Научная статья
DOI: 10.15593/2499-9873/2022.4.01
УДК 519.853

А.В. Ганичева[1], А.В. Ганичев[2]

[1]Тверская государственная сельскохозяйственная академия, Тверь, Россия
[2]Тверской государственный технический университет, Тверь, Россия

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Актуальность данной работы обусловлена широким распространением во всех сферах жизнедеятельности важных практических задач, которые могут быть решены методами нелинейного программирования. Для каждого класса задач нелинейного программирования применяются свои методы решения или используются численные (итерационные) алгоритмы оптимизации. Поэтому важной проблемой является разработка простых и наглядных методов решения данного класса задач. Алгоритмы, реализующие методы нелинейного программирования, должны быть эффективными и не требовать больших затрат вычислительных ресурсов.

В работе исследуется проблема аналитической оптимизации задач нелинейного программирования. Целью является разработка нового приближенного метода решения задач оптимизации нелинейной функции при нелинейных ограничениях в виде равенств. Для этого производится аппроксимация (разложение в ряд) целевой функции и ограничений. Все переменные считаются ограниченными сверху и снизу. Целевая функция и ограничения считаются бесконечно дифференцируемыми по совокупности аргументов, а также все их производные предполагаются ограниченными по абсолютной величине заданным числом.

Доказана теорема об условном максимуме целевой функции при заданных ограничениях, результаты которой являются обоснованием разработанного метода. Так как разработанный метод оптимизации является приближенным, то оценена погрешность предлагаемого представления целевой функции и функций-ограничений. В задачах прикладного характера часто границы изменения переменных задаются приближенно и их можно корректировать. Кроме того, можно корректировать и точку, относительно которой функции разлагаются в ряды. Поэтому в статье проанализирована чувствительность оптимального решения задачи при изменении точки разложения в ряд функций при разных значениях координат левых границ при поиске максимума функции.

Для пояснения работы метода подробно разобран конкретный числовой пример. Для его решения применялось моделирование в среде MS Excel. На основе полученных результатов построены графики исследования чувствительности решения задачи при изменении исходных данных.

Ключевые слова: целевая функция, оптимальное решение, ряд, погрешность, точность, формула Стирлинга, переменные, границы.

A.V. Ganicheva[1], A.V. Ganichev[2]

[1]Tver State Agricultural Academy, Tver, Russian Federation
[2]Tver State Technical University, Tver, Russian Federation

APPROXIMATE METHOD OF OPTIMIZATION OF NONLINEAR PROGRAMMING PROBLEMS

Currently, the problem of choosing the optimal solution is one of the most important and urgent problems in industry, economy, agriculture and the military sphere. Methods and approaches of the theory of nonlinear programming are used to solve many applied optimization problems. The main difficulty of nonlinear optimization is the lack of a universal method for solving this class of problems. To solve this problem, special methods are being developed for solving particular nonlinear programming problems, for example, for positive or limited initial data

The paper investigates the problem of analytical optimization of nonlinear programming problems. The purpose of this work is to develop a new approximate method for solving optimization problems of a nonlinear function under nonlinear constraints in the form of equalities. To do this, an approximation (expansion in a series) of the objective function and constraints is performed. All variables are considered bounded at the top and bottom. The objective function and constraints are considered infinitely differentiable by the set of arguments, and all their derivatives are assumed to be limited in absolute value by a given number.

In this article, the theorem on the conditional maximum of the objective function under given constraints is proved. the results of which are the justification of the developed method. Since the developed optimization method is approximate, the error of the proposed representation of the objective function and constraint functions is estimated. In problems of an applied nature, the boundaries of variable changes are often set approximately and they can be adjusted. In addition, it is possible to adjust the point relative to which the functions are decomposed into series. Therefore, the article analyzes the sensitivity of the optimal solution of the problem when changing the decomposition point into a series of functions for different values of the coordinates of the left boundaries when searching for the maximum of the objective function.

To explain the operation of the method, a specific numerical example is analyzed in detail. Modeling in the MS Excel environment was used to solve it. Graphs of the sensitivity study of the solution of the problem when changing the initial data are constructed.

Nonlinear programming models are used, for example, to solve the following practically important issues: minimizing costs in the sale of products, optimizing consumer choice, maximizing production volume, determining the rational behavior of an individual in a given situation, rational use of resources, forming an optimal portfolio of securities.

Keywords: objective function, optimal solution, series, error, accuracy, Stirling formula, variables, boundaries.

Введение

Для задач нелинейного программирования (НП), в отличие от задач линейного программирования, нет единого метода решения, аналогичного симплекс-методу [1]. Поэтому для каждого класса задач НП применяются свои методы решения. Многие из этих методов изложены в фундаментальных трудах по НП [2; 3]. На основе анализа научных публикаций можно выделить следующие направления исследований в данной области:

• аналитические методы оптимизации, использующие модифицированную функцию Лагранжа [4] и теорему Куна – Таккера [5; 6];

• численные итерационные методы [7; 8];

• приближенные алгоритмы на основе алгоритмов аппроксимации задач НП [9; 10], в том числе линейной [11; 12];

• приближенная робастная формулировка задачи, использующая линеаризацию множества неопределенностей [13].

Одним из направлений решения задач оптимизации является наложение ограничений на условия задачи. Например, в статье [14] разработан метод решения с нелинейной и дифференцируемой целевой функцией, линейными ограничениями (интервалами возможных значений аргументов – переменных) и условием нормировки аргументов. В работе [15] предложен метод максимизации линейной функции при одном линейном ограничении с положительными коэффициентами, в статье [16] поиск квазиоптимального решения производится с помощью анализа координат проекций на гиперплоскости (алгоритм проектирования), поиск оптимального решения осуществляется путем задания приращений ограничениям (алгоритм приращений).

Целью данной работы является разработка приближенного метода решения задач НП путем аппроксимаций (разложения в ряды) целевой функции и ограничений.

1. Материалы и методы

Рассматриваемая задача формулируется следующим образом. Требуется найти переменные $x_1,...,x_n$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\varphi_q(x_1, x_2, ..., x_n) = b_q,\ q = \overline{1,k} \tag{1}$$

и сообщающие абсолютный максимум (минимум) целевой функции

$$L = f(x_1, x_2, ..., x_n). \tag{2}$$

При этом все переменные удовлетворяют ограничениям

$$d_i \le x_i \le l_i,\ i = \overline{1,n}.$$

Рассмотрим случай максимизации. При минимизации у функции (2) ставится знак «–».

Исходя из оценок для x_i, можно оценить φ_q, подставив в каждое неравенство (1) вместо x_i сначала левую, а потом правую границу. Тогда общая правая граница для φ_q будет рассматриваться как минимальная из полученной правой и данной b_q при $q=\overline{1,k}$.

Будем рассматривать функции φ_q и L бесконечно дифференцируемыми по совокупности аргументов, т.е. разлагающимися в ряды в окрестности некоторой точки $A(a_1,a_2,...,a_n)$, содержащей многогранник $(d_1 \le x_1 \le l_1)\times(d_2 \le x_2 \le l_2)\times...\times(d_n \le x_n \le l_n)$.

Тогда $L(x_1,x_2,...,x_n)=L(a_1,a_2,...,a_n)+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial x_i}(a_1,a_2,...,a_n)\cdot(x_i-a_i)+$

$$+\frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(a_1,a_2,...,a_n)\cdot(x_i-a_i)\cdot(x_j-a_j)+...+R_m(x_1,x_2,...,x_n),$$

где $$R_m=\frac{1}{m!}\sum_{i_1=1}^{n}...\sum_{i_m=1}^{n}\frac{\partial^m L}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_m}}(X_1,X_2,...,X_n)\cdot(x_{i_1}-a_{i_1})...(x_{i_m}-a_{i_m}), \tag{3}$$

$$X_i=a_i+\theta\cdot x_i,\ 0<\theta<1,\ i=\overline{1,n}.$$

Отсюда следует, что область дифференцируемости функций L, φ_q должна содержать многогранник

$$(a_1+\theta d_1 \le a_1+\theta x_1 \le a_1+\theta l_1)\times...\times(a_n+\theta d_n \le a_n+\theta x_n \le a_n+\theta l_n). \tag{4}$$

Координаты точки A определим позднее, но будем считать, что $d_i<a_i<l_i$, $(i=\overline{1,n})$. Введем обозначение:

$$y_i=(x_i-a_i),\ y_{ij}=(x_i-a_i)(y_j-a_j),\ y_{ijk}=(x_i-a_i)(x_j-a_j)(x_k-a_k),...,$$

$y_{i_1,i_2,...,i_m}=(x_{i_1}-a_{i_1})(x_{i_2}-a_{i_2})...(x_{i_m}-a_{i_m})$, здесь $i,j,k,i_1,i_2,...,i_m=\overline{1,n}$.

Пусть $L(a_1,a_2,...,a_n)=c_0$, $\frac{\partial L}{\partial x_i}(a_1,a_2,...,a_n)=c_i$,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(a_1,a_2,...,a_n)=c_{ij},\ \frac{\partial^m L}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_m}}(X_1,X_2,...,X_n)=c_{i_1,i_2,...,i_m}.$$

Отсюда находим:

$$L = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i y_i + \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_{ij} + \frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{ijk} y_{ijk} + \\ \ldots + \frac{1}{m!}\sum_{i_1=1}^{n}\ldots\sum_{i_m=1}^{n} c_{i_1\ldots i_m}\ldots y_{i_1\ldots i_m}. \tag{5}$$

Аналогичное представление получается для функций $\varphi_q(x_1, x_2, ..., x_n)$. Во избежание громоздкости выписывать его не будем. Это аналог формулы (5), но вместо L стоит φ_q, вместо коэффициентов «c» будут стоять соответствующие коэффициенты «b», связанные с производными функций φ_q: c_{q0}, c_{qi}, c_{qij}, $c_{qijk}, \ldots, c_{qi_1\ldots i_m}$.

Пусть все функции L и φ_q, а также все их производные ограничены по абсолютной величине числом M. Для оценки числа M вычисляются все производные функций L, φ_q до m-го порядка включительно и оцениваются с избытком, исходя из того, что $d_i \le a_i \le l_i \;\; (i = \overline{1,n})$.

Покажем, как оценивается погрешность R_m, аналогично будут оцениваться погрешности функций φ_q.

Сначала на основе оценок для переменных $x_i \;\; (i = \overline{1,n})$ находим соответствующие оценки для переменных «y». Например,

$$d_i - a_i \le y_i \le l_i - a_i \; (i = \overline{1,n}),\; (d_i - a_i)(d_j - a_j) \le y_{ij} \le (l_i - a_i)(l_j - a_j) \\ (i, j = \overline{1,n}) \text{ и т.д.} \tag{6}$$

Согласно формуле Стирлинга,

$$m! = \sqrt{2\pi m}\cdot\left(\frac{m}{e}\right)^m \cdot e^{\frac{\theta_1}{12m}} \;\; (0 < \theta_1 < 1). \tag{7}$$

С учетом этого формулу (3) запишем в виде:

$$|R_m| \le \frac{|M|\cdot m\cdot\left|(x_{i_1} - a_{i_1})\ldots(x_{i_m} - a_{i_m})\right|}{\sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m \cdot e^{\frac{\theta_1}{12m}}}. \tag{8}$$

Здесь $|M|$ – максимальное значение производной $\dfrac{\partial^m L}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_m}}$ при $i_1 \in \overline{1,n}$, …, $i_m \in \overline{1,n}$ в точке, удовлетворяющей условию (4).

Пусть $a_{ij} = k_{ij} \cdot l_{ij}$ $(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m})$ и $k_{ij} \geq 1$ (например, $k_{ij} = 1{,}1$,), $l = \max_{ij} \left| l_{ij} \right|$ и $k = \min_{ij} k_{ij}$. Тогда правая часть (8) не превосходит

$$c_m = \frac{|M| \cdot (el)^m (1-k)^m}{\sqrt{2\pi m} \cdot (m)^{m-1}}. \tag{9}$$

Предположим, что $c_m \leq \varepsilon$, где ε – сколь угодно малое положительное число, т.е.

$$m + m\ln l + m\ln|1-k| \leq m\ln m + \ln\varepsilon + \frac{1}{2}\ln(2\pi/m) + \ln|M|. \tag{10}$$

При выполнении этого условия погрешность $|R_m|$ будет сколь угодно малой.

Затем система (1) представляется в виде системы

$$\begin{cases} z_1 = b_1^0 + \sum_{j=1}^{s} b_{1j} z_{1,k+j}, \\ z_2 = b_2^0 + \sum_{j=1}^{s} b_{2j} z_{2,k+j}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_k = b_k^0 + \sum_{j=1}^{s} b_{kj} z_{k,k+j}. \end{cases} \tag{11}$$

Здесь z_1, $z_{1,k+j}$ $(i = \overline{1,k},\ j = \overline{1,s}) \in B = \left\{ y_i, y_{ij}, \ldots, y_{i_1 \ldots im} \right\}$, s равно количеству слагаемых во множестве B без множества $\{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$.

Поэтому проверка выполнения условия (10) начинается при $m = 3$. Если оно не выполняется, то полагаем $m = m + 1$ и т.д.

Итак, с точностью $\varepsilon > 0$ функция (2) может быть представлена суммой (5). Аналогичные представления имеют функции (1). А именно:

$$\sum_{j=1}^{n} b_{qj} y_j = -\sum_{i,j=1}^{n} b_{qij} y_{ij} - \sum_{i,j,k=1}^{n} b_{qijk} y_{ijk} - \sum_{i_1 i_2 \ldots i_m = 1}^{n} b_{q_1 i_2 \ldots i_m} y_{1 i_2 \ldots i_m} + b_q + b_q^0, \tag{12}$$

$q=\overline{1,m}$, b_q^0 – значение функции φ_q в точке $(a_1, a_2, ..., a_m)$.

При этом выполняются ограничения (6). Не нарушая общности, рассмотрим случай, когда $n \ge q$. Приведем левые части уравнений системы (12) к диагональному виду (11) с коэффициентом 1 при переменных в левой части. Тогда

$$y_q = \sum_{i=q+1}^{n} r_{qj} y_i + \sum_{i,j=1}^{n} r_{qij} y_{ij} + \sum_{i,j,k=1}^{n} r_{qijk} y_{ijk} + ... + \sum_{i_1 i_2 ... i_m =1}^{n} r_{q i_1 i_2 ... i_m} y_{1 i_2 ... i_m} + r_q + r_q^0 . \quad (13)$$

Если $n < q$, то в (13) часть переменных у каждого уравнения уходят из правой части в левую.

Определим, как это сделано в [15], с учетом того, что $d_i < a_i$ и $l_i > a_i$ для коэффициентов в правой части (11) на основе (6) значения переменных $\beta_1, ..., \beta_n$, β_{ij}, β_{ijk}, $\beta_{i_1 i_2 ... i_m}$ следующим образом:

$$\beta_i = \begin{cases} d_i - a_i, \text{ если } c_i < 0, \\ l_i - a_i, \text{ в противном случае,} \end{cases} \quad (14)$$

$i = \overline{q+1, n}$;

$$\begin{cases} \beta_{ij} = (d_i - a_i)(d_j - a_j), \text{ если } c_{ij} + \sum_{p=1}^{n} c_p \cdot r_{pij} < 0, \\ \beta_{ij} = (l_i - a_i)(l_j - a_j), \text{ в противном случае,} \end{cases} \quad (15)$$

здесь $i, j = \overline{1, n}$. Аналогично

$$\begin{cases} \beta_{ijk} = (d_i - a_i)(d_j - a_j)(d_k - a_k), \text{ если } c_{ijk} + \sum_{p=1}^{n} c_p \cdot r_{pijk} > 0, \\ \beta_{ij} = (l_i - a_i)(l_j - a_j)(l_k - a_k), \text{ в противном случае,} \end{cases} \quad (16)$$

$i, j, k = \overline{1, n}$ и т. д.

Наконец

$$\begin{cases} \beta_{i_1 i_2 ... i_m} = (d_{i_1} - a_{i_1})...(d_{i_m} - a_{i_m}), \text{ если } c_{i_1 i_2 ... i_m} + \sum_{p=1}^{n} c_p \cdot r_{i_1 i_2 ... i_m} < 0, \\ \beta_{i_1 i_2 ... i_m} = (l_{i_1} - a_{i_1})...(l_{i_m} - a_{i_m}), \text{ в противном случае,} \end{cases} \quad (17)$$

$i_1 i_2 ... i_m = \overline{1,n}$.

Теорема

Условный максимум функции L при выполнении условий (6), (10), (13), (14), (15), (16), (17) с точностью ε будет равен

$$L_{\max} = c_0 + \sum_{i=q+1}^{n} c_i \beta_i + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} \beta_{ij} + ... + \sum_{i_1 i_2 ... i_m = 1}^{n} c_{i_1 ... i_m} \beta_{i_1 ... i_m} + \\ + \sum_{p=1}^{n} c_p (r_q + r_q^0 + \sum_{i,j=1}^{n} r_{pij} \beta_{ij} + ... + \sum_{i_1 i_2 ... i_m = 1}^{n} r_{i_1 ... i_m} \beta_{i_1 ... i_m}). \tag{18}$$

Доказательство.

Обозначим через L_1 правую часть (17). Допустим, что в точке $(y_1^0, ..., y_n^0, y_{11}^0, ..., y_{1n}^0, ..., y_{n...n}^0)$ функция L принимает максимальное значение, равное L_0. Тогда L_0 можно представить в виде, где правая часть отличается от правой части L_1 только тем, что вместо β_{ij} стоит y_{ij}^0 $(i, j = \overline{1,n})$, вместо β_{ijk} стоит y_{ijk}^0 $(i, j, k = \overline{1,n})$ и т.д.

Найдем разность $L_1 - L_0$. Имеем:

$$L_1 - L_0 = \sum_{i=q+1}^{n} c_i (\beta_i - y_i^0) + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} (\beta_{ij} - y_{ij}^0) + ... + \sum_{i_1, i_2, ..., i_m = 1}^{n} c_{i_1 ... i_m} (\beta_{i_1 ... i_m} - y_{i_1 ... i_m}^0) + \\ + \sum_{p=1}^{n} c_p (\sum_{i,j=1}^{n} r_{pij} (\beta_{ij} - y_{ij}^0) + \sum_{i,j,k=1}^{n} r_{pijk} (\beta_{ijk} - y_{ijk}^0) + ... \\ + \sum_{i_1, i_2, ..., i_m = 1}^{n} r_{pi_1 ... i_m} (\beta_{i_1 ... i_m} - y_{i_1 ... i_m}^0) = \\ = \sum_{i=q+1}^{n} (\beta_i - y_i^0) \cdot c_i + \sum_{i,j=1}^{n} (\beta_{ij} - y_{ij}^0)(c_{ij} + \sum_{p=1}^{n} c_p \cdot r_{pij}) + \sum_{i,j,k=1}^{n} (\beta_{ijk} - y_{ijk}^0)(c_{ijk} + \\ + \sum_{p=1}^{n} c_p \cdot r_{pijk}) + ... + \sum_{i_1, i_2, ..., i_m = 1}^{n} (\beta_{i_1 ... i_m} - y_{i_1 ... i_m}^0)(c_{i_1 ... i_m} + \sum_{p=1}^{n} c_p \cdot r_{i_1 ... i_m}).$$

Из (14)–(17) следует, что слагаемые в (18) неотрицательны. Отсюда следует, что $L_1 \geq L_0$. Кроме того, выполняется условие (6).

Теорема доказана.

Если условие (6) не будет выполнено, то возможна, исходя из практической реализации, корректировка ограничений на переменные или координат точки *A*. Это будет показано на конкретном примере.

2. Результаты и их обсуждение

Рассмотрим конкретный пример.

Максимизируется функция

$$L = e^{x_1} \cdot x_2 + 2x_1 x_2 \tag{19}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1^2 + x_1 x_2^2 = 6, \\ x_1 - 2x_2 = 0, \\ 0,5 \le x_1 \le 2, \\ 0,2 \le x_2 \le 1. \end{cases} \tag{20}$$

Имеем: $d_1 = 0,5;\ d_2 = 0,2;\ l_1 = 2;\ l_2 = 1.$

Считаем: $a_1 = 1 \cdot 1,1 = 1,1;\ a_2 = 0,2 \cdot 1,1 = 0,22.$

Пусть $m = 3$, тогда

$$L = e^{a_1} \cdot a_2 + 2a_1 a_2 + (e^{a_1} \cdot a_2 + 2a_2)(x_1 - a_1) + (e^{a_1} + 2a_1)(x_2 - a_2) +$$

$$+(e^{a_1} \cdot a_2)(x_1 - a_1)^2 + 2(e^{a_1} + 2)(x_1 - a_1)(x_2 - a_2) + \frac{1}{6}(e^{a_1 + \theta x_1} \cdot x_2)(x_1 - a_1)^3 +$$

$$+\frac{1}{2} e^{a_1 + \theta x_1}(x_1 - a_1)^2 (x_2 - a_2);$$

$$\varphi_1 = 2a_1^2 + a_1 a_2^2 + (2a_1 + a_2^2)(x_1 - a_1) + 2a_1 a_2 (x_2 - a_2) + (x_1 - a_1)^2 +$$

$$+2a_2(x_2 - a_2)(x_1 - a_1) + a_1(x_2 - a_2)^2 + (x_2 - a_2)^2 (x_1 - a_1);$$

$$\varphi_2 = a_1 - 2a_2 + (x_1 - a_1) - 2(x_2 - a_2).$$

Оценим $|M|$. Имеем

$$|M(L)| \le e^{1,1+2} = 21,9;\ |M(\varphi_1)| \le 2,2484;\ |M(\varphi_2)| = 2.$$

Отсюда $\max\{M(L), M(\varphi_1), M(\varphi_2)\} = 21,9$.

Проверка выполнения условия (10) при $m = 3$ и $|M| = 21,9$:

$$3 + 3\ln 2 + 3\ln 0,1 \le \ln \varepsilon + 3\ln 3 + \frac{1}{2}\ln(2\pi/3) + \ln 21,9\ .$$

Можно показать, что данное неравенство выполняется при $\varepsilon = 0,0002$.

Пусть $\varepsilon = 0,0002$. Тогда с точностью ε

$$L = e^{a_1} \cdot a_2 + 2a_1a_2 + (e^{a_1} \cdot a_2 + 2a_2)(x_1 - a_1) + (e^{a_1} + 2a_1)(x_2 - a_2) +$$

$$+0,5(e^{a_1} \cdot a_2)(x_1 - a_1)^2 + (e^{a_1} + 2)(x_1 - a_1)(x_2 - a_2);$$

$$\varphi_1 = 2a_1^2 + a_1a_2^2 + (2a_1 + a_2^2)(x_1 - a_1) + 2a_1a_2(x_2 - a_2) + (x_1 - a_1)^2 +$$

$$+2a_2(x_2 - a_2)(x_1 - a_1) + a_1(x_2 - a_2)^2;$$

$$\varphi_2 = a_1 - 2a_2 + (x_1 - a_1) - 2(x_2 - a_2), \text{ т.е.}$$

$$L = 1,1009y_1 + 3,4442y_2 + 0,6609y_{11} + 10,008y_{12} + 1,1449;$$

$$\varphi_1 = 2,4732 + 2,2484y_1 + 0,484y_2 + y_{11} + 0,88y_{12} + 2,2y_{22};$$

$$\varphi_2 = 0,66 + y_1 - 2y_2.$$

Составим систему $\begin{cases} \varphi_1 = 6 \\ \varphi_2 = 0 \end{cases}$ и приведем ее к диагональному виду:

$$y_1 = -0,803y_{11} - 0,3534y_{12} - 0,8834y_{22} + 1,352;$$

$$y_2 = -0,4915y_{11} - 0,1767y_{12} - 0,4417y_{22} + 1,006.$$

Определим согласно (15) β_{ij} ($i, j = 1,2$).

$$\beta_{11} = (0,5 - 1,1)^2 = 0,36, \text{ т.к. } 0,6609 - 1,1009 \cdot 0,803 - 3,4442 \cdot 0,4015 < 0;$$

$$\beta_{12} = (0,2 - 0,22)(0,5 - 1,1) = 0,012, \text{ т.к.}$$
$$0,660083 - 1,1009 \cdot 0,3534 - 3,4442 \cdot 0,1767 < 0;$$
$$\beta_{22} = (0,2 - 0,22)^2 = 0,0004.$$

Тогда

$$y_1 = -0,2891 - 0,0042 - 0,0004 + 1,352 = 1,0587;$$

$$y_2 = -0,14454 - 0,0021 - 0,0002 + 1,006 = 0,8592.$$

Отсюда $x_1 = 2,1587;\ x_2 = 1,0792$.

Данные значения x_1 и x_2 выходят за рамки ограничений на x_1 и x_2 и не удовлетворяют системе (1). Надо улучшить этот результат. Можно использовать следующий подход. В задачах прикладного характера часто границы изменения переменных задаются приближенно, и их можно корректировать. Кроме того, можно корректировать и точку, относительно которой функции разлагаются в ряды.

Поскольку в рассматриваемом примере в формировании значений x_1 и x_2 участвуют нижние границы изменения переменных (верхние не участвуют), а также координаты точки разложения, то корректировке подлежат эти значения.

Пусть, для примера, нижняя граница для d_1 будет 0,34. Тогда

$$y_1 = -0,4638 - 0,0049 - 0,005 + 1,352 = 0,8832;$$

$$y_2 = -0,2329 - 0,0025 - 0,0003 + 1,006 = 0,7732;$$

$$x_1 = 1,9832;\ x_2 = 0,9932.$$

В этом случае найденные значения удовлетворяют системе ограничений и второму уравнению системы (1). При этом не выполняется первое уравнение системы (1).

С привлечением средства MS Excel «Поиск решения» получены результаты $x_1^0 = 2,\ x_2^0 = 1$. Погрешность не превосходит 0,8 %. Левая часть первого уравнения системы (1) при $x_1 = 1,9832$ и $x_2 = 0,9932$ равна 5,8894, а должна быть 6. Погрешность в этом случае составляет 1,8 %.

Вывод: результат получился достаточно точный.

Рассмотрим на графике (рис. 1) изменение результата при разных значениях левых границ d_1 и d_2 (например, d_1 изменяется от 0,3 до 0,6; d_2 изменяется от 0,1 до 0,3 при $a_1 = 1,1;\ a_2 = 2,2$).

$$x_1 = -0,803(d_1 - 1,1)^2 - 0,3534(d_1 - 1,1)(d_2 - 0,22) -$$
$$- 0,8834(d_2 - 0,22)^2 + 2,452;$$
$$x_2 = -0,4015(d_1 - 1,1)^2 - 0,1767(d_1 - 1,1)(d_2 - 0,22) -$$
$$- 0,4417(d_2 - 0,22)^2 + 1,226.$$

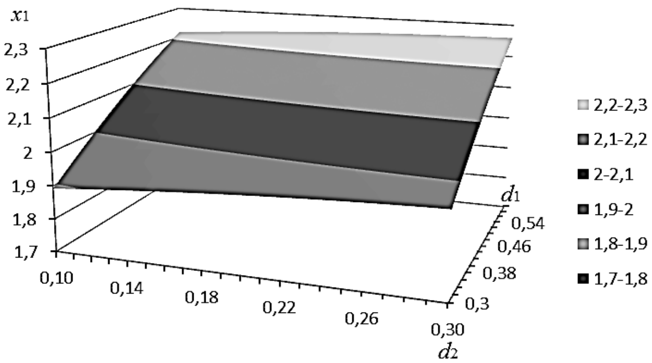

Рис. 1. Изменение x_1 при разных значениях левых границ

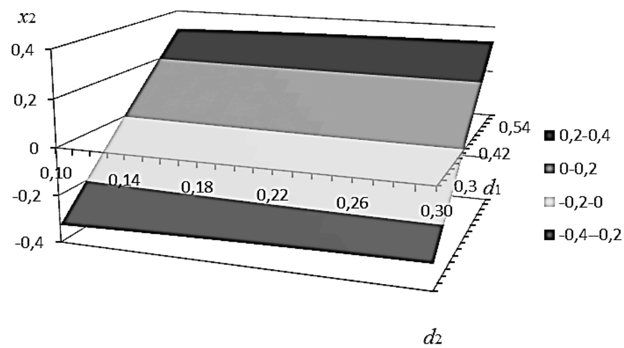

Рис. 2. Изменение x_2 при разных значениях левых границ

Другой вариант. При данных границах d_1 и d_2 изменяются a_1 и a_2 с соблюдением условия $d_1 < a_1 < l_1$; $d_2 < a_2 < l_2$. Тогда

$$x_2 = -\frac{\alpha}{8(1+a_1)} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{64(1+a_1)^2} + \frac{\beta}{4(1+a_1)}},$$

$$\text{где } \alpha = 2a_2^2 - 2{,}64 - 8a_2 - 1{,}32a_1,$$

$$\beta = -3a_1^2 - 4a_1a_2^2 + 2a_2^3 + 4{,}68a_1a_2 + 5{,}57 - 3{,}34a_2^2 - 2{,}64a_2,$$

$$x_1 = -0{,}66 + 2x_2 - 2a_2 + a_1.$$

На рис 3, 4 построены графики зависимости x_1 и x_2 от значений координат a_1 и a_2, точки разложения в ряд функций при изменении a_1 от 0,8 до 1,3, a_2 – от 0,2 до 0,3 при $d_1 = 0{,}5$; $d_2 - 0{,}2$.

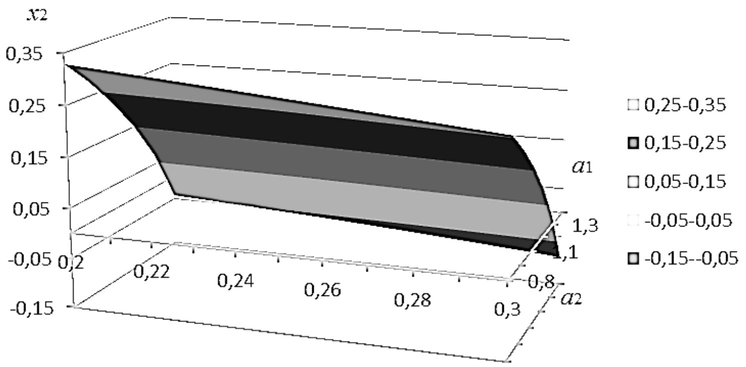

Рис. 3. Изменение x_2 при разных значениях координат a_1 и a_2 левых границ

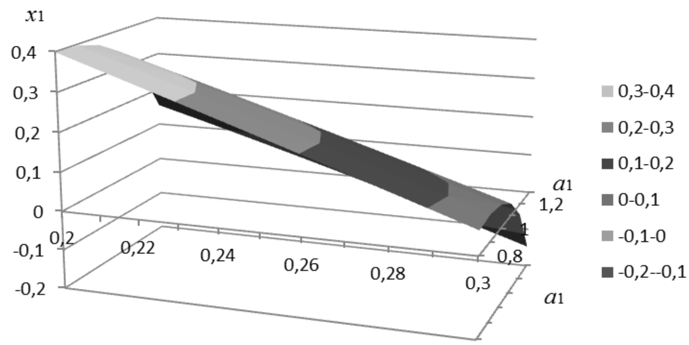

Рис. 4. Изменение x_1 при разных значениях координат a_1 и a_2 левых границ

Замечание. Если коэффициенты разложения функций φ_q имеют более сложную, чем полиномиальная зависимость от a_1 и a_2, то они разлагаются в ряд с заданной степенью точности.

Заключение

В статье разработан новый метод приближенного решения оптимизационной задачи нелинейного программирования. Для пояснения вычислительного алгоритма разобран конкретный пример.

Список литературы

1. Ганичев А.В., Ганичева А.В. Математическое программирование. – Тверь: ТвГТУ, 2017. – 88 с.

2. Jensen P.A., Bard J.F. Nonlinear Programming Methods. S1 Separable Programming. – Wiley, 2002. – 700 p.

3. Luenberger D.G., Ye. Y. Linear and nonlinear programming. – Basel: Springer International Publishing, 2016. – 546 p.

4. Salman A.M., Al-Jilawi A. S. Solving nonlinear optimization problem using approximation methods // International Journal of Health Sciences. – 2022. – Vol. 6(S3). – P. 1578–1586. – DOI: 10.53730/ijhs.v6nS3.5699.

5. Данданян А.Н., Хайдарова Л.А., Курганова М.В. Решение задач нелинейного программирования по условиям Куна-Таккера // Наука XXI века: актуальные направления развития. – 2020. – № 1-2. – С. 24–27.

6. Тимофеев А.Г., Лебединская О.Г. Поиск быстрого решения задачи нелинейного программирования // Транспортное дело России. – 2019. – № 2. – С. 48–51. – EDN: TMQJRU

7. Таныгина, В.В. Решение задачи нелинейного программирования методом Франка – Вулфа // Научному прогрессу – творчество молодых. – 2019. – № 1. – С. 81–84. – EDN: TSVJEY.

8. Mai T., Mortari D. Theory of functional connections applied to quadratic and nonlinear programming under equality constraints // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2022. – Vol. 406. – Art. 113912. – DOI: 10.1016/-j.cam.2021.113912.

9. Wang J. Approximate nonlinear programming algorithms for solving stochastic programs with recourse // Annals of Operations Research. – 1991. – Vol. 31. – P. 371–384. – DOI: 10.1007/BF02204858

10. Antczak T. An η-approximation method in nonlinear vector optimization // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications – 2005. – Vol. 63, iss. 2. – P. 225–236. – DOI: 10.1016/j.na.2005.05.008.

11. Still C., Westerlund T. A linear programming-based optimization algorithm for solving nonlinear programming problems // European Journal of Operational Research. – 2010. – Vol. 200, iss. 3. – P. 658–670. – DOI: 10.1016/j.ejor.2009.01.033.

12. Approximation Algorithms for Optimization of Combinatorial Dynamical Systems / I. Yang, S.A. Burden, R. Rajagopal, S.S. Sastry, C.J. Tomlin // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2016. – Vol. 61, no. 9. – P. 2644–2649. – DOI: 10.1109/TAC.2015.2504867.

13. Diehl M., Bock H.G., Kostina E.A. An approximation technique for robust nonlinear optimization // Mathematical Programming. – 2006. – Vol. 107, iss. 1-2. – P. 213–230. – DOI:10.1007/s10107-005-0685-1.

14. Djukic R.R. Partial stability of multi attribute decision-making solutions for interval determined criteria weights – the problem of nonlinear programming // Military Technical Courier. – 2020. – Vol. 68, iss. 3. – P. 488–529. – DOI: 10.5937/vojtehg68-27014

15. Ганичева А.В. Метод решения некоторых классов оптимизационных задач // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2019. – Т. 7, № 2 (25). – С. 43–54. – DOI: 10.26102/2310-6018/2019.25.2.002. – EDN: KVLRNG

16. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Метод проектирования и приращений решения задач линейного программирования // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2022. – Т. 10, № 3. – С. 1–16. – DOI: 10.26102/2310-6018/2022.38.3.022. – EDN: TQAVJW

References

1. Ganichev A.V., Ganicheva A.V. Matematicheskoe programmirovanie [Mathematical programming]. Tver, TvGTU, 2017, 88 p.

2. Jensen P.A., Bard J.F. Nonlinear Programming Methods. S1 Separable Programming. Wiley, 2002, 700 p.

3. Luenberger D.G., Ye. Y. Linear and nonlinear programming. Basel, Springer International Publishing, 2016, 546 p.

4. Salman A.M., Al-Jilawi A. S. Solving nonlinear optimization problem using approximation methods. *International Journal of Health Sciences*, 2022, vol. 6 (S3), pp. 1578–1586. DOI: 10.53730/ijhs.v6nS3.5699.

5. Dandanyan A.N., Hajdarova L.A., Kurganova M.V. Reshenie zadach nelinejnogo programmirovaniya po usloviyam Kuna – Takkera [Solution of problems of nonlinear programming under conditions of Kuhn – Tucker]. *Nauka XXI veka: aktual'nye napravleniya razvitiya*, 2020, no. 1-2, pp. 24–27.

6. Timofeev A.G., Lebedinskaya O.G. Poisk bystrogo resheniya zadachi nelinejnogo programmirovaniya [Search for a quick solution to the problem of nonlinear programming]. *Transport business of Russia*, 2019, no. 2, pp. 48–51.

7. Tanygina V.V. Reshenie zadachi nelinejnogo programmirovaniya metodom Franka-Vulfa [Solving a Nonlinear Programming Problem by the Frank–Wolfe Method]. *Nauchnomu progressu – tvorchestvo molodyh*, 2019, no. 1, pp. 81–84.

8. Mai T., Mortari D. Theory of functional connections applied to quadratic and nonlinear programming under equality constraints. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2022, vol. 406, art. 113912. DOI: 10.1016/-j.cam.2021.113912.

9. Wang J. Approximate nonlinear programming algorithms for solving stochastic programs with recourse. *Annals of Operations Research*, 1991, vol. 31, pp. 371–384. DOI: 10.1007/BF02204858.

10. Antczak T. An η-approximation method in nonlinear vector optimization. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2005, vol. 63, iss. 2, pp. 225–236. DOI: 10.1016/j.na.2005.05.008.

11. Still C., Westerlund T. A linear programming-based optimization algorithm for solving nonlinear programming problems. *European Journal of*

Operational Research, 2010, vol. 200, iss. 3, pp. 658–670. DOI: 10.1016/-j.ejor.2009.01.033.

12. Yang I., Burden S.A., Rajagopal R., Sastry S.S., Tomlin C.J. Approximation Algorithms for Optimization of Combinatorial Dynamical Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control,* 2016, vol. 61, no. 9, pp. 2644–2649. DOI: 10.1109/TAC.2015.2504867.

13. Diehl M., Bock H.G., Kostina E.A. An approximation technique for robust nonlinear optimization. *Mathematical Programming*, 2006, vol. 107, iss. 1-2, pp. 213–230. DOI:10.1007/s10107-005-0685-1

14. Djukic R.R. Partial stability of multi attribute decision-making solutions for interval determined criteria weights – the problem of nonlinear programming. *Military Technical Courier*, 2020, vol. 68, iss. 3, pp. 488–529. DOI: 10.5937/vojtehg68-27014.

15. Ganicheva A.V. Metod resheniya nekotoryh klassov optimizacionnyh zadach [Method of the solution of some classes optimising tasks]. *Modeling, optimization and information technology*, 2019, vol. 7, iss. 2 (25), pp. 43–54. DOI: 10.26102/2310-6018/2019.25.2.002.

16. Ganicheva A.V., Ganichev A.V. Metod proektirovaniya i prirashchenij resheniya zadach linejnogo programmirovaniya [The method of design and increments in solving linear programming problems]. *Modeling, optimization and information technology*, 2022, vol. 10, no. 3, pp. 1–16. DOI: 10.26102/2310-6018/2022.38.3.022.

Сведения об авторах

Ганичева Антонина Валериановна (Тверь, Россия) – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Физико-математических дисциплин и информационных технологий» Тверской государственной сельскохозяйственной академии (170904, г. Тверь, ул. Маршала Василевского, 7, e-mail: TGAN55@yandex.ru).

Ганичев Алексей Валерианович (Тверь, Россия) – старший преподаватель кафедры «Информатики и прикладной математики» Тверского государственного технического университета (170026, г. Тверь, наб. Аф. Никитина, 22, e-mail: alexej.ganichev@yandex.ru).

About the authors

Antonina V. Ganicheva (Tver, Russian Federation) – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department «Physical and mathematical disciplines and information technologies», Tver State Agricultural Academy (7, St. Marshal Vasilevsky, Tver, 170904).

Alexey V. Ganichev (Tver, Russian Federation) – Head Lecturer of the Department «Computer Science and Applied Mathematics», Tver State Technical University (22, St. Nikitin nab., 170026, Tver).

Библиографическое описание статьи согласно
ГОСТ Р 7.0.100–2018:

Ганичева, А.В. Приближенный метод оптимизации задач нелинейного программирования / А. В. Ганичева, А. В. Ганичев. – текст : непосредственный. – DOI: 10.15593/2499-9873/2022.4.01 // Прикладная математика и вопросы управления / Applied Mathematics and Control Sciences. – 2022. – № 4. – С. 9–25.

Цитирование статьи в изданиях РИНЦ:

Ганичева, А.В. Приближенный метод оптимизации задач нелинейного программирования / А. В. Ганичева, А. В. Ганичев // Прикладная математика и вопросы управления. – 2022. – № 4. – С. 9–25. – DOI: 10.15593/2499-9873/2022.4.01

Цитирование статьи в references и международных изданиях

Cite this article as:

Ganicheva A.V., Ganichev A.V. Approximate method of optimization of nonlinear programming problems. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2022, no. 4, pp. 9–25. DOI: 10.15593/2499-9873/2022.4.01 (*in Russian*)

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.
Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
Вклад авторов равноценен.

Поступила: 02.11.2022
Одобрена: 07.12.2022
Принята к публикации: 12.12.2022