Научная статья
DOI: 10.15593/2499-9873/2022.3.01
УДК 517.977.56

А.И. Агамалиева[1,2]

[1] Бакинский государственный университет, Баку,
Азербайджанская Республика

[2] Институт систем управления НАН Азербайджана,
Баку, Азербайджанская Республика

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСКРЕТНОГО АНАЛОГА ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Исследуется одна граничная задача оптимального управления дискретными двухпараметрическими системами с дискретным временем. Такие задачи представляют собой дискретные аналоги задач оптимального управления, описываемых интегродифференциальными уравнениями с частными производными первого порядка.

Начальная функция является управляемой и определяется как решение задачи Коши для нелинейного обыкновенного разностного уравнения, в правую часть которого входит сосредоточенное управление.

Функционал качества представляет собой сумму двух различных слагаемых и является функционалом типа Больца для рассматриваемой задачи оптимального управления.

Изучаются случаи произвольной, выпуклой и открытой области управления, определяющие соответствующий класс допустимых управлений.

Налагая различные естественные условия гладкости на правые части рассматриваемых двумерных и одномерных разностных уравнений, в предположении выпуклости аналога множества допустимых скоростей рассматриваемой системы с помощью модифицированного метода приращений функционала вычислено специальное приращение критерия качества и, исходя из его неотрицательности вдоль оптимального управления, доказан аналог дискретного принципа максимума Понтрягина.

В предположении о выпуклости области управления с использованием линеаризации слагаемых в формуле приращения функционала и специальной вариации допустимого управления доказан аналог линеаризованного условия максимума.

В отличие от непрерывного случая, линеаризованный принцип максимума не является следствием дискретного принципа максимума и имеет самостоятельное значение как необходимое условие оптимальности.

В случае открытой области управления на основе классической вариации управления вычислена первая вариация (в классическом смысле) функционала и с учетом того, что в случае открытой области управления первая вариация критерия качества равна нулю, с его помощью получен аналог уравнения Эйлера для рассматриваемой задачи оптимального управления.

Применяемая в работе схема позволяет в дальнейшем исследовать также случаи вырождения полученных необходимых условий оптимальности первого порядка и вывести новые, носящие конструктивный характер необходимые условия оптимальности второго порядка, позволяющие сузить множество допустимых управлений подозрительных на оптимальность.

Ключевые слова: математическая модель, дискретная система, задача Коши, формула приращения, сопряженная система, дискретный принцип максимума, линеаризованный принцип максимума, аналог уравнения Эйлера, допустимое управление, оптимальное управление, необходимое условие оптимальности.

A.I. Agamaliyeva[1,2]

[1] Baku State University, Baku, Azerbaijan Republic

[2] Institute of Control Systems of NAS Azerbaijan, Baku, Azerbaijan Republic

INVESTIGATION OF DISCRETE ANALOGUE OF ONE BOUNDARY PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL

In the paper, one boundary value problem of optimal control for discrete two-parameter systems with discrete time is investigated. Such problems are discrete analogues of optimal control problems described by integro-differential partial differential equations of the first order.

The initial function is controllable and is defined as the solution of the Cauchy problem for nonlinear ordinary difference equation, the right part of which includes concentrated control.

The quality functional presents the sum of two different terms and is a Boltz type functional for the optimal control problem under consideration.

The cases of arbitrary, convex and open control area defining the corresponding class of admissible controls are studied.

Imposing various natural smoothness conditions on the right-hand sides of the two-dimensional and one-dimensional difference equations under consideration, assuming the convexity of the analogue of the set of admissible velocities of the system under consideration, a special increment of the quality criterion is calculated using a modified functional increment method and, based on its non-negativity along the optimal control, an analogue of the discrete Pontryagin maximum principle is proved.

Assuming the convexity of the control area, by linearizing the terms in the functional increment formula and introducing a special variation of the admissible control, an analogue of the linearized maximum condition is proved.

In contrast to the continuous case, the linearized maximum principle is not a consequence of the discrete maximum principle and has an independent value as a necessary condition for optimality.

In the case of open control area, by introducing a classical variation of the control, the first variation (in the classical sense) of the functional is calculated and established that in the case of open control area, the first variation of the quality criterion equals zero, with its help, an analogue of the Euler equation for the optimal control problem under consideration is obtained.

The scheme used in the work also makes it possible to further investigate some cases of degeneration of the obtained necessary conditions of optimality of the first order and to deduce new, constructive necessary conditions of optimality of the second order, allowing to narrow down the set of permissible controls suspicious of optimality.

Keywords: mathematical models, discrete systems, Cauchy problem, increment formula, conjugated system, discrete maximum principle, linearized maximum principle, analogue of the Euler equation, admissible control, optimal control, necessary optimality condition.

Введение

В работах [1–7] и др. изучены задачи оптимального управления непрерывными и дискретными двухпараметрическими системами в предположении, что управляющая функция входит в правую часть рассматриваемого уравнения. Выведены различные необходимые условия оптимальности.

Предлагаемая работа посвящена исследованию одной дискретной двухпараметрической задачи оптимального управления в случае вхождения сосредоточенного управления в начальное условие. Отдельно изучаются случаи произвольной, выпуклой и открытой области управления.

Установлены необходимые условия оптимальности первого порядка.

1. Постановка задачи

Допустим, что управляемый дискретный процесс описывается системой разностных уравнений

$$z(t+1,x)=f\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right), \tag{1}$$

$$t=t_0,t_0+1,\ldots,t_1-1;\ \ x\in X=\{x_0,x_0+1,\ldots,x_1\}$$

с начальным условием

$$z(t_0,x)=a(x), x\in X, \tag{2}$$

где

$$y(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x_1} g\left(t,x,s,z(t,s)\right), \tag{3}$$

$$t=t_0,t_0+1,\ldots,t_1;\quad x\in X.$$

Здесь $f\ (t,\ x,\ z,\ y)$ и $g(t,\ x,\ s,\ z)$ – заданные n-мерные вектор-функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными для первой функции по z и y, для второй функции – по z, а – n-мерная дискретная вектор-функция, являющаяся решением задачи (дискретный аналог задачи Коши), t_0, t_1, x_0, x_1 – заданные числа, причем разности t_1-t_0, x_1-x_0 – натуральные числа.

$$a(x+1)=F\left(x,a(x),u(x)\right), x\in X, \tag{4}$$

$$a(x_0)=a_0, \tag{5}$$

где $F(x,a,u)$ – заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с $F_a(x,a)$, a_0 – заданный постоянный вектор, а $u(x)$ – r-мерный дискретный вектор управляющих функций со значениями из заданного непустого, замкнутого и ограниченного множества $U \subset R^r$, т.е.

$$u(x) \in U \subset R^r, \quad x \in X. \tag{6}$$

Каждую управляющую функцию $u(x)$ с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением.

Задача заключается в минимизации функционала $S(u)$

$$S(u) = \phi\left(a(x_1)\right) + \sum_{x=x_0}^{x_1} G\left(x, z(t_1, x)\right), \tag{7}$$

определенного с помощью функций $\phi(a(x_1))$ и $G(x, z(t, x))$ на решениях задачи (1)–(5), порожденных всевозможными допустимыми управлениями.

Допустимое управление $u(x)$ являющееся решением задачи о минимуме функционала (7) при ограничениях (1)–(6), как обычно, назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $\left(u(x),\ a(x),\ z(x),\ y(t,x)\right)$ – оптимальным процессом.

Рассматриваемая задача является дискретным аналогом одной задачи управления динамикой популяции из работ [1–6] и исследуется впервые.

Как видим, процесс управляется посредством выбора начального сосредоточенного управления, а начальная функция определяется как решение задачи Коши для нелинейного обыкновенного разностного уравнения. Сам процесс описывается двумерным нелинейным разностным уравнением.

В рассматриваемой задаче в предположении существования оптимального управления установлен ряд необходимых условий оптимальности первого порядка (дискретный принцип максимума, линеаризованное условие максимума, аналог уравнения Эйлера) при различных предположениях [7–15].

2. Аналог дискретного принципа максимума

Предположим, что $\left(u(x),\ a(x),\ z(t,x)\right)$ в рассматриваемой задаче является фиксированным допустимым процессом и при этом множество

$$F\left(x,a(x),U\right)=\left\{\alpha:\alpha=F\left(x,a(x),v(x)\right),v(x)\in U,\ x\in\left\{x_0,x_0+1,\ldots,x_1-1\right\}\right\} \quad (8)$$

выпукло при всех x.

Пусть $\varepsilon\in[0,1]$ – произвольное число, а $v(x)$ – произвольное допустимое управление. В силу предположения о выпуклости множества (8) можно записать «возмущенную» систему в виде

$$a(x+1;\varepsilon)=F\left(x,a(x;\varepsilon),u(x;\varepsilon)\right)$$

$$\equiv F\left(x,a(x),u(x)\right)+\varepsilon\Big(F\left(x,a(x;\varepsilon),v(x)\right)-F\left(x,a(x;\varepsilon),u(x)\right)\Big), \quad (9)$$

$$a(x_0;\varepsilon)=a(x_0)=a_0, \quad (10)$$

$$z(t+1,x;\varepsilon)=f\left(t,x,z(t,x;\varepsilon),y(t,x;\varepsilon)\right), \quad (11)$$

$$z(t_0,x;\varepsilon)=a(x;\varepsilon), \quad (12)$$

$$y(t,x;\varepsilon)=\sum_{x=x_0}^{x_1}g\Big(t,x,s,\big(z(t,s),z(t,s,\varepsilon)\big)\Big). \quad (13)$$

Положим

$$A(t,x)=\left.\frac{\partial z(t,x;\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0},B(t,x)=\left.\frac{\partial y(t,x;\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0},C(x)=\left.\frac{\partial a(x;\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}, \quad (14)$$

Учитывая условия гладкости, наложенные на правые части соотношений (1), (3), (4), из (9)–(13) получаем, что $A(t,x),B(t,x),C(x)$, определяемые соотношениями (14), являются решениями аналогов уравнений в вариациях записанных в виде

$$A(t+1,x)=$$
$$=\frac{\partial f\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)}{\partial z}A(t,x)+\frac{\partial f\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)}{\partial y}B(t,x), \quad (15)$$

$$A(t_0,x)=C(x), \quad (16)$$

$$B(t,x)=\sum_{x=x_0}^{x_i}\frac{\partial g\left(t,x,s,z(t,s)\right)}{\partial z}A(t,s), \quad (17)$$

$$C(x+1)=\frac{\partial F(x,a(x),u(x))}{\partial a}C(x)+ \\ +F(x,a(x),v(x))-F(x,a(x),u(x)), \tag{18}$$

$$C(x_0)=0. \tag{19}$$

При этом специальное приращение функционала цели, соответствующее допустимым управлениям $u(x;\varepsilon)$ и $u(x)$, имеет вид

$$S(u(x;\varepsilon))-S(u(x))=\varepsilon\frac{\partial\phi'(a(x_1))}{\partial a}C(x_1)+ \\ +\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_i}\frac{\partial G'(z(t_1,x))}{\partial z}A(t_1,x)+o(\varepsilon),$$

здесь и в дальнейшем – $'$ (штрих) операция транспонирования.

Пусть $p(t,x),q(t,x),\psi(x)$ – пока неизвестные n-мерные вектор-функции. Из соотношений (тождеств) (15), (17), (18) получаем, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}p'(t,x)A(t+1,x)= \\ =\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}p'(t,x)\cdot \\ \cdot\left[\frac{\partial f(t,x,z(t,x),y(t,x))}{\partial z}A(t,x)+\frac{\partial f(t,x,z(t,x),y(t,x))}{\partial y}B(t,x)\right], \tag{20}$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}q'(t,x)B(t,x)= \\ =\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}q'(t,x)\left[\sum_{s=x_0}^{x_1}\frac{\partial g(t,x,s,z(t,s))}{\partial z}A(t,s)\right], \tag{21}$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi'(x)C(x+1,x)=\left[\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi'(x)\frac{\partial F(x,a(x),u(x))}{\partial a}C(x)+\right.$$

$$+\psi'(x)\Big(F\big(x,a(x),v(x)\big)-F\big(x,a(x),u(x)\big)\Big)\Big]. \qquad (22)$$

Введем обозначения вида

$$H\big(x,a(x),u(x),\psi(x)\big)=\psi'(x)F\big(x,a(x),u(x)\big),$$

$$\Delta_{v(x)}H\big(x,a(x),u(x),\psi(x)\big)=$$
$$=H\big(x,a(x),v(x),\psi(x)\big)-H\big(x,a(x),u(x),\psi(x)\big).$$

С учетом введенных обозначений и тождеств (20)–(22) специальное приращение функционала (7), соответствующее допустимым управлением $u(x;\varepsilon)$ и $u(x)$, представляется в виде

$$\Delta S_\varepsilon(u)=S\big(u(x;\varepsilon)\big)-S\big(u(x)\big)=\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1}\frac{\partial G'(x,z,t_1,x)}{\partial z}A(t_1,x)+$$

$$+\varepsilon\frac{\partial\phi'\big(a(x_1)\big)}{\partial a}C(x_1)+\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi'(x)C(x+1)-$$
$$-\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi'(x)\frac{\partial F\big(x,a(x),u(x)\big)}{\partial a}C(x)-$$

$$-\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta_{v(x)}H\big(x,a(x),u(x),\psi(x)\big)+\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}p'(t,x)A(t+1,x)-$$

$$-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\Bigg[p'(t,x)\frac{\partial f\big(t,x,z(t,x),y(t,x)\big)}{\partial z}A(t,x)+$$

$$+p'(t,x)\frac{\partial f\big(t,x,z(t,x),y(t,x)\big)}{\partial y}B(t,x)\Bigg]+\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}q'(t,x)B(t,x)-$$

$$-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\sum_{x=x_0}^{x_1}q'(t,x)\frac{\partial g\big(t,x,s,z(t,s),z(t,s)\big)}{\partial z}A(t,s)+o(\varepsilon). \qquad (23)$$

Рассмотрим выражение

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi'(x) C(x+1).$$

Сделав в нем замену переменных $x+1=s,$ получим

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi'(x) C(x+1) = \sum_{s=x_0+1}^{x_1} \psi'(s-1) C(s) =$$

$$= \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi'(x-1) C(x) + \psi'(x_1-1) C(x_1) -$$

$$-\psi'(x_0-1) C(x_0).$$

Принимая во внимание (19), имеем

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi'(x) C(x+1) = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi'(x-1) C(x) + \psi'(x_1-1) C(x_1). \tag{24}$$

Далее, делая замену переменных $t+1=s,$ с помощью рассуждений, аналогичных приведенным в [9–11], получим

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1} p'(t,x) A(t+1,x) = \sum_{x=x_0}^{x_1} p'(t_1-1,x) A(t_1,x) -$$

$$-\sum_{x=x_0}^{x_1} p'((t_0-1,x)) A(t_0,x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1} p'(t-1,x) A(t,x).$$

$$-\sum_{x=x_0}^{x_1} p'((t_0-1,x)) A(t_0,x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1} p'(t-1,x) A(t,x). \tag{25}$$

Принимая во внимание тождества (24), (25), из формулы приращения (23) получаем специальное разложение функционала качества в виде

$$\Delta S_\varepsilon(u) = \varepsilon \frac{\partial \phi'(a(x_1))}{\partial a} C(x_1) + \varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial G'(z(t_1,x))}{\partial z} A(t_1,x) + \varepsilon \psi'(x_1-1) C(x_1) +$$

$$+\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi'(x-1)C(x)-\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta_{v(x)}H\left(x,a(x),u(x),\psi(x)\right)+$$

$$+\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1-1}p'(t_1-1,x)A(t_1,x)-\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1-1}p'\left((t_0-1,x)\right)A(t_0,x)+$$

$$+\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}p'(t_1-1,x)A(t,x)-$$

$$-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}p'(t,x)\frac{\partial f\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)}{\partial z}A(t,x)-$$

$$-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}p'(t,x)\frac{\partial f\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)}{\partial y}B(t,x)+\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}q'(t,x)B(t,x)-$$

$$-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\sum_{x=x_0}^{x_1}q'(t,s)\frac{\partial g\left(t,s,x,z(t,x)\right)}{\partial z}A(t,x)+o(\varepsilon). \qquad (26)$$

Если предполагать, что вектор-функции $\psi(x)$, $p(t,x)$ и $q(t,x)$ удовлетворяют соотношениям

$$\psi(x-1)=\frac{\partial F'\left(x,a(x),u(x)\right)}{\partial a}\psi(x)+p(t_0-1,x), \qquad (27)$$

$$\psi(x_1-1)=-\frac{\partial\phi\left(a(x_1)\right)}{\partial a}, \qquad (28)$$

$$\begin{aligned}p(t-1,x)&=\frac{\partial f'\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)}{\partial z}p(t,x)+\\&+\sum_{x=x_0}^{x_1}\frac{\partial g'(t,s,x)z(t,x)}{\partial z}q(t,s),\end{aligned} \qquad (29)$$

$$q(t,x)=\frac{\partial f'\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)}{\partial y}p(t,x), \qquad (30)$$

$$p(t_1-1,x)=-\frac{\partial G\left(z(t_1,x)\right)}{\partial z}, \qquad (31)$$

то разложение (26) примет вид

$$\Delta S_{\varepsilon}(u) = -\varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(x)} H\left(x, a(x), u(x), \psi(x)\right) + o(\varepsilon). \qquad (32)$$

Систему (27)–(31) назовем сопряженной системой [8–15] к рассматриваемой задаче (1)–(7).

Из разложения (32) следует

Теорема 1. Если множество (8) выпуклое, то для оптимальности допустимого управления $u(x)$ в задаче (1)–(7) необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(x)} H\left(x, a(x), u(x), \psi(x)\right) \le 0 \qquad (33)$$

выполнялось для всех $v(x) \in U,\ x = x_0, x_0+1, \ldots, x_1-1$.

Таким образом, в случае граничной задачи оптимального управления имеет место необходимое условие оптимальности (33) типа дискретного принципа максимума Л.С. Понтрягина.

3. Аналог линеаризованного условия максимума

В этом пункте предполагаем, что множество U выпуклое и вектор-функция $F(x, a, u)$ имеет непрерывную производную по u.

Пусть $u(x)$ – фиксированное допустимое управление, $\mu \in [0, 1]$ произвольное число, а $v(x)$ – произвольное допустимое управление.

Тогда в силу сделанных предположений «возмущенное» управление $u(x, \mu)$ можно определить по формуле

$$u(x, \mu) = (1-\mu)u(x) + \mu v(x). \qquad (34)$$

Рассмотрим «возмущенную» систему уравнений

$$z(t-1, x, \mu) = f\left(t, x, z(t, x, \mu), y(t, x, \mu)\right), \qquad (35)$$

$$y(t, x, \mu) = a(x, \mu), \qquad (36)$$

$$y(t, x, \mu) = \sum_{s=x_0}^{x_1} g\left(t, x, s, z(t, s, \mu)\right), \qquad (37)$$

$$\begin{aligned} a(x+1,\mu) &\equiv F\left(x, a(x,\mu) u(x,\mu)\right) \equiv \\ &\equiv F\left(x, a(x,\mu), u(x)+\mu\left[v(x)-u(x)\right]\right), \end{aligned} \tag{38}$$

$$a(x,\mu)=a_0, \tag{39}$$

Положим

$$\alpha(t,x)=\left.\frac{\partial z(t,x,\mu)}{\partial\mu}\right|_{\mu=0},\ \ \beta(t,x)=\left.\frac{\partial y(t,x,\mu)}{\partial\mu}\right|_{\mu=0},\ \ \gamma(x)=\left.\frac{\partial a(x,\mu)}{\partial\mu}\right|_{\mu=0}. \tag{40}$$

Принимая во внимания (40), из соотношений (35)–(39) с учетом гладкости правых частей соотношений (35), (37), (39) получаем, что $\alpha(t,x)$, $\beta(t,x)$ и $\gamma(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \alpha(t+1,x) &= \frac{\partial f\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)}{\partial z}\alpha(t,x)+ \\ &+\frac{\partial f\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)}{\partial y}\beta(t,x), \end{aligned} \tag{41}$$

$$\beta(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x_1}\frac{\partial g\left(t,x,s,z(t,s)\right)}{\partial z}\alpha(s,x), \tag{42}$$

$$\gamma(x+1)=\frac{\partial F\left(x,a(x),u(x)\right)}{\partial a}\gamma(x)+\frac{\partial F\left(x,a(x),u(x)\right)}{\partial u}\left(v(x)-u(x)\right), \tag{43}$$

$$\gamma(x_1)=0. \tag{44}$$

Далее запишем приращение функционала качества (7), соответствующее допустимым управлениям $u(x)$ и $u(x,\mu)$. Имеем:

$$\begin{aligned} &S\left(u(x,\mu)\right)-S(u)= \\ &=\mu\frac{\partial\phi'\left(a(x_1)\right)}{\partial a}\gamma(x_1)+\mu\sum_{x=x_0}^{x_1}\frac{\partial G'\left(z(t_1,x)\right)}{\partial z}\alpha(t_1,x)+o(\mu). \end{aligned} \tag{45}$$

Учитывая тождества (41)–(44), а также предполагая, что $p(t,x), q(t,x), \psi(x)$ являются решением сопряжённой системы (27)–(31), с рассуждениями, аналогичными рассуждениям, используемым при доказательстве разложения (32), доказывается, что разложение (45) может быть представлено в виде

$$S\left(u\left(x,\mu\right)\right)-S\left(u\right)=$$
$$=-\mu\sum_{x=x_0}^{x_1-1}H_u'\left(x,a\left(x\right),u\left(x\right),\psi\left(x\right)\right)\left(v\left(x\right)-u\left(x\right)\right)+o\left(\mu\right). \tag{46}$$

Из разложения (46) следует, что если $u\left(x\right)$ оптимальное управление, то

$$-\mu\sum_{x=x_0}^{x_1-1}H_u'\left(x,a\left(x\right),u\left(x\right),\psi\left(x\right)\right)\left(v\left(x\right)-u\left(x\right)\right)+o\left(\mu\right)\geq 0.$$

Из последнего неравенства в силу произвольности $\mu\in\left[0,1\right]$ следует

Теорема 2. Если в задаче (1)–(7) множество U выпукло, то для оптимальности допустимого управления $u\left(x\right)$ необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}H_u'\left(x,a\left(x\right),u\left(x\right),\psi\left(x\right)\right)\left(v\left(x\right)-u\left(x\right)\right)\leq 0$$

выполнялось для всех допустимых управлений $v\left(x\right)$.

Таким образом, в рассматриваемой задаче доказан аналог линеаризованного условия максимума.

4. Аналог уравнения Эйлера

Предположим, что в задаче (1)–(7) множество U открытое, а $F\left(x,a,u\right)$ имеет также непрерывную частную производную по u.

Пусть $\left(u\left(x\right),z\left(t,x\right),a\left(x\right)\right)$ фиксированный, а $\left(\bar{u}\left(x\right)=u\left(x\right)+\Delta u\left(x\right),\ \bar{x}\left(t,x\right)=z\left(t,x\right)+\Delta z\left(t,x\right),\ \bar{a}\left(x\right)=a\left(x\right)+\Delta a\left(x\right)\right)$ – произвольный допустимые процессы.

Допустим, что ε достаточно малое неотрицательное число, а $\delta u\left(x\right)\in R^r$, $x=x_0,\ x_0+1,\ldots,\ x_1-1$ произвольная r-мерная дискретная и ограниченная вектор-функция (допустимая вариация управления).

В силу открытости области управления U специальное приращение допустимого управления $u(x)$ можно определить по формуле

$$\Delta u(x;\varepsilon)=\varepsilon\delta u(x). \tag{47}$$

Пусть $\left(p(t,x),q(t,x),\psi(x)\right)$ является решением сопряженной системы (27)–(31).

Принимая во внимание, что $\left(p(t,x),q(t,x),\psi(x)\right)$ является решением сопряженной системы (27)–(31), специальная формула приращения функционала качества представляется в виде

$$S(u+\varepsilon\delta u)-S(u)=-\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1-1}H'_u\left(x,a(x),u(x),\psi(x)\right)\delta u(x)+o(\varepsilon).$$

Из этого разложения следует (см. например [7–15]), что первая вариация (в классическом смысле) критерия качества имеет вид

$$\delta^1 S(u;\delta u)=-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}H'_u\left(x,a(x),u(x),\psi(x)\right)\delta u(x).$$

Соответственно, вдоль оптимального управления $u(x)$ выполняется следующее

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}H'_u\left(x,a(x),u(x),\psi(x)\right)\delta u(x)=0$$

для всех $\delta u(x)\in R^r, x=x_0,x_0+1,\ldots,x_1-1.$

Используя произвольность допустимой вариации $\delta u(x)$, из последнего соотношения получаем следующее утверждение.

Теорема 3. Если множество U открытое, то для оптимальности допустимого управления $u(x)$ в задаче (1)–(7) необходимо, чтобы соотношение

$$H_u\left(\xi,a(\xi),u(\xi),\psi(\xi)\right)=0$$

выполнялось для всех $\xi=x_0,x_0+1,\ldots,x_1-1.$

Последнее соотношение является аналогом уравнения Эйлера для рассматриваемой задачи.

Благодарность. Автор выражает свою благодарность профессору К.Б. Мансимову за постановку задачи и замечания и уважаемому рецензенту за очень полезные замечания, способствовавшие улучшению первоначального варианта статьи.

Список литературы

1. Абакумов А.И. Управление и оптимизация в моделях эксплуатируемых популяций: автореф. дис. … д-ра физ-мат. наук. – Красноярск, 1992. – 42 с.

2. Абакумов А.И. Оптимальное управление популяцией с распределенными параметрами // Информатика и системы управления. – 2011. – №3(29). – С. 3–9.

3. Агамалыева А.И., Мансимов, К.Б. Необходимое условие оптимальности в одной дискретной задаче оптимального управления // Вестник Бак. ун-та. Серия: Физ.-мат. науки. – 2018. – № 3. – С. 20–28.

4. Агамалыева А.И., Мансимов, К.Б. Об одной задаче управления, описываемой системой интегро-дифференциальных уравнений // Вестник Томского Гос. ун-та. Серия: Управ. выч. техники и информатика. – 2017. – № 39. – С. 4–10.

5. Ainseba B., Anita S., Langlais M. Optimal control for a nonlinear age-structured population dynamic problem // Electronic journal of differential equations. – 2002. – № 28. – P. 1–9.

6. Букина А.В., Букин С.С. Исследование модели динамики популяций методами теории оптимального управления // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3, № 3. – С. 59–66.

7. Мансимов К.Б., Марданов М.Д. Качественная теория оптимального управления системами Гурса–Дарбу. – Баку: Изд-во ЭЛМ. – 2010. – 3601 с.

8. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981. – 400 с.

9. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1971. – 438 с.

10. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. – М.: Книжный дом «Либроком», – 2011. – 256 с.

11. Методы оптимизации / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова [и др.]. – Минск: Изд-во «Четыре четверти», 2011. – 472 с.

12. Габасов Р., Кириллова Ф.М. К теории необходимых условий оптимальности для дискретных систем // Управляемые системы. – 1979. – №18. – С. 14–25.

13. Мансимов К.Б. Интегральные необходимые условия оптимальности квазиособых управлений в системах Гурса – Дарбу // Автоматика и телемеханика. – 1993. – №5. – С. 36–43.

14. Мансимов К.Б. Дискретные системы. – Баку: Наука. – 2013. – 151 с.

15. Мансимов К.Б., Масталиев Р.О. Оптимизация процессов, описываемых разностными уравнениями Вольтерра: монография. – LAP, 2017. – 262 с.

References

1. Abakumov A.I. Upravlenie i optimizatsiia v modeliakh ekspluatiruemykh populiatsii [Management and optimization in models of exploited populations], Abstract of Doctor's degree dissertation. Krasnoyarsk, 1992, 42 p.

2. Abakumov A.I. Optimal'noe upravlenie populiatsiei s raspredelennymi parametrami [Optimal population management with distributed parameters]. *Informatika i sistemy upravleniia*, 2011, no. 3 (29), pp. 3-9.

3. Agamalyeva A.I., Mansimov, K.B. Neobkhodimoe uslovie optimal'nosti v odnoi diskretnoi zadache optimal'nogo upravleniia [A necessary optimality condition in one discrete optimal control problem]. *Vestnik Bak. un-ta., Ser. Fiziko-matematicheskie nauki*, 2018, no. 3, pp. 20-28.

4. Agamalyeva A.I., Mansimov, K.B. Ob odnoi zadache upravleniia, opisyvaemoi sistemoi integro-differentsial'nykh uravnenii [On a control problem described by a system of integro-differential equations]. *Vestnik Tomskogo Gos. un-ta. Ser. uprav. vych. tekhniki i informatika*, 2017, no. 39, pp. 4-10.

5. Ainseba B., Anita S., Langlais M. Optimal control for a nonlinear age-structured population dynamic problem [Optimal control for a nonlinear age-structured population dynamic problem]. *Electronic journal of differential equations*. 2002, no. 28. pp.1-9.

6. Bukina A.V., Bukin S.S. Issledovanie modeli dinamiki populiatsii metodami teorii optimal'nogo upravleniia [Study of the population dynamics model by methods of optimal control theory]. *Izvestiia Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriia Matematika.* 2010, no. 3. pp. 59-66.

7 Mansimov K.B., Mardanov M.D. Kachestvennaya teoriya optimal'nogo upravleniya sistemami gursa–Darbu [Qualitative theory of optimal control of Goursat–Darboux systems]. Baku, ELM Publ., 2010, 3601 p.

8. Vasil'ev F.P. Metody resheniia ekstremal'nykh zadach [Methods for solving extreme problems]. Moscow, Nauka, 1981, 400 p.

9. Gabasov R., Kirillova F.M. Kachestvennaia teoriia optimal'nykh protsessov [Qualitative theory of optimal processes]. Moscow, Nauka, 1971, 438 p.

10. Gabasov R., Kirillova F.M. Osobye optimal'nye upravleniia [Special optimal controls]. Moscow, Knizhnyi dom Librokom, 2011, 256 p.

11. Gabasov R., Kirillova F.M. and etc. Metody optimizatsii [Optimization methods]. Minsk, Chetyre chetverti, 2011. 472 p.

12. Gabasov R., Kirillova F.M. K teorii neobkhodimykh uslovii optimal'nosti dlia diskretnykh system [On the theory of necessary optimality conditions for discrete systems]. *Upravlyaemye Sistemy*, 1979. no 18. pp. 14-25.

13. Mansimov K.B. Integral'nyye neobkhodimyye usloviya optimal'nosti kvaziosobykh upravleniy v sistemakh Gursa–Darbu [Integral necessary optimality conditions for quasi-singular controls in Goursat–Darboux systems]. *Automation and Remote Control*, 1993, vol. 5, pp. 36-43.

14. Mansimov K.B. Diskretnye sistemy [Discrete systems]. Baku, Nauka, 2013, 151 p.

15. Mansimov K.B., Mastaliev R.O. Optimizatsiia protsessov, opisyvaemykh raznostnymi uravneniiami Vol'terra [Optimization of processes described by Volterra difference equations]. LAP. 2017, 262 p.

Об авторе

Агамалыева Айгун Исвахан кызы (Баку, Азербайджанская Республика) – докторант института систем управления НАН Азербайджана, Бакинский государственный университет (AZ1141, Баку, ул. Б. Вахабзаде, 68, e-mail: agamaliyeva88@gmail.com).

About the author

Aygun I. Agamalieva (Baku, Azerbaijan Republic) – Doctoral student, Institute of Control Systems of NAS Azerbaijan, Baku State University (68, B. Vahabzade Str., Baku, AZ1141, e-mail: agamaliyeva88@gmail.com).

Библиографическое описание статьи согласно ГОСТ Р 7.0.100–2018:

Агамалиева, А. И. Исследование дискретного аналога одной граничной задачи оптимального управления / А. И. Агамалиева. – текст : непосредственный. – DOI: 10.15593/2499-9873/2022.3.01 // Прикладная математика и вопросы управления / Applied Mathematics and Control Sciences. – 2022. – № 3. – С. 9–25.

Цитирование статьи в изданиях РИНЦ:

Агамалиева, А. И. Исследование дискретного аналога одной граничной задачи оптимального управления / А. И. Агамалиева // Прикладная математика и вопросы управления. – 2022. – № 3. – С. 9–25. – DOI: 10.15593/2499-9873/2022.3.01

Цитирование статьи в references и международных изданиях

Cite this article as:

Agamaliyeva A.I. Investigation of discrete analogue of one boundary problem of optimal control. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2022, no. 3, pp. 9–25. DOI: 10.15593/2499-9873/2022.3.01 (*in Russian*)

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.
Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.
Вклад. 100 %.

Поступила: 10.04.2022
Одобрена: 20.04.2022
Принята к публикации: 01.09.2022