Научная статья
DOI 10.15593/2499-9873/2022.3.02
УДК 533.693.4+517.929

И.А. Аксененко

Пермский национальный исследовательский
политехнический университет, Пермь, Россия

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ СТЕРЖНЯ МЕТОДАМИ ДИСКРЕТНОГО ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Изучается вопрос о продольном изгибе стержня, состоящего из жестких звеньев, соединенных шарнирами. Показано, что, как и в классическом варианте сплошного стержня, задача может быть поставлена как вариационная задача о минимуме энергии, но заданная функционалом, определенным на классе функций с дискретной областью определения. На функционалы такого вида перенесены основные положения классического вариационного исчисления: найдена формула вариации, доказано обобщение основной леммы вариационного исчисления, получен аналог уравнения Эйлера, которое является разностным уравнением. Применяя полученные результаты и известные свойства классических разностных уравнений, удалось решить аналог задачи Эйлера для двух видов шарнирного стержня: для стержня, состоящего из звеньев одинаковой длины, и для произвольного выбора длин звеньев. В обоих случаях удалось найти критическую силу Эйлера, а также уравнение и вид кривой прогиба.

Ключевые слова: задача Эйлера о продольном изгибе, шарнирный стержень, вариационные принципы в механике, разностные уравнения.

I.A. Aksenenko

Perm National Research Polytechnic University,
Perm, Russian Federation

SOLVING THE PROBLEM OF LONGITUDINAL BENDING OF A ROD BY METHODS OF DISCRETE CALCULUS OF VARIATIONS

The question of the longitudinal bending of a rod consisting of rigid links connected by hinges is being studied. It is shown that, as in the classical version of a solid rod, the problem can be posed as a variational minimum energy problem, but given by a functional defined on a class of functions with a discrete domain of definition. The main provisions of the classical calculus of variations are transferred to functionals of this type: the formula of variation is found, a generalization of the main lemma of the calculus of variations is proved, an analogue of the Euler equation, which is a difference equation, is obtained. Applying the results obtained and the known properties of classical difference equations, we succeeded in solving an analogue of the Euler problem for two types of a hinge rod: for a rod consisting of links of the same length, and for an arbitrary choice of lengths of links. In both cases we find the critical Euler force, as well as the equation and the form of the deflection curve.

Keywords: Euler's problem of longitudinal bending, hinge rod, variational principles in mechanics, difference equations.

Введение

Вариационные принципы при решении задач механики используются давно: хорошо известен, например, принцип наименьшего действия, который утверждает, что любой оптимальный физический процесс (т.е. реализуемый природой) происходит с наименьшими затратами энергии. Соответствующая математическая постановка означает, что функционал, выражающий суммарную энергию, для оптимального процесса должен достигать минимума.

Развитие вариационного исчисления как самостоятельной математической дисциплины позволило решить ряд задач, которые сейчас считаются классическими: в частности, задача Эйлера о продольном изгибе стержня может быть поставлена и решена как вариационная задача.

Большинство вариационных задач ставится на множестве непрерывных функций и, как следствие, большинство исследуемых функционалов имеют вид интегралов. Заметим, однако, что такой выбор пространства функций и вида функционалов не является единственно возможным. Есть задачи, в которых исходный аргумент естественнее считать дискретным, что автоматически приводит к замене непрерывной функции последовательностью, а интеграла – суммой.

В данной работе рассматривается задача, которую можно считать дискретным аналогом задачи Эйлера о продольном изгибе стержня. Для решения этой задачи оказалось удобным изначально считать аргумент дискретным, а вместо интеграла энергии записывать сумму.

Исследование этого функционала на экстремум потребовало переноса на дискретный случай известных утверждений классического вариационного исчисления, что составило первую часть настоящей работы. Во второй части работы полученные результаты применяются к исследованию задачи о продольном изгибе шарнирного стержня.

1. Описание объекта и постановка задачи

Напомним формулировку и решение классической задачи Эйлера о продольном изгибе стержня.

Задача 1. *Стержень длиною l опирается своими концами и подвержен давлению P (рис. 1). При определённом значении P (критическая сила Эйлера) происходит продольный изгиб стержня. Требуется определить наименьшую величину силы P, дающую продольный изгиб.*

Рис. 1. Непрерывный стержень

Как известно из [1], решение задачи 1 сводится к определению минимума интеграла энергии

$$J(\varphi) = \int_0^l \left(EI\varphi'^2 - P\varphi^2 \right) dx ,$$

где E – модуль упругости, I – наименьший момент инерции поперечных сечений стержня, φ – угол касательной кривой прогиба с горизонтальной осью. Функционал $J(\varphi)$ дополнен граничными условиями $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}(l) = 0$.

Решая данную задачу как вариационную, находим наименьшее значение критической силы Эйлера $P_{\min} = \frac{\pi^2}{l^2} EI$. Уравнение кривой прогиба выглядит следующим образом: $y(x) = \frac{C_2}{\alpha} \sin \frac{\pi x}{l} = C \sin \frac{\pi x}{l}$.

Теперь рассмотрим задачу, которую можно считать дискретным аналогом задачи 1.

Задача 2. *Стержень длиною l разделён шарнирами на единичные участки. Стержень опирается своими концами и подвержен давлению P (рис. 2). Шарниры, находящиеся на одинаковом расстоянии друг от друга, считаем идеальными, т.е. они дают стержню свободно изгибаться. При определённом значении P (критическая сила Эйлера) происходит продольный прогиб стержня. Требуется определить наименьшую величину силы P, дающую продольный изгиб.*

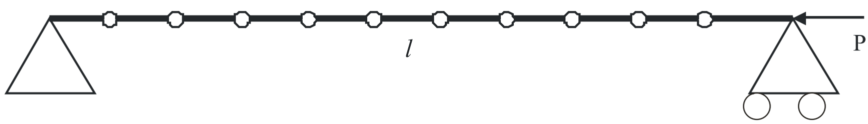

Рис. 2. Дискретный стержень

Как будет показано ниже, задачу 2 тоже можно рассматривать как вариационную, но возникающий там функционал энергии не является интегральным, так как область определения искомых функций в такой постановке удобно считать целочисленной. Для решения этой (дискретной) задачи следует разработать соответствующий математический аппарат – дискретное вариационное исчисление.

2. Дискретное вариационное исчисление

2.1. *Вариация функционала. Необходимое условие экстремума*

Напомним основные теоремы и определения из классического вариационного исчисления.

Пусть X – произвольное линейное нормированное пространство. Если каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие по определенному закону единственное вещественное число $f(x)$, то говорят, что на X определен *функционал* f. Кратко этот факт отображают соотношением $f: X \to \mathbb{R}$. Пространство X называют *областью определения* функционала.

Так как значения функционала – числа, то на функционалы легко переносятся понятия наибольшего и наименьшего значения, которые в случае их достижимости называют максимумом и минимумом. Для краткости речи эти понятия обозначают одним термином – экстремумы.

Определение 1. Точка $x_0 \in X$ называется точкой локального максимума (соответственно – минимума) функционала f, если для некоторого $\varepsilon > 0$ при всех $x \in X$, для которых $\|x - x_0\| < \varepsilon$, выполнено неравенство $f(x_0) \geq f(x)$ (соответственно – $f(x_0) \leq f(x)$).

Определение 2 [2]**.** Вариацией функционала f в точке x_0 называется число $\delta f(x_0)$, определяемое по формуле

$$\delta f(x_0) = \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x_0 + \alpha h)\bigg|_{\alpha=0}. \tag{1}$$

Здесь $h \in X$, α принимает значения в некотором интервале, содержащем точку $\alpha = 0$.

Теорема 1 [2]. *Пусть в точке* x_0 *существует вариация* $\delta f(x_0)$. *Тогда, если* x_0 *– точка экстремума функционала* f *, то* $\delta f(x_0) = 0$.

Теорема 1 является аналогом необходимого условия экстремума для функций. При переходе от функций к функционалам роль производной начинает играть вариация функционала. Эта теорема лежит в основе классического вариационного исчисления.

Заметим, что в теореме 1 не накладывается никаких условий ни на пространство X, ни на вид функционала f, но в большинстве учебников и монографий по вариационному исчислению выбирается в качестве X пространство дифференцируемых до некоторого заданного порядка функций, на которых рассматриваются функционалы, имеющие вид определенных интегралов (однократных, двойных, тройных и т. д.).

Простейшей из вариационных задач считается так называемая *задача с закрепленными границами:* найти в указанном классе функций такую, на которой функционал $f(x)$ принимал бы наибольшее или наименьшее из всех возможных значений, т.е.

$$\begin{cases} f(x) = \int\limits_a^b F(t, x, \dot{x}) \to extr \\ x(a) = A, \quad x(b) = B. \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 2 [2]**.** Если x_0 – точка экстремума вариационной задачи (2), то она является решением **уравнения Эйлера:**

$$F_x(t, x, \dot{x}) - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) = 0 .$$

2.2. *Дискретная вариационная задача и аналог уравнения Эйлера*

Очевидно, что выбирать в качестве X пространство непрерывных на отрезке функций, а в качестве функционала определенный интеграл – это только одна из многих возможностей. Предположим, что множество, на котором определяются допустимые функции – не отрезок $[a, b]$, а набор целочисленных точек $\{0, 1, 2, ..., l, l+1\}$, на которых определяются вещественные числа $x(0), x(1), x(2), ..., x(l), x(l+1)$, т.е. *задаются функции целочисленного аргумента.* Для таких функций в задаче (2) интеграл естественно заменить суммой, и мы получаем дискретный аналог вариационной задачи (2):

$$\begin{cases} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{l} F(n, x(n), \Delta x(n)) \to \text{extr} \\ x(0) = A, \qquad x(l+1) = B, \end{cases} \tag{3}$$

где $\Delta x = x(n+1) - x(n)$ – конечная разность.

Покажем, что на задачу (3) можно перенести ряд основных теорем из классического вариационного исчисления.

Из теоремы 1 следует, что для определения точек экстремума функционала f следует найти его вариацию по формуле (1) и приравнять ее к нулю.

Обозначим $h(n) = x(n) - x_0(n)$, $F_x = \dfrac{\partial F}{\partial x}, F_{\Delta x} = \dfrac{\partial F}{\partial \Delta x}$ и найдём вариацию функционала (3), используя свойства конечных разностей и формулы дифференцирования:

$$\delta f(x_0) = \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x_0 + \alpha h)\Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{n=0}^{l} F(n, x_0 + \alpha h, \Delta x_0 + \alpha \Delta h)\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \sum_{n=0}^{l} F_x(n, x_0 + \alpha h, \Delta x_0 + \alpha \Delta h) \cdot h + F_{\Delta x}(n, x_0 + \alpha h, \Delta x_0 + \alpha \Delta h) \cdot \Delta h \Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \sum_{n=0}^{l} F_x(n, x_0, \Delta x_0) \cdot h(n) + F_{\Delta x}(n, x_0, \Delta x_0) \cdot \Delta h(n).$$

Для дальнейших преобразований выведем формулу «суммирования по частям», для этого используем формулу произведения конечных разностей [3]:

$$\sum_{n=0}^{l} u(n) \cdot \Delta v(n) = \sum_{n=0}^{l} \Delta(u(n) \cdot v(n)) - \sum_{n=0}^{l} v(n+1) \cdot \Delta u(n). \tag{4}$$

Рассмотрим подробнее слагаемое $\sum\limits_{n=0}^{l} \Delta(u(n) \cdot v(n))$:

$$\sum_{n=0}^{l} \Delta(u(n) \cdot v(n)) = \Delta(u(0)v(0)) + \Delta(u(1)v(1)) + \ldots + \Delta(u(l)v(l)) =$$

$$= u(0)\Delta v(0) + v(1)\Delta u(0) + u(1)\Delta v(1) + v(2)\Delta u(1) + \ldots +$$
$$+ u(l)\Delta v(l) + v(l+1)\Delta u(l) =$$

$$= u(0)v(1) - u(0)v(0) + v(1)u(1) - v(1)u(0) + u(1)v(2) -$$
$$-u(1)v(1) + v(2)u(2) - v(2)u(1) + \ldots$$

$$\ldots + u(l)v(l+1) - u(l)v(l) + v(l+1)u(l+1) - v(l+1)u(l) =$$
$$= u(l+1)v(l+1) - u(0)v(0)$$

Преобразуем второе слагаемое в правой части (4):

$$\sum_{n=0}^{l} v(n+1)\Delta u(n) = \sum_{n=1}^{l+1} v(n)\Delta u(n-1).$$

После этих преобразований формула (4) будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{l} u(n)\Delta v(n) &= v(l+1)u(l+1) - v(0)u(0) - \sum_{n=0}^{l+1} v(n)\Delta u(n-1) = \\ &= u(n)v(n)\Big|_0^{l+1} - \sum_{n=1}^{l+1} v(n)\Delta u(n-1). \end{aligned} \tag{5}$$

Применим формулу (5) к формуле вариации функционала:

$$\delta f(x_0) = \sum_{n=0}^{l} F_x(n, x_0(n), \Delta x_0(n)) \cdot h(n) + F_{\Delta x}(n, x_0(n), \Delta x_0(n)) \cdot \Delta h(n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{l} F_x(n, x_0(n), \Delta x_0(n)) \cdot h(n) + F_{\Delta x}(n, x_0(n), \Delta x_0(n)) \cdot h(n)\Big|_0^{l+1} -$$
$$-\sum_{n=0}^{l+1} \Delta SF_{\Delta x}(n, x_0, \Delta x_0) \cdot h(n).$$

Здесь через S обозначен «оператор сдвига»:

$$Su(n) = \begin{cases} u(n-1), & n \in \mathbb{N}, \\ 0, & n \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

Из задачи (3) и определения $h(n)$ получаем:

$$h(0) = x(0) - x_0(0) = A - A = 0,$$
$$h(l+1) = x(l+1) - x_0(l+1) = B - B = 0,$$

следовательно, вариация $\delta f(x_0)$ принимает вид

$$\delta f(x_0) = \sum_{n=0}^{l+1} \left(F_x(n, x_0(n), \Delta x_0(n)) - \Delta SF_{\Delta x} \right) h(n). \qquad (6)$$

Далее нам понадобится следующий дискретный аналог основной леммы вариационного исчисления.

Лемма 1. *Пусть* $p(0), p(1), ..., p(m)$ *– заданный набор чисел. Если при любом числовом наборе* $y(0), y(1), ..., y(m)$ *таком, что* $y(0) = y(m) = 0,$ *справедливо равенство* $\sum_{k=0}^{m} p(n) y(n) = 0$, то $p(1) = p(2) = ... = p(m-1) = 0$.

Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что утверждение леммы неверно, т.е. найдется такое число $n_0 \in \{1, 2, ..., m-1\}$, что $p(n_0) \neq 0$. Построим числовой набор $y(n)$ по следующему правилу

$$y(n) = \begin{cases} 0, \; k = \overline{0, n_0 - 1}, \\ \neq 0, \;\; n = n_0, \\ 0, \;\; k = \overline{n_0 + 1, m}. \end{cases}$$

Тогда $\sum_{k=0}^{m} p(n) y(n) = 0 + 0 + ... + p(n_0) y(n_0) + 0 + ... + 0 = p(n_0) y(n_0) \neq 0$, что несовместимо с условиями леммы. Мы пришли к противоречию, следовательно, наше допущение неверно и $p(n) = 0$ при всех $n = \overline{1, m-1}.$

Теперь, применяя лемму 1, приведём задачу (3) к разностному уравнению с заданными граничными условиями.

Теорема 3. *Если* x_0 *– точка экстремума вариационной задачи (3), то она является решением* ***разностного уравнения Эйлера****:*

$$F_x(n, x_0(n), \Delta x_0(n)) - \Delta SF_{\Delta x} = 0. \qquad (7)$$

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что $\delta f(x_0) = 0$, следовательно, сумма в формуле (6) равна 0 при любом числовом наборе $h(0), h(1), ..., h(l+1)$ таком, что $h(0) = h(l+1) = 0$. Следовательно, мы находимся в условиях применимости леммы 1, откуда следует выполнение равенства (7) при всех $n = \overline{1,l}$.

Напомним, что при $n = 0$ и $n = l + 1$ заданы граничные условия (см. задачу (3)), используя которые находим частное решение уравнения (7).

3. Дискретная задача Эйлера

3.1. *Шарнирный стержень с равными звеньями*

Вернёмся к задаче 2 и, применяя полученные выше формулы, найдём её решение.

Пусть E – модуль упругости, I – наименьший момент инерции поперечных сечений стержня, $\varphi(n)$ – угол между кусками балки l_n и l_{n+1} в n-й точке с шарниром. Требуется определить наименьшую величину силы P, дающую продольный прогиб.

По аналогии с задачей 1 решение задачи будет сводиться к поиску минимума потенциальной энергии после деформации.

Потенциальная энергия изгиба определяется формулой: $U_1 = \frac{1}{2} EI \sum_{n=0}^{l} M^2(n)$, где $M(n)$ – момент прогиба в l_n. При сжатии конца стержня на величину

$$\sigma = \sum_{n=0}^{l} (1 - \cos\varphi(n))$$

потенциальная энергия стержня уменьшается на

$$U_2 = P\sigma = P \sum_{n=0}^{l} (1 - \cos\varphi(n)).$$

Если потенциальная энергия до деформации была равна нулю, то после деформации она выразится формулой

$$U = U_1 - U_2 = \sum_{n=0}^{l} \left(\frac{1}{2} EIM^2(n) + P\cos\varphi(n) - P \right).$$

Так как $M = \dot{\varphi} \approx \Delta\varphi(n)$, а для малых значений $\varphi(n)$ справедливо $\cos\varphi(n) \approx 1 - \frac{\varphi^2(n)}{2}$, то

$$U = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{l}\left(EI(\Delta\varphi(n))^2 - P\varphi^2(n)\right).$$

В случае равновесия потенциальная энергия принимает минимальное значение. Поэтому решение задачи сводится к определению минимума функционала

$$J(\varphi) = \sum_{n=0}^{l}\left(EI\left(\Delta\varphi(n)\right)^2 - P\varphi^2(n)\right)$$

с граничными условиями $\Delta\varphi(0) = 0$, $\Delta\varphi(l-1) = 0$.

Применяя к функционалу $J(\varphi)$ теорему 3, получаем:

$$\begin{aligned}
&F_{\varphi} = -2P\varphi(n),\\
&F_{\Delta\varphi} = 2EI\Delta\varphi(n),\\
&\Delta F_{\Delta\varphi} = 2EI\Delta^2\varphi(n) = 2EI(\varphi(n+2) - 2\varphi(n+1) + \varphi(n)),\\
&S\Delta F_{\Delta\varphi} = 2EI(\varphi(n+1) - 2\varphi(n) + \varphi(n-1)).
\end{aligned}$$

Следовательно, уравнение Эйлера имеет вид:

$$EI\varphi(n+1) + (P - 2EI)\varphi(n) + EI\varphi(n-1) = 0 \tag{8}$$

или

$$\varphi(n+1) + \alpha\varphi(n) + \varphi(n-1) = 0, \tag{9}$$

где $\alpha = \dfrac{P-2EI}{EI}$. Заметим, что $\alpha = \dfrac{P}{EI} - 2 > -2$. Решение (9), как известно по данным [3], зависит от дискриминанта характеристического уравнения $\lambda^2 + \alpha\lambda + 1 = 0$, знак которого определяют три случая, приводящие к существенно различным решениям.

Случай 1. Если $\alpha^2 > 4$, то, с учетом сделанного выше замечания, $\alpha > 2$. Характеристическое уравнение имеет два вещественных различных корня λ_1 и λ_2. По теореме Виета $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 + \lambda_2 = -\alpha < 0$, следовательно, $\lambda_1 = 1/\lambda_2 < 0$. Будем считать, что $\lambda_1 = \lambda < -1$, тогда $\lambda = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{\alpha^2 - 4} - \alpha\right)$, а решение уравнения (9) имеет вид

$$\varphi(n) = C_1\lambda^n + C_2\lambda^{-n}.$$

Найдем $\Delta\varphi(n)$:

$$\Delta\varphi(n) = C_1\lambda^n(\lambda-1) + C_2\lambda^{-n}(1/\lambda-1) = (\lambda-1)\left(C_1\lambda^n - C_2\lambda^{-n-1}\right).$$

Подставляя первое граничное условие, имеем:

$$\Delta\varphi(0) = (\lambda-1)\left(C_1 - C_2\lambda^{-1}\right) = 0.$$

Так как $\lambda \neq 1$, то $C_2 = C_1\lambda$, следовательно,

$$\Delta\varphi(n) = C_1(\lambda-1)\left(\lambda^n - \lambda^{-n}\right).$$

Из второго граничного условия имеем равенство

$$\Delta\varphi(l-1) = C_1(\lambda-1)\left(\lambda^{l-1} - \lambda^{-l+1}\right) = 0,$$

которое выполняется только при $C_1 = 0$, что соответствует случаю тривиального положения равновесия. Итак, случай $\alpha > 2$ или $P > 4EI$ не дает устойчивого прогиба.

Случай 2. Пусть $\alpha^2 = 4$. Так как $\alpha \neq -2$, то $\alpha = 2$. Характеристическое уравнение принимает вид $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, откуда следует $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, а решение (9) имеет вид

$$\varphi(n) = (C_1 n + C_2)\left(-1\right)^n.$$

Так как $\Delta\varphi(n) = (-1)^{n+1}\left((2n+1)C_1 + 2C_2\right)$, то из граничных условий получаем $C_1 + 2C_2 = 0$, $(2l-1)C_1 + 2C_2 = 0$, откуда следует, что $C_1 = C_2 = 0$. Значит, случай $\alpha = 2$ или $P = 4EI$ также не дает устойчивого прогиба.

Случай 3. Остается случай $\alpha^2 < 4$. В этом случае характеристическое уравнение имеет корни $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$. Эти корни будут комплексно-сопряжёнными, т.е. $\lambda_1 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\lambda_2 = r(\cos\theta - i\sin\theta)$. По теореме Виета $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$, следовательно,

$r(\cos\theta + i\sin\theta)\cdot r(\cos\theta - i\sin\theta) = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2 = 1$, значит, $r = 1$, а решение уравнения (9) имеет вид

$$\varphi(n) = C_1\cos n\theta + C_2\sin n\theta,$$

где $\theta = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{4-\alpha^2}}{\alpha}\right)$. Применяя граничное условие $\Delta\varphi(0)=0$, получим:

$$\varphi(n) = C_1(\cos n\theta + \operatorname{tg}\theta/2 \cdot \sin n\theta) = \frac{C_1}{\cos\theta/2}\cos(n\theta - \theta/2). \tag{10}$$

Тогда из условия, что $\Delta\varphi(l-1)=0$ найдём минимальную силу:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi(l-1) &= \frac{C_1}{\cos\theta/2}\Delta\big(\cos(n\theta-\theta/2)\big)\Big|_{n=l-1} = \\ &= -2\frac{C_1}{\cos\theta/2}\sin\theta/2\cdot\sin\theta(l-1)=0.\end{aligned} \tag{11}$$

Так как нас интересует ненулевой прогиб, то $C_1 \neq 0$. Функция $\sin\theta l$ обращается в нуль при $l-1=\dfrac{k\pi}{\theta}(k=0,1,2,...)$, так что (11) не будет выполнено, если $(l-1)\theta<\pi$, и наименьшее значение $(l-1)\theta$, при котором оно выполнено, – это $(l-1)\theta=\pi$. Из определения θ получаем $\dfrac{4}{\alpha^2}=1+\operatorname{tg}^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$, следовательно, $\alpha=2\cos\theta.$ Подставляя $\alpha=\dfrac{P}{EI}-2$ и $\theta=\dfrac{\pi}{(l-1)}$, получаем, что наименьшее значение критической силы Эйлера равно

$$P_{\min} = 2EI\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{l-1}\right)\right), \tag{12}$$

так как при $P<P_{\min}$ прогиб стержня равен нулю. Заметим, что найденная формула реализуется только при $\alpha^2<4$, т.е. при $0<P<4EI$ и при $l\geq 4$.

Для полноты картины найдем вид кривой прогиба. Так как при малых значениях φ имеем $\operatorname{tg}\varphi\approx\varphi$, то $y(x)$ будет задаваться кусочно-линейной функцией, угловой коэффициент каждого звена которой равен $\varphi(n)$. Найдём первую прямую. Так как при $x\in[0,1]$ имеем $\dot{y}(x)=\varphi(1)$, то $y(x)=\varphi(1)x+C$. Из граничного условия $y(0)=0$ получаем, что $C=0$, тогда $y(x)=\varphi(1)x$. Рассуждая аналогичным образом, найдем уравнения всех остальных звеньев:

$$y(x)=\begin{cases}\varphi(1)x, \quad x\in[0,1],\\ y(1)+\varphi(2)(x-1), \quad x\in[1,2],\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ y(k)+\varphi(k+1)(x-k), \quad x\in[k,k+1],\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ y(l-1)+\varphi(l)(x-l-1), \quad x\in[l-1,l].\end{cases} \tag{13}$$

Так как звенья непрерывно стыкуются, из (13) получаем для $y(k)$ следующие формулы:

$$y(1)=\varphi(1), \quad y(2)=\varphi(1)+\varphi(2),$$
$$y(3)=\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3), \ \dots, \ y(l)=\sum_{k=1}^{l}\varphi(k).$$

Найдём $y(n)$, используя равенство (10) и формулу для суммы косинусов [4]:

$$y(n)=\sum_{k=1}^{n}\varphi(k)=\frac{C_1}{\cos\theta/2}\sum_{k=1}^{n}\cos(\theta k-\theta/2)=C\sin(\theta n),$$

где $C=\dfrac{C_1}{\sin\theta}$. Для того, чтобы построить кривую прогиба, достаточно теперь отметить на плоскости точки с координатами $(n,y(n))$ и соединить их ломаными.

3.2. Шарнирный стержень со звеньями разной длины

Рассмотрим обобщение задачи 2: пусть длины звеньев стержня не одинаковы (но рационально соизмеримы).

Задача 3. Стержень длиною l разделён шарнирами на участки произвольной целочисленной длины. Стержень опирается своими концами и подвержен давлению Р (рис. 3). Шарниры, находящиеся на расстоянии l_n от начала стержня, считаем идеальными, т.е. они дают стержню свободно изгибаться. При определённом значении Р (критическая сила Эйлера) происходит продольный прогиб стержня. Требуется определить наименьшую величину силы Р, дающую продольный изгиб.

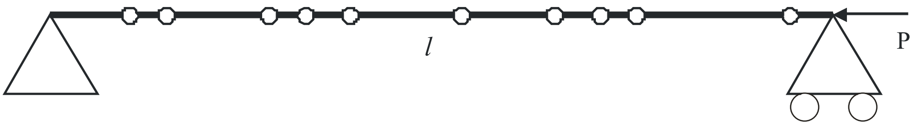

Рис. 3. Дискретный стержень с шарнирами и звеньями разной длины

Решение. Пусть E – модуль упругости, I – наименьший момент инерции поперечных сечений стержня, $\varphi(n)$ – угол между кусками балки l_n и l_{n+1} в n-й точке с шарниром. Требуется определить наименьшую величину силы P, дающую продольный прогиб.

Чтобы использовать результаты раздела 3.1, можно применить следующий прием: разделим стержень на одинаковые звенья так, чтобы существующие шарниры попали в деления, а пустые деления заменим на виртуальные шарниры (на рис. 4 они обозначены цветом).

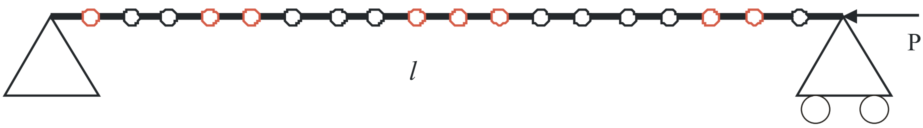

Рис. 4. Стержень с виртуальными шарнирами

Таким образом, решение задачи снова сводится к поиску минимума функционала, выражающего потенциальную энергию после деформации:

$$J(\varphi) = \sum_{n=0}^{l} \left(EI \left(\Delta\varphi(n) \right)^2 - P\varphi^2(n) \right).$$

Для этого функционала были найдены экстремали $\varphi(n)$ (формула (10)) и $P_{\min}$ (формула (12)). Отличие результата только в том, что равенство

$$\varphi(n) = \frac{C_1}{\cos\theta/2}\cos(n\theta - \theta/2) = C\cos(n\theta - \theta/2)$$

будет интересовать нас не при всех n, а лишь при $n = 0, l_1, l_2, l_3, ..., l$.

Далее, так как виртуальные шарниры не дают прогибаться стержню и по сути являются точками отрезка, составляющего кусок стержня, то значения угла в этих точках будут равны между собой и равны значению угла реального шарнира, находящегося в начале отрезка.

Найдем вид кривой прогиба. Рассуждения, аналогичные тем, что были проведены при решении задачи 2, приводят к следующим уравнениям:

$$y(x) = \begin{cases} \varphi(l_1)x, \quad x \in [0, l_1], \\ y(l_1) + \varphi(l_2)(x - l_1), \quad x \in [l_1, l_2], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y(l_k) + \varphi(l_{k+1})(x - l_k), \quad x \in [l_k, l_{k+1}], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y(l_{m-1}) + \varphi(l_m)(x - l_{m-1}), \quad x \in [l_{m-1}, l_m]. \end{cases}$$

Из этих равенств следует, что $y(l_k) = C\sum_{m=1}^{k}\varphi(l_m)(l_m - l_{m-1})$, а так как формула для $\varphi(l_m)$ уже найдена выше, то можно легко построить кривую прогиба, которая будет кусочно-линейной.

Список литературы

1. Ванько В.И. Очерки об устойчивости элементов конструкций. – М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015.

2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Эдиториал УРСС, 2000.

3. Романко В.К. Разностные уравнения: учебное пособие. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.

4. Цыпкин А.Г., Цыпкин Г.Г. Математические формулы. Алгебра. Геометрия. Математический анализ: справочник. – М.: Наука, 1985.

References

1. Vanko V.I. Essays on the stability of structural elements // Publishing House of Bauman Moscow State Technical University, M., 2015.

2. Elsholts L.E. Differential equations and calculus of variations // Editorial URSS, M., 2000.

3. Romanko V.K. Difference equations // Textbook /BINOM. Laboratory of Knowledge, 2006.

4. Tsypkin A.G., Tsypkin G.G. Mathematical formulas. Algebra. Geometry. Mathematical analysis: Handbook // Nauka, M., 1985.

Об авторе

Аксененко Илья Александрович (Пермь, Россия) – студент III курса кафедры «Вычислительная математика, механика и биомеханика», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: ilya156@list.ru)

About the author

Ilya A. Aksenenko (Perm, Russian Federation) – 3rd year student of the Department of Computational Mathematics, Mechanics and Biomechanics, PNRPU (29, Komsomolsky Ave., Perm, 614990, e-mail: ilya156@list.ru)

Библиографическое описание статьи согласно ГОСТ Р 7.0.100–2018:

Аксененко, И. А. Решение задачи о продольном изгибе стержня методами дискретного вариационного исчисления / И. А. Аксененко. – текст : непосредственный. – DOI: 10.15593/2499-9873/2022.3.02 // Прикладная математика и вопросы управления / Applied Mathematics and Control Sciences. – 2022. – № 3. – С. 26–42.

Цитирование статьи в изданиях РИНЦ:

Аксененко, И. А. Решение задачи о продольном изгибе стержня методами дискретного вариационного исчисления / И. А. Аксененко // Прикладная математика и вопросы управления. – 2022. – № 3. – С. 26–42. – DOI: 10.15593/2499-9873/2022.3.02

Цитирование статьи в references и международных изданиях

Cite this article as:

Aksenenko I.A. Solving the problem of longitudinal bending of a rod by methods of discrete calculus of variations. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2022, no. 3, pp. 26–42. DOI: 10.15593/2499-9873/2022.3.02 (*in Russian*)

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.
Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.
Вклад. 100 %.

Поступила: 10.04.2022
Одобрена: 20.04.2022
Принята к публикации: 01.09.2022