жестких пластин определяется из условия

$$\frac{\partial Э}{\partial a_1} = 0,$$

функция прогибов при этом будет равна

$$w(r) = \frac{p_0}{64D}\left(a^2 - r^2\right)^2, \tag{14}$$

что согласуется с известным точным решением данной задачи для жестких пластин [1].

Для гибкой круглой пластины согласно методу Ритца–Тимошенко условие минимума функционала полной энергии имеет следующий вид:

$$\frac{\partial Э}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial Э}{\partial a_2} = 0.$$

После соответствующих преобразований получим систему двух уравнений:

$$\begin{gathered} a_2 - \frac{4}{315} a_1^2 a^5 \left(23 - 41 \cdot \mu\right) = 0; \\ a_1^3 a^{10} \frac{128Eh}{35a^2\left(1-\mu^2\right)} + a_1 \cdot a\left(\frac{64D}{a} - 4Eha_2 \cdot a^2 \frac{\left(23 - 41\cdot\mu\right)}{105\left(1-\mu^2\right)}\right) - p_0 = 0. \end{gathered} \tag{15}$$

Система (15) имеет решение только при $a_2 \neq 0$. После математических преобразований система уравнений сводится к кубическому уравнению

$$a_1^3 + a_1 \frac{h^2}{a^8} k - \frac{3\left(1-\mu^2\right)}{16Eha^8} = 0, \tag{16}$$

где $k = 11\,025 / \left(7031 + 1886\mu - 1681\mu^2\right)$.

Уравнение (16) решается относительно a_1 с помощью формулы Кардано [5], что позволяет найти функции прогибов [см. формулу (8)] и радиальных перемещений [см. формулу (10)].

С учетом величины параметра a_1, полученного из уравнения (16), рассчитаны максимальные прогибы гибкой пластины $w_{\max}$ для некоторых конструкционных материалов (a = 10 см; p_0 = 0,1 МПа). Проведено сравнение с величиной максимальных прогибов $w^*_{\max}$ в центре жесткой пластины.

На рис. 1 приведены графические зависимости соотношения максимальных прогибов жесткой и гибкой пластин $\dfrac{w^*_{\max}}{w_{\max}}$ от относительной толщины пластины $\dfrac{a}{h}$.

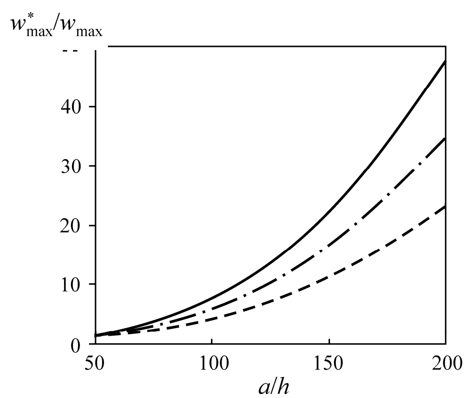

Рис. 1. Расчетные зависимости отношения прогибов пластины от относительной толщины для материалов: сплошная линия – алюминий; штрихпунктирная линия – титан; пунктирная линия – сталь

Из рис. 1 следует, что с ростом относительного размера пластины $\dfrac{a}{h}$ увеличивается отношение максимальных прогибов, рассчитанных по классической теории жестких пластин ($w^*_{\max}$) и по предлагаемой теории гибких пластин ($w_{\max}$). По мере утонения пластины возрастает роль потенциальной энергии деформации от мембранных усилий, что приводит к существенному различию величин прогибов по классической теории жестких пластин и предлагаемой теории гибких пластин.

Максимальные напряжения изгиба на контуре, соответствующие классической теории жестких пластин, равны

$$\sigma_r^{\max} = \pm \frac{3p_0 a^2}{4h^2}. \quad (17)$$

В соответствии с предлагаемой методикой в пластине действуют мембранные усилия, максимальные напряжения от которых при $r = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ равны

$$\sigma_r^{\max}\left(N_r\right) = \frac{N_r}{h} = \frac{32 E a_1^2 a^6}{27\left(1-\mu^2\right)}. \quad (18)$$

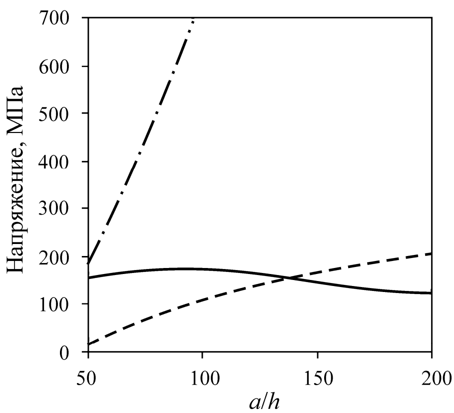

Рис. 2. Расчетные зависимости напряжений от относительной толщины пластины: штрихпунктирная линия – напряжения, рассчитанные по классической теории пластин; сплошная линия – напряжения от изгибающих моментов; пунктирная линия – напряжения от мембранных усилий

На рис. 2 представлены зависимости максимальных напряжений σ_r от величины относительного размера пластины $\dfrac{a}{h}$. Расчет выполнен для круглой стальной пластины, находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивностью $p_0 = 0{,}1$ МПа.

Из рис. 2 следует, что для относительно толстых пластин, когда $\dfrac{a}{h} < 50$, предлагаемая методика и классическая теория жестких пластин дают близкие результаты расчетов изгибающих моментов. При этом значения напряжений от мембранных усилий оказываются существенно ниже значений напряжений от изгибающих моментов. Однако с увеличением отношения $\dfrac{a}{h}$ напряжения от изгибающих моментов существенно различаются, что связано с увеличением роли мембранных усилий.

При отношении $\frac{a}{h} > 140$ мембранные напряжения становятся преобладающими над изгибными напряжениями.

Таким образом, предлагаемая методика позволяет более объективно оценить напряженное состояние гибких пластин, являющихся промежуточными в классификации по условиям нагружения между жесткими и абсолютно гибкими пластинами (мембранами). Учет мембранных усилий дает возможность произвести объективную оценку прочности гибких пластин с использованием соответствующих критериев прочности [6].

Данная методика может быть использована также при оценке технологических параметров при штамповке деталей с использованием эластичной, жидкостной или газовой среды [7]. Использование данной методики позволяет достаточно определить переход заготовки в пластическое состояние, который определяется условием пластичности [8]

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_t^2 - \sigma_r \sigma_t} = \sigma_T,$$

где σ_i – интенсивность напряжений; σ_T – предел текучести материала заготовки.

Таким образом, в работе предложена методика расчета круглых гибких пластин с использованием энергетического подхода и реализацией его с помощью вариационного метода Ритца–Тимошенко.

Показана возможность определения напряженно-деформированного состояния и оценки прочности круглых пластин при наличии больших прогибов.

На примере расчета изгиба защемленной по контуру круглой пластины, находящейся под действием равномерно распределенного давления, показаны особенности напряженно-деформированного состояния круглых пластин при наличии больших прогибов.

Предложенная методика может быть применена в технологических задачах обработки металлов давлением, в частности при расчетах параметров процессов листовой штамповки с использованием эластичной, жидкостной или газовой среды.

Список литературы

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 635 с.

2. Васильев В.В. О теории тонких пластин // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1992. – № 3. – С. 26–47.

3. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. – М.: Гостехиздат, 1956. – 419 с.

4. Гольденвейзер А.Л. К теории изгиба пластинок // Известия АН СССР. Отделение техн. наук. – 1958. – № 4. – С. 102–109.

5. Воднев В.Т., Наумович А.Ф., Наумович Н.Ф. Основные математические формулы: справ. – Минск: Вышэйшая школа, 1988. – 269 с.

6. Критерии прочности и расчет механической надежности конструкций / В.Н. Аликин, П.В. Анохин, Г.Л. Колмогоров, И.Е. Литвин; Перм. гос. техн. ун-т. – Пермь: 1999. – 160 с.

7. Исаченков Е.И. Штамповка резиной и жидкостью. – М.: Машиностроение, 1967. – 368 с.

8. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1968. – 400 с.

References

1. Timoshenko S.P., Voinovskii-Kriger S. Plastinki i obolochki [Plates and Shells]. Moscow, 1966. 635 p.

2. Vasil'ev V.V. O teorii tonkikh plastin [About theory of slim plates]. *Izvestiia Akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1992, no. 3, pp. 26-47.

3. Vol'mir A.S. Gibkie plastinki i obolochki [Flexible plates and Shells]. Moscow, 1956. 419 p.

4. Gol'denveizer A.L. K teorii izgiba plastinok [For the theory of bending plates]. *Izvestiia Akademii nauk SSSR*. Otdelenie tekhnicheskikh nauk, 1958, no. 4, pp. 102-109.

5. Vodnev V.T., Naumovich A.F., Naumovich N.F. Osnovnye matematicheskie formuly [Fundamental mathematics formulas]. Minsk, 1988. 269 p.

6. Alikin V.N., Anokhin P.V., Kolmogorov G.L., Litvin I.E. Kriterii prochnosti i raschet mekhanicheskoi nadezhnosti konstruktsii [Principles of

the strength and calculation of the mechanical reliability of the constructions]. Perm', 1999. 160 p.

7. Isachenkov E.I. Shtampovka rezinoi i zhidkost'iu [Stamping of the rubber and the liquid]. Moscow, 1967. 368 p.

8. Malinin N.N. Prikladnaia teoriia plastichnosti i polzuchesti [The applied theory of the plasticity and crawling]. Moscow, 1968. 400 p.

Получено 24.04.2016

Об авторах

Колмогоров Герман Леонидович (Пермь, Россия) – доктор технических наук, профессор кафедры «Динамика и прочность машин», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: dpm@pstu.ru).

Мельникова Татьяна Евгеньевна (Пермь, Россия) – кандидат технических наук, доцент кафедры «Динамика и прочность машин», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: dpm@pstu.ru).

About the authors

German L. Kolmogorov (Perm, Russian Federation) – Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Dynamics and Strength of Machines, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: dpm@pstu.ru).

Tatiana E. Mel'nikova (Perm, Russian Federation) – Ph.D. in Technical Sciences, Associate Professor, Department of Dynamics and Strength of Machines, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: dpm@pstu.ru).