Аксененко, И.А. Исследование устойчивости одного разностного уравнения с комплексными коэффициентами / И.А. Аксененко // Прикладная математика и вопросы управления. – 2023. – № 1. – С. 6–25. DOI: 10.15593/2499-9873/2023.1.01

Библиографическое описание согласно ГОСТ Р 7.0.100–2018
Аксененко, И. А. Исследование устойчивости одного разностного уравнения с комплексными коэффициентами / И. А. Аксененко. – текст : непосредственный. – DOI: 10.15593/2499-9873/2023.1.01 // Прикладная математика и вопросы управления / Applied Mathematics and Control Sciences. – 2023. – № 1. – С. 6–25.

пермский политех

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ВОПРОСЫ УПРАВЛЕНИЯ
№ 1, 2023
https://ered.pstu.ru/index.php/amcs

Научная статья
УДК 517.929
DOI: 10.15593/2499-9873/2023.1.01

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ С КОМПЛЕКСНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

И.А. Аксененко

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 21 февраля 2023
Одобрена: 28 февраля 2023
Принята к публикации:
10 марта 2023

Финансирование
Исследование не имело спонсорской поддержки.

Конфликт интересов
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Вклад автора
100 %.

Ключевые слова:
разностные уравнения, устойчивость, D-разбиение, абсолютная устойчивость.

АННОТАЦИЯ

Исследуется устойчивость линейного автономного разностного уравнения с двумя (вообще говоря, комплексными) коэффициентами. Отправной точкой исследования является теорема Шура-Кона о расположении корней характеристического уравнения относительно единичного круга в комплексной плоскости. Для построения области экспоненциальной устойчивости в пространстве параметров используется метод D-разбиений, состоящий в построении кривых (или поверхностей), при переходе через которые изменяется число корней характеристического уравнения, находящихся вне единичного круга; далее определяется область, которой соответствует нулевое число таких корней – она является областью устойчивости. Эта схема реализована для указанного выше разностного уравнения: найдены геометрические критерии устойчивости и описаны области экспоненциальной устойчивости в четырехмерном пространстве коэффициентов, а также их трехмерные, двумерные и одномерные сечения. Отдельно изучена устойчивость по Ляпунову, которой соответствует область экспоненциальной устойчивости, дополненная частью ее границы; для точного описания устойчивости по Ляпунову потребовалось описание «кривой кратности» - линии, все точки которой соответствуют кратным корням характеристического уравнения. Кроме того, найдена и построена область абсолютной устойчивости по одному из параметров уравнения, для которой также были сформулированы критерии экспоненциальной устойчивости и устойчивости по Ляпунову.

Полученные результаты могут быть применены к исследованию процессов в физике, технике, экономике, биологии, при моделировании которых используются дискретные модели в виде разностных уравнений.

© **Аксененко Илья Александрович** – студент IV курса кафедры «Вычислительная математика, механика и биомеханика», e-mail: ilya156@list.ru, ORCID: 0009-0007-6400-7024.

Perm Polytech Style: Aksenenko I.A. Investigation of the stability of one difference equation with complex coefficients. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2023, no. 1, pp. 6–25. DOI: 10.15593/2499-9873/2023.1.01

MDPI and ACS Style: Aksenenko, I.A. Investigation of the stability of one difference equation with complex coefficients. *Appl. Math. Control Sci.* **2023**, 1, 6–25. https://doi.org/10.15593/2499-9873/2023.1.01

Chicago/Turabian Style: Aksenenko, Ilya. 2023. "Investigation of the stability of one difference equation with complex coefficients". *Appl. Math. Control Sci.* no. 1: 6–25. https://doi.org/10.15593/2499-9873/2023.1.01

perm polytech

APPLIED MATHEMATICS AND CONTROL SCIENCES
№ 1, 2023
https://ered.pstu.ru/index.php/amcs

Article
DOI: 10.15593/2499-9873/2023.1.01
UDK 517.929

INVESTIGATION OF THE STABILITY OF ONE DIFFERENCE EQUATION WITH COMPLEX COEFFICIENTS

I.A. Aksenenko

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 21 February 2023
Approved: 28 February 2023
Accepted for publication:
10 March 2023

Funding
This research received no external funding.

Conflicts of Interest
The authors declare no conflict of interest.

Author Contributions
100 %.

Keywords:
difference equations, stability, D-decomposition, absolute stability.

ABSTRACT

We study the stability of a linear autonomous difference equation with two (generally speaking, complex) coefficients. The starting point of the study is the Schur-Kohn theorem on the location of the roots of the characteristic equation with respect to the unit disk in the complex plane. To construct the domain of exponential stability in the parameter space, we use the D-decompodition method, which consists in constructing curves (or surfaces) such that the number of roots of the characteristic equation outside the unit disk changes when passing through the curves; then the area is determined, which corresponds to the zero number of such roots; this is the area of stability. We implement this scheme for the above difference equation: geometric stability criteria are found and the domains of exponential stability in a four-dimensional space of coefficients are described, as well as their three-dimensional, two-dimensional and one-dimensional sections. The Lyapunov stability is studied separately, which is corresponded by the domain of exponential stability supplemented by a part of its boundary. To describe Lyapunov stability exactly we use a "multiplicity curve", which is a line such that all its points correspond to multiple roots of the characteristic equation. In addition, we find and construct a domain of absolute stability with respect to one of the parameters of the initial equation. For this domain, we formulate criteria of exponential stability and Lyapunov stability.

The results obtained can be applied to the study of processes in physics, technology, economics, biology, which are modeled using discrete models in the form of difference equations.

© **Ilya A. Aksenenko** – 4rd year student of the Department of Computational Mathematics, Mechanics and Biomechanics, e-mail: ilya156@list.ru, ORCID: 0009-0007-6400-7024.

Введение

Развитие теории разностных уравнений [1–4] со времен появления дифференциального и интегрального исчислений долгое время проходило в тени работ, посвященных дифференциальным уравнениям, а основной областью применения разностных уравнений являлись приближенные решения дифференциальных уравнений. Ситуация изменилась в последние два десятилетия XX в.: количество работ, посвященных разностным уравнениям, начало резко возрастать. Причиной этого явилось стремительное развитие вычислительной техники, а вместе с ней и численных методов, где дискретные исчисления нашли применение в полном объеме [5–9], но не меньшую роль сыграло появление большого количества дискретных моделей, для описания которых тоже используются разностные уравнения [10–12]. Ныне теория разностных уравнений, оставаясь по-прежнему тесно связанной с теорией дифференциальных уравнений, представляет собой уже вполне самостоятельный раздел теории динамических систем.

Теория линейных разностных уравнений подобна классической теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений [1–3]. В частности, для них построена теория устойчивости, аналогичная теории устойчивости дифференциальных уравнений [4; 5]. Устойчивость автономных разностных уравнений определяется расположением корней характеристического уравнения относительно единичного круга в комплексной плоскости. Важной задачей является поиск геометрических критериев устойчивости, т.е. описание областей устойчивости в пространстве коэффициентов.

В данной работе рассматривается линейное автономное разностное уравнение с комплексными коэффициентами, для которого исследуется расположение на комплексной плоскости корней его характеристического уравнения, на основе чего строится область устойчивости в пространстве параметров. Обращение к разностным уравнениям с комплексными коэффициентами связано с необходимостью изучать не только скалярные, но и векторные разностные уравнения (системы). За счет преобразования координат некоторым важным классам систем удается придать треугольную форму, т.е. свести их к набору скалярных уравнений, но, вообще говоря, с комплексными коэффициентами.

1. Постановка задачи устойчивости для разностных уравнений

1.1. Описание объекта. Представление решения

Будем использовать следующие обозначения для числовых множеств: Z – множество целых чисел, N – множество натуральных чисел, $N_0 = N \cup \{0\}$, $R = (-\infty, \infty)$, C – множество комплексных чисел.

Неоднородное автономное разностное уравнение p-го порядка имеет вид

$$x(n) + \sum_{i=1}^{p} a_k x(n-k) = f(n)\,,\ n \in N, \tag{1}$$

где $a_k \in C$, а $f : N \to C$. Функцию называют внешним возмущением или правой частью.

Определение 1. *Решением* уравнения (1) называется функция $x : N \to C$, удовлетворяющая равенству (1) для всех $n \in N$.

Очевидно, что решение уравнения (1) однозначно определяется набором начальных условий, которые мы будем считать заданными при отрицательных и нулевом значениях аргумента, т.е. полагаем $x(n) = \varphi(n)$, $n = \overline{-p+1, 0}$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\varphi(n) = 0$ при всех $n = \overline{-p+1, -1}$. Введем оператор

$$(Sy)(n) = \begin{cases} y(n-1), & n \geq 1, \\ 0, & n < 1, \end{cases}$$

который принято называть *оператором сдвига*. Теперь уравнение (1) можно переписать в виде:

$$x(n) + \sum_{k=1}^{p} a_k (S^k x)(n) = f(n), \ n \in N. \tag{2}$$

Следовательно, решение (2) однозначно определяется значением $x(0)$, которое может быть любым. Найдем формулу, с помощью которой можно получить любое решение уравнения (2).

Определение 2. *Фундаментальным решением* уравнений (1) и (2) называется функция $X : N \to C$, удовлетворяющая для всех $n \in N$ уравнению

$$X(n) + \sum_{k=1}^{p} a_k (S^k X)(n) = 0, \ n \in N, \tag{3}$$

дополненному начальным условием $X(0) = 1$.

Теорема 1. *Любое решение уравнения* (2) *представимо в виде*

$$x(n) = X(n)x(0) + \sum_{m=1}^{n} X(n-m) f(m), \ n \in N. \tag{4}$$

Доказательство проводится непосредственной подстановкой (4) в (2).

$$x(n) + \sum_{k=1}^{p} a_k (S^k x)(n) = X(n)x(0) + \sum_{m=1}^{n} X(n-m) f(m) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{p} a_k (S^k X)(n) x(0) + a_k (S^k X)(n-m) f(m) =$$
$$= \left(X(n) + \sum_{k=1}^{p} a_k (S^k X)(n) \right) x(0) + \sum_{m=1}^{n} \left(X(n-m) + \sum_{k=1}^{p} a_k (S^k X)(n-m) \right) f(m) =$$
$$= \sum_{m=1}^{n-1} \left(X(n-m) + \sum_{k=1}^{p} a_k (S^k X)(n-m) \right) f(m) + X(0) f(n) = f(n).$$

Вернемся к уравнению (1). Оказывается, его можно считать частным случаем уравнения (2), отнеся начальные условия к правой части.

Обозначим

$$(\hat{S}y)(n) = \begin{cases} 0, & n \geq 1, \\ y(n-1), & n < 1. \end{cases}$$

Теперь уравнение (1) можно переписать в виде

$$x(n)+\sum_{k=1}^{p}a_k(S^k x)(n)=f(n)+g(n),\ n\in\mathbb{N},$$

где $g(n)=-\sum_{k=1}^{p}a_k(\hat{S}^k x)(n)=-\sum_{k=1}^{p}a_k(\hat{S}^k\varphi)(n)$. Таким образом, (1) становится уравнением вида (2) с более сложной правой частью. В частности, если в (1) $f(n)=0$, то формула (4) принимает вид

$$x(n)=X(n)x(0)-\sum_{m=1}^{p}X(n-m)\sum_{k=1}^{p}a_k(\hat{S}^k\varphi)(m),\ n\in N. \tag{5}$$

Таким образом, мы установили, что фундаментальное решение определяется самой простой из возможных задач – задачей (3), но при этом через него выражаются все решения при любых начальных условиях и любой правой части.

1.2. Определения устойчивости. Критерии устойчивости

Понятие *устойчивость решения* отражает непрерывную зависимость решения от начальной функции. Для уравнения (1) в силу его линейности и представлений (4) и (5) достаточно ограничиться изучением устойчивости тривиального (т.е. нулевого) решения однородного уравнения

$$x(n)+\sum_{i=1}^{p}a_k x(n-k)=0,\ n\in N, \tag{6}$$

дополненного, как и выше, при отрицательных значениях аргумента набором начальных условий.

Дадим для уравнения (6) определения устойчивости.

Определение 3. Уравнение (6) будем называть:

•*устойчивым по Ляпунову,* если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что если $|\varphi(n)|<\delta$ при всех $n=\overline{-p+1,0}$, то $|x(n)|<\varepsilon$ при всех $n\in N$;

•*асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво по Ляпунову и все решения его стремятся к нулю при $n\to\infty$;

•*экспоненциально устойчивым*, если существует такая константа $\gamma>0$, что для каждого решения x при некотором $M>0$ для всех $n\in N$ имеем $|x(n)|\le Me^{-\gamma n}$.

Исследование устойчивости тесно связано с *характеристическим многочленом* уравнения (6) и определяемыми им корнями характеристического уравнения

$$\lambda^p+\sum_{k=1}^{p}a_k\lambda^{p-k}=0. \tag{7}$$

Напомним, что любое решение уравнения (6) представимо в виде

$$x(n)=C_1(n)\lambda_1^n+C_2(n)\lambda_2^n+\ldots+C_m(n)\lambda_m^n, \tag{8}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ – корни (7) без учета кратности, а $C_k(n)$-многочлены, степень которых ровно на единицу меньше кратности корня λ_k.

Из (8) сразу следует, что *асимптотическая устойчивость уравнения* (6) *совпадает с экспоненциальной*. Для двух оставшихся видов устойчивости справедливы следующие критерии, которые тоже легко выводятся из формулы (8).

Теорема 2. *Уравнение* (6) *экспоненциально устойчиво, если и только если все корни его характеристического уравнения* (7) *лежат на комплексной плоскости внутри единичного круга.*

Теорема 3. *Уравнение* (6) *устойчиво по Ляпунову, если и только если все корни его характеристического уравнения* (7) *лежат на комплексной плоскости в круге* $|\lambda| \leq 1$, *причем корни, лежащие на границе круга* $|\lambda| = 1$, *являются простыми.*

1.3. Метод D-разбиения

Для построения области устойчивости воспользуемся *методом D-разбиения*. Суть этого метода, предложенного в работах Ю.И. Неймарка [13; 14], заключается в построении границ в пространстве параметров, при переходе через которые изменяется количество корней характеристического уравнения, находящихся вне единичного круга комплексной плоскости. После построения этих границ остается выбрать из областей, на которые разбилось пространство параметров, области, которым соответствует нулевое число таких корней. Их объединение и составляет область асимптотической устойчивости.

Нули характеристического полинома являются непрерывными функциями его коэффициентов (если коэффициент при старшей степени отличен от нуля).

Разобьем пространство коэффициентов на области поверхностями (линиями), точкам которых соответствуют полиномы, имеющие хотя бы один нуль на единичной окружности. Такое разбиение называется *D-разбиением.*

Очевидно, что точкам каждой области *D*-разбиения *соответствуют полиномы с одинаковым числом нулей вне единичного круга* (говоря о числе нулей, мы имеем в виду сумму их кратностей), так как изменение числа нулей, лежащих вне единичного круга, может произойти лишь при переходе нуля через единичную окружность, т.е. при переходе точки в пространстве коэффициентов через границу области *D*-разбиения.

Итак, каждой области *D*-разбиения можно поставить в соответствие *индекс:* целое неотрицательное число, равное количеству лежащих вне единичного круга нулей характеристического полинома, коэффициенты которого определяются точками этой области. Пусть среди областей *D*-разбиения есть области, индекс которых равен нулю. Тогда эти области (и только они) являются областями асимптотической устойчивости рассматриваемого разностного уравнения, поскольку все корни характеристического полинома лежат внутри единичного круга.

Таким образом, исследование на устойчивость методом *D*-разбиений в пространстве коэффициентов (или иных параметров, от которых непрерывно зависят корни характеристического полинома) проводится по следующей схеме: строим *D*-разбиение в пространстве параметров и выделяем из него области с нулевым индексом. Для выделения области достаточно проверить, что хотя бы одна ее точка соответствует полиному, все нули которого лежат внутри единичного круга.

2. Построение областей устойчивости для разностных уравнений

2.1. Уравнение с одним комплексным коэффициентом

Рассмотрим следующее уравнение

$$x(n+1)-x(n)+bx(n-1)=0, \quad n\in N, \tag{9}$$

где $b\in C$.

Представим $b\in C$ в алгебраической форме $b=\alpha+i\beta$, где α – вещественная часть, β – мнимая часть коэффициента b. Характеристическое уравнение для (9) выглядит следующим образом:

$$\lambda^2-\lambda+\alpha+i\beta=0. \tag{10}$$

Найдём область устойчивости пользуясь методом D-разбиения, изложенным в п. 1.3. Для построения D-разбиения рассмотрим корни характеристического многочлена (10), попавшие на единичную окружность. Положив $\lambda=e^{i\varphi}$, где $\varphi\in[-\pi,\pi]$, получим:

$$e^{2i\varphi}-e^{i\varphi}+\alpha+i\beta=0. \tag{11}$$

Далее, применяя к (11) формулу Эйлера, имеем

$$\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi-\cos\varphi-i\sin\varphi+\alpha+i\beta=0.$$

Так как комплексное число равно 0, если и только если его вещественная и мнимая части равны 0, то:

$$\begin{cases}\alpha=\cos\varphi-\cos 2\varphi,\\ \beta=\sin\varphi-\sin 2\varphi, \quad \varphi\in[-\pi,\pi].\end{cases} \tag{12}$$

Равенства (12) можно рассматривать, как параметрически заданную кривую в координатах (α,β) (рис. 1). Эта кривая – улитка Паскаля – образует D-разбиение пространства параметров для уравнения (10) на три области, которые на рис.1 отмечены разными цветами.

Чтобы определить область устойчивости по методу D-разбиения, нужно найти индекс каждой области. Для этого, согласно схеме метода, выберем в каждой области удобную «пробную точку» и определим для нее количество корней уравнения (10), лежащих вне единичного круга.

• Первая область (зеленый цвет). Пусть $\alpha=1/4, \beta=0.$ Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2-\lambda+1/4=0,$ следовательно, $\lambda_1=\lambda_2=1/2,$ оба корня лежат внутри единичного круга. Значит, индекс первой области равен 0.

• Вторая область (красный цвет). Пусть $\alpha=-1, \beta=0.$ Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2-\lambda-1=0$, следовательно, $\lambda_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \lambda_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, один корень лежит внутри, а второй вне единичного круга. Значит, индекс второй области равен 1.

• Третья область (белый цвет). Пусть $\alpha=-3,\beta=0$. Характеристическою уравнение имеет вид $\lambda^2-\lambda-3=0$, следовательно, $\lambda_1=\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \lambda_2=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$, оба корня лежат вне единичного круга. Значит, индекс третьей области равен 2.

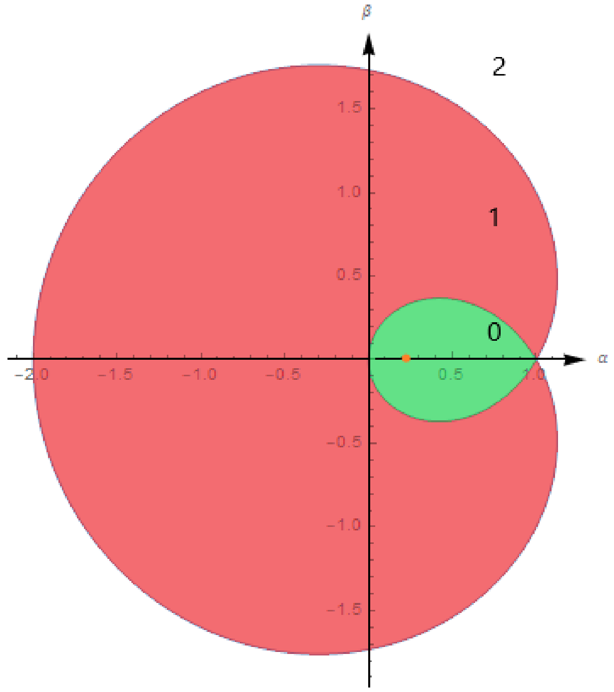

Рис. 1. D-разбиение для уравнения (9)

В силу метода *D*-разбиения отсюда следует, что областью асимптотической (экспоненциальной) устойчивости является только первая область. Дадим ее точное аналитическое описание. Для этого найдем условия на параметр φ, при которых кривая (12) описывает границу внутреннего овала. Из (12) и рис. 1 следует, что граничные значения φ определяются системой

$$\begin{cases} 1=\cos\varphi-\cos 2\varphi, \\ 0=\sin\varphi-\sin 2\varphi, \end{cases}$$

решая которую, получаем $1=2\cos\varphi$, откуда следует, что $\varphi=\pm\pi/3$.

Обозначим через

$$\partial G=\{(\alpha,\beta):\quad \alpha=\cos\varphi-\cos 2\varphi,\quad \beta=\sin\varphi-\sin 2\varphi,\quad \varphi\in[-\pi/3,\pi/3]\},$$

а через G – открытую область, ограниченную кривой ∂G (рис. 2). Теперь можно сформулировать критерий экспоненциальной устойчивости для уравнения (9).

Теорема 4. *Для того чтобы уравнение* (9) *было экспоненциально устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы точка с координатами* $(\mathrm{Re}\,b, \mathrm{Im}\,b)$ *принадлежала области* G.

Доказательство. Так как G является единственной областью с индексом 0, то она, согласно теореме 2, и является областью экспоненциальной устойчивости.

Найдем условия на b, при которых уравнение (9) будет устойчиво по Ляпунову. Очевидно, если $(\mathrm{Re}\, b, \mathrm{Im}\, b) \in G$, то (9) устойчиво по Ляпунову, но этим не исчерпываются все возможности. Из теоремы 3 следует, что к G следует добавить те точки, для которых корни характеристического уравнения лежат на границе единичного круга, но не являются кратными.

Сначала выясним, когда характеристическое уравнение (10) имеет кратные корни. Это означает $\lambda^2 - \lambda + b = (\lambda - \lambda_0)^2$, что возможно только при $b = 1/4$ (на рис. 1 «точка кратности» отмечена оранжевым цветом), а соответствующий корень уравнения (10) $\lambda_0 = 1/2$. Очевидно, что λ_0 – корень кратности 2 – не лежит на границе единичного круга. Значит, все точки, лежащие на кривой (12), соответствуют простым корням уравнения (10).

Найдем корни уравнения (10), когда α, β имеют вид (12). Так как

$$\lambda^2 - \lambda + \alpha + i\beta = \lambda^2 - \lambda + \cos\varphi - \cos 2\varphi + i\sin\varphi - i\sin 2\varphi =$$
$$= \lambda^2 - \lambda + e^{i\varphi} - e^{2i\varphi} = \left(\lambda - e^{i\varphi}\right)\left(\lambda - 1 + e^{i\varphi}\right),$$

то корни характеристического уравнения $\lambda_1 = e^{i\varphi}, \lambda_2 = 1 - e^{i\varphi}$. Очевидно, что $|\lambda_1| = 1$, оценим $|\lambda_2|$.

$$|\lambda_2| = \left|1 - e^{i\varphi}\right| = \sqrt{(1-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi} = \sqrt{2(1-\cos\varphi)} = 2\sqrt{\sin^2(\varphi/2)} = 2|\sin(\varphi/2)|.$$

- Если $(\alpha, \beta) \in \partial G$, то $\varphi \in [-\pi/3, \pi/3]$, следовательно, $|\lambda_2| = 2|\sin(\varphi/2)| \le 1$.
- Если $(\alpha, \beta) \notin \partial G$, то $\varphi \in [-\pi, -\pi/3) \cup (\pi/3, \pi]$, следовательно, $|\lambda_2| = 2|\sin(\varphi/2)| > 1$.

Сопоставим эти рассуждения с рис. 1. Мы получили, что если точки принадлежат границе внутреннего овала, то оба корня характеристического уравнения не выходят за границы единичного круга, и из теоремы 3 следует, что (9) устойчиво по Ляпунову. Если же точки принадлежат границе внешнего овала, то один корень лежит на границе, а второй – вне единичного круга, т.е. уравнение (9) в силу теоремы 3 не является устойчивым по Ляпунову. Таким образом, доказано следующее утверждение.

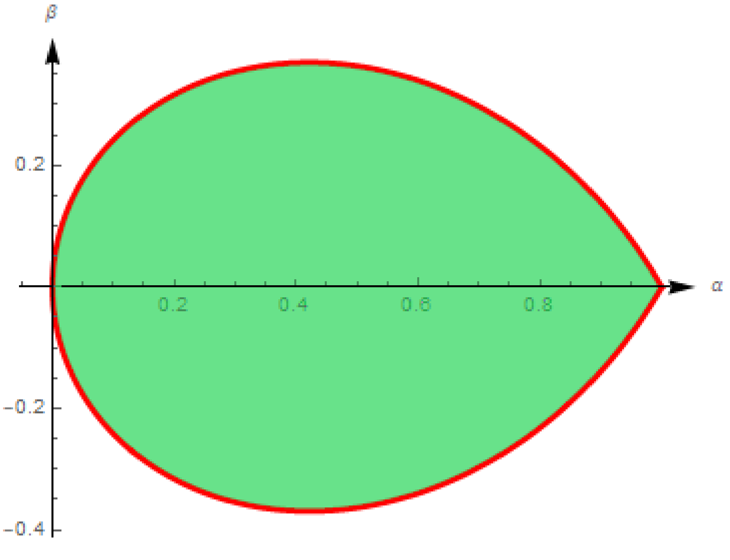

Рис. 2. Кривая ∂G, ограничивающая область G

Теорема 5. *Для того чтобы уравнение* (9) *было устойчивым по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы точка с координатами* $(\operatorname{Re} b, \operatorname{Im} b)$ *принадлежала области* $G \cup \partial G$.

Отметим два следствия из теорем 4 и 5, соответствующих случаю вещественного коэффициента.

Следствие 1. *Пусть* $b \in \mathbb{R}$. *Уравнение* (9) *экспоненциально устойчиво, если и только если* $b \in (0,1)$.

Следствие 2. *Пусть* $b \in \mathbb{R}$. *Уравнение* (9) *устойчиво по Ляпунову, если и только если* $b \in [0,1]$.

2.2. Уравнение с одним вещественным и одним комплексным коэффициентом

Рассмотрим разностное уравнение

$$x(n+1) - ax(n) + bx(n-1) = 0, \quad n \in N, \tag{13}$$

где $a \in R$, $b = \alpha + i\beta \in C$. В разделе 2.1 полностью исследован частный случай уравнения (13) при $a = 1$; полученные для него результаты будут использованы ниже.

Характеристическое уравнение для (13) имеет вид

$$\lambda^2 - a\lambda + \alpha + i\beta = 0. \tag{14}$$

Положим в (14) $\lambda = e^{i\varphi}$, где $\varphi \in [-\pi, \pi]$, применим формулу Эйлера и разделим действительную и мнимую части:

$$\begin{cases} \alpha = a\cos\varphi - \cos 2\varphi, \\ \beta = a\sin\varphi - \sin 2\varphi, \quad \varphi \in [-\pi, \pi]. \end{cases} \tag{15}$$

Равенства (15) можно рассматривать как параметрически заданную поверхность в координатах (α, β, a) (рис. 3), которая представляет собой *D*-разбиение для уравнения (13).

Получим границы параметров, в которых находится область устойчивости. Пусть λ_1, λ_2 – корни уравнения (14); по теореме Виета имеем

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -a, \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = b. \end{cases} \tag{16}$$

В силу теорем 2 и 3 необходимым условием устойчивости уравнения (13) будет неравенство $|\lambda_{1,2}| \le 1$, следовательно, из (16) получаем, что если уравнение (13) устойчиво, то $|a| \le 2$, $|b| \le 1$. Исходя из этих оценок, заключаем, что область устойчивости уравнения (13) полностью лежит в цилиндре радиусом 1 и высотой 4.

Рассмотрим сечения поверхности (15) для фиксированных $a \in [0,\ 2]$. При $a \in (0,\ 2)$ получаем множество кривых – улиток Паскаля, при $a = 2$ у улитки исчезает внутренний овал, при $a = 0$ внутренний и внешний овалы совпадают, а улитка обращается в окружность. Если рассматривать параметр $a \in [0,\ 2]$ как третью координату, то в пространстве $O\alpha\beta a$ множество внутренних овалов образует криволинейный конус (рис. 4).

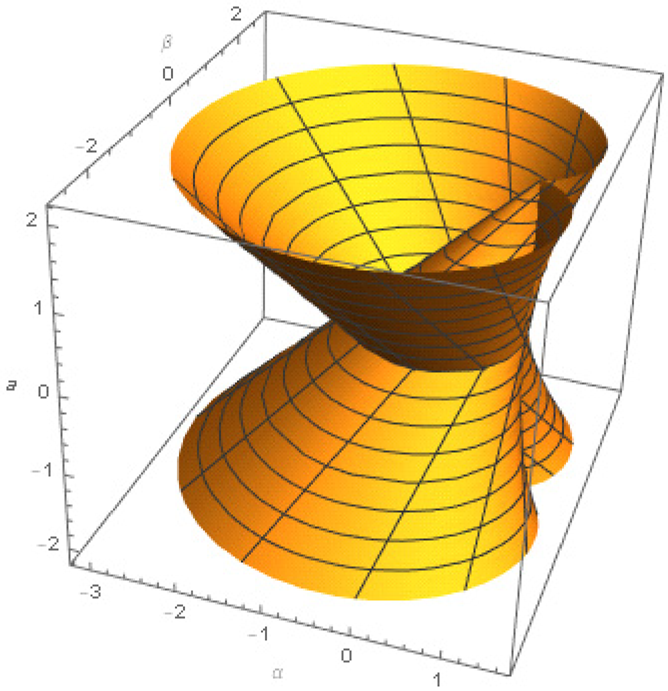

Рис. 3. D-разбиение для уравнения (13)

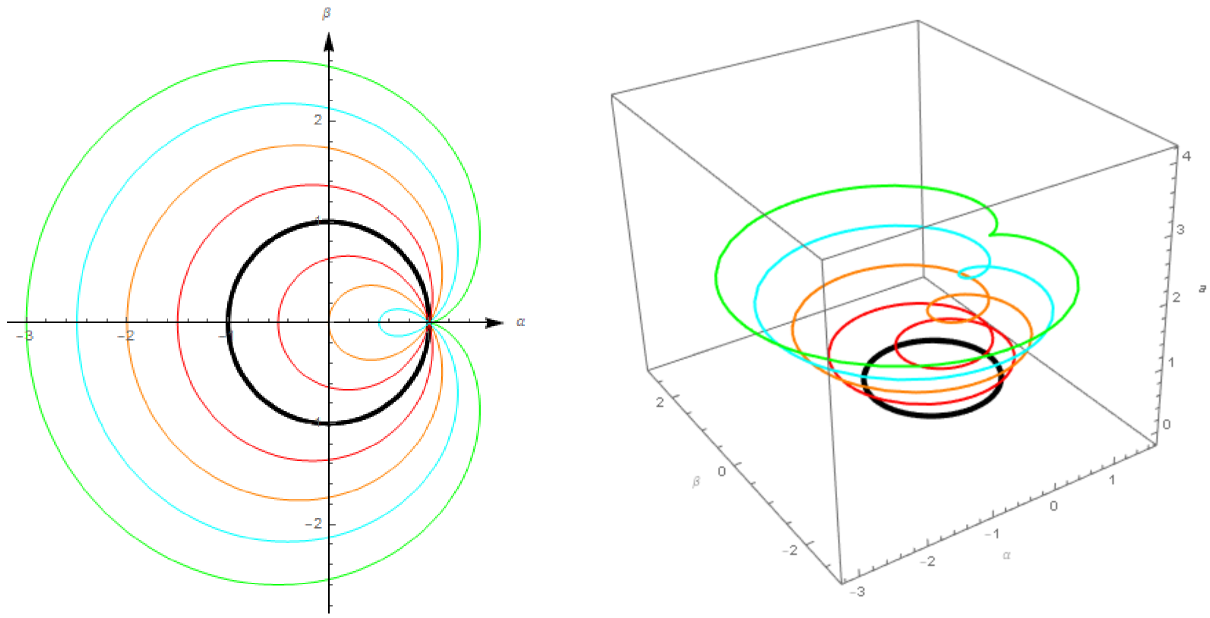

Рис. 4. D-разбиения в плоскостях $a = \mathrm{const}$: $a = 2$ – зелёный, $a = 1{,}5$ – голубой, $a = 1$ – оранжевый, $a = 0{,}5$ – красный, $a = 0$ – чёрный

Множество внешних овалов образует еще одну поверхность, симметричную относительно плоскости $a = 0$. Таким образом, все пространство параметров при $a \geq 0$ разбилось на три области (см. рис. 3). Чтобы определить область устойчивости по методу D-разбиения, нужно найти индекс каждой области. Согласно схеме метода, в каждой области достаточно выбрать «пробную точку» и определить для нее количество корней уравнения (13), лежащих вне единичного круга.

Проведём в пространстве (α, β, a) плоскость $a = 1$. Эта плоскость пересекает все три области D-разбиения, следовательно «пробные точки» можно брать на ней. Заметим, что в сечении мы получаем ту самую улитку Паскаля, которая была исследована в п. 2.1 (на рис. 4 – оранжевая кривая), для которой индексы областей уже определены (см. рис. 1). Следовательно, индексы областей в пространстве совпадают с индексами их сечений плоскостью $a=1$, а единственной областью с индексом 0 является криволинейный конус, образованный внутренними овалами.

В силу симметрии равенств (15) при $a \in [-2,\ 0]$ получается аналогичный конус, вершина которого находится на полуоси $a<0$, следовательно, областью устойчивости является объединение двух симметричных конусов. Область вырождается в точку, когда $\alpha=1$, $\beta=0$, следовательно, вершины конусов находятся в точках $(1, 0 \pm 2)$. Их общее основание – круг $|b| \le 1$, лежащий в плоскости $a=0$ (рис. 5).

Дадим аналитическое описание области устойчивости. Найдем условия на параметр φ, при которых поверхность (15) описывает границу конуса. Из (15) и рис. 3, 4 следует, что при фиксированном значении $a \in [-2, 2]$ граничные значения φ определяются системой

$$\begin{cases} 1 = a\cos\varphi - \cos 2\varphi, \\ 0 = a\sin\varphi - \sin 2\varphi, \end{cases}$$

преобразуя которую, получаем $a = 2\cos\varphi$. Обозначим одно из решений этого уравнения $\varphi_0 = \arccos(a/2)$; тогда внутренний овал для $a \in [0,2]$ образуется при $\varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0]$, а для $a \in [-2,0]$ – при $\varphi \in [\pi - \varphi_0, \pi + \varphi_0]$.

Обозначим

$$\partial K = \{(\alpha,\beta,a):\ \alpha = a\cos\varphi - \cos 2\varphi,\ \beta = a\sin\varphi - \sin 2\varphi,\ a \in [0,2],\ \varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0]\} \cup$$
$$\cup \{(\alpha,\beta,a):\ \alpha = a\cos\varphi - \cos 2\varphi,\ \beta = a\sin\varphi - \sin 2\varphi,\ a \in [-2,0],\ \varphi \in [\pi - \varphi_0, \pi + \varphi_0]\},$$

а через K – открытую область, ограниченную поверхностью ∂K (см. рис. 5). Теперь можно сформулировать критерий экспоненциальной устойчивости для уравнения (13).

Теорема 6. *Для того чтобы уравнение* (13) *было экспоненциально устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы точка с координатами* $(\mathrm{Re}\,b, \mathrm{Im}\,b, a)$ *принадлежала области* K.

Доказательство. Так как K является единственной областью с индексом 0, то она, согласно теореме 2 и методу D-разбиений, является областью экспоненциальной устойчивости.

Теперь найдем условия на a и b, при которых уравнение (13) будет устойчиво по Ляпунову. Очевидно, если $(\mathrm{Re}\,b, \mathrm{Im}\,b, a) \in K$, то (13) устойчиво по Ляпунову. Но из теоремы 3 следует, что к K следует добавить те точки, для которых корни характеристического уравнения лежат на границе единичного круга, но не являются кратными.

Выясним, когда характеристическое уравнение (14) имеет кратные корни. Это означает $\lambda^2 - a\lambda + b = (\lambda - \lambda_0)^2$, что возможно только при $\alpha = a^2/4$, $\beta = 0$ (на рис. 6 «кривая кратности» отмечена красным цветом), а соответствующие корни уравнения (14) $\lambda_0 = a/2$. Очевидно, что λ_0– корни кратности 2 – не лежат на границе единичного круга, кроме случаев $\lambda_0 = \pm 1$. Значит, все точки, лежащие на поверхности (15), кроме вершин конусов, соответствуют простым корням уравнения (14).

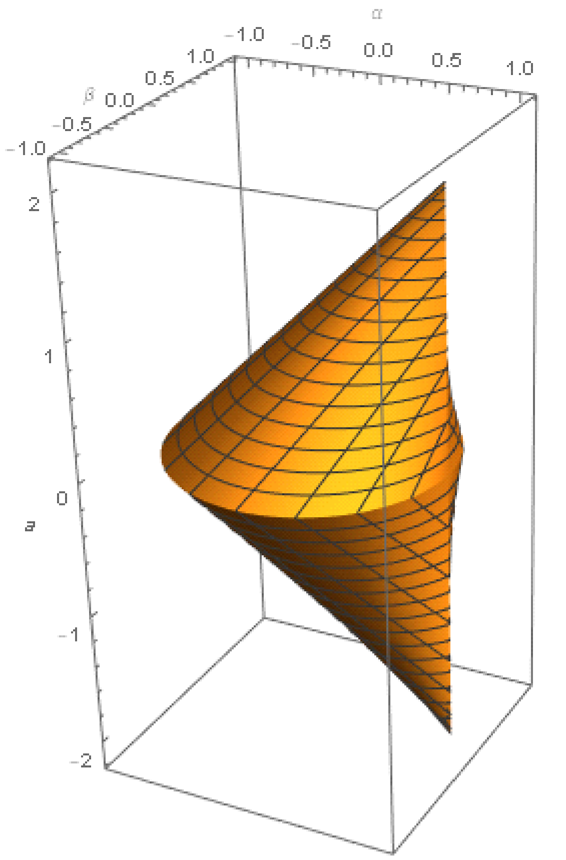

Рис. 5. Область устойчивости для уравнения (13)

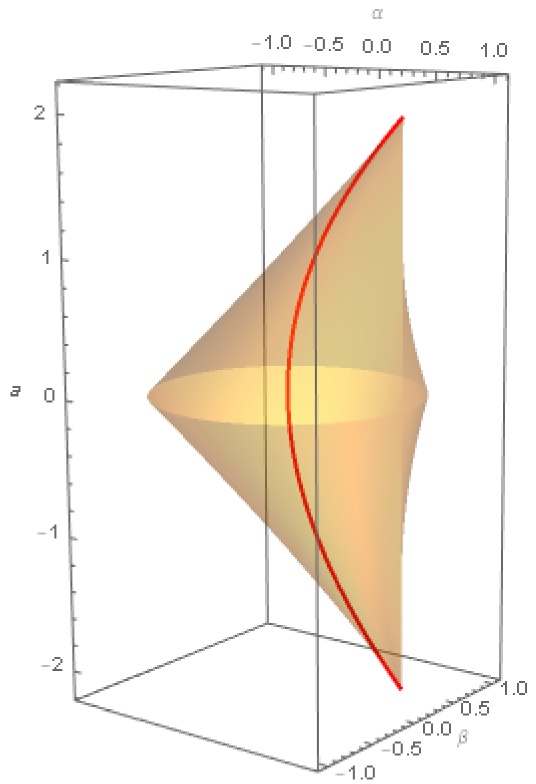

Рис. 6. «Кривая кратности» в области K

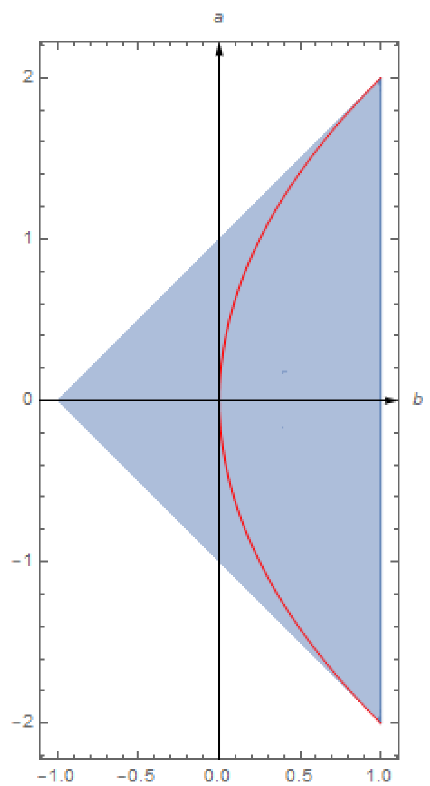

Рис. 7. Сечение конуса K при $\beta = 0$

Найдем корни уравнения (14), когда α,β имеют вид (15). Так как

$$\lambda^2 - a\lambda + \alpha + i\beta = \lambda^2 - a\lambda + a\cos\varphi - \cos 2\varphi + ia\sin\varphi - i\sin 2\varphi =$$
$$= \lambda^2 - a\lambda + ae^{i\varphi} - e^{2i\varphi} = \left(\lambda - e^{i\varphi}\right)\left(\lambda - a + e^{i\varphi}\right),$$

то корни характеристического уравнения $\lambda_1 = e^{i\varphi}, \lambda_2 = a - e^{i\varphi}$. Очевидно, что $|\lambda_1| = 1$, оценим $|\lambda_2|$.

$$|\lambda_2| = \left|a - e^{i\varphi}\right| = \sqrt{(a-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi} = \sqrt{a^2 - 2a\cos(\varphi) + 1}.$$

- Пусть $(\alpha,\beta,a) \in \partial K$. Тогда $\varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0]$, если $a \in [0,2]$ и $\varphi \in [\pi - \varphi_0, \pi + \varphi_0]$, если $a \in [-2,0]$. Следовательно, $|\lambda_2| = \sqrt{a^2 - 2a\cos\varphi + 1} \le 1$.
- Пусть $(\alpha,\beta,a) \notin \partial K$. Тогда $\varphi \in [-\pi, -\varphi_0) \cup (\varphi_0, \pi]$, если $a \in [0,2]$ и $\varphi \in [0, \pi - \varphi_0) \cup$ $\cup (\pi + \varphi_0, 2\pi]$, $a \in [-2,0]$. Следовательно, $|\lambda_2| = \sqrt{a^2 - 2a\cos(\varphi) + 1} > 1$.

Сопоставим эти рассуждения с рис. 6. Мы убедились, что если точки принадлежат границам конусов (за исключением вершин), то оба корня характеристического уравнения простые и не выходят за границы единичного круга. Из теоремы 3 следует, что (13) устойчиво по Ляпунову. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 7. *Для того чтобы уравнение* (13) *было устойчивым по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы точка с координатами* $(\operatorname{Re} b, \operatorname{Im} b, a)$ *принадлежала области* $K \cup \partial K \setminus \{1, 0, \ \pm 2\}$.

Снова отметим случай, когда оба коэффициента уравнения (13) вещественны. Из теорем 5 и 6 получаем два следствия.

Следствие 3. *Пусть* $b \in R$. *Уравнение* (13) *экспоненциально устойчиво, если и только если* $a \in (-2,2)$, $b \in (-a-1, a-1)$.

Доказательство. Так как $b \in R$, то $\beta = 0, \alpha = b$. Из определения ∂K получаем:

$$\begin{cases} \cos 2\varphi - a\cos\varphi + b = 0, \\ \sin 2\varphi - a\sin\varphi = 0. \end{cases}$$

Представим второе равенство в виде $\sin\varphi\left(2\cos\varphi - a\right) = 0$, откуда следует, что либо $\sin\varphi = 0$, либо $\cos\varphi = a/2$. Рассмотрим первый случай. При $a \in [0,2]$ из определения ∂K следует, что $\varphi = 0$, тогда из первого равенства имеем $1 - a + b = 0$; при $a \in [-2,0]$ из определения ∂K следует, что $\varphi = \pi$, тогда из первого равенства получаем $1 + a + b = 0$.

Во втором случае, подставляя $\cos\varphi = a/2$ в первое уравнение системы, получаем $b = 1$.

Таким образом, в сечении поверхности ∂K плоскостью $\beta = 0$ образуются три прямых, $b = a - 1$, $b = -a - 1$, $b = 1$, которые ограничивают треугольник (рис. 7). Этот треугольник является сечением конуса K плоскостью $\beta = 0$, следовательно, он есть область экспоненциальной устойчивости при $b \in R$.

Аналогично доказывается

Следствие 4. *Пусть* $b \in R$. *Уравнение* (13) *устойчиво по Ляпунову, если и только если* $a \in (-2,2)$, $b \in [-a-1, a-1]$.

2.3. Уравнение с двумя комплексными коэффициентами

Рассмотрим разностное уравнение, которое включает в себя уравнения из разделов 2.1 и 2.2 как частные случаи:

$$x(n+1)+ax(n)+bx(n-1)=0, \quad n\in N, \tag{17}$$

где $a,b\in\mathbb{C}$.

Запишем коэффициент a в показательной форме $a=|a|e^{i\omega}$, для коэффициента b сохраним алгебраическую форму $b=\alpha+i\beta$. Сделаем замену $x(n)=e^{i\omega n}y(n)$. Тогда уравнение (17) перепишется в виде

$$y(n+1)+|a|\,y(n)+be^{-2i\omega}y(n-1)=0, \quad n\in N.$$

Теперь, если представить второй коэффициент как $be^{-2i\omega}=u+iv,$ получим уравнение

$$y(n+1)+|a|\,y(n)+(u+iv)y(n-1)=0, \quad n\in N, \tag{18}$$

которое является уравнением вида (13). Так как $|a|\geq 0,$ то его областью устойчивости является верхний конус на рис. 5.

Теорема 8. *Для того чтобы уравнение* (17) *было экспоненциально устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы точка с координатами* $(\alpha\cos 2\omega+\beta\sin 2\omega, \beta\cos 2\omega-\alpha\sin 2\omega, |a|)$ *принадлежала области* K.

Доказательство. Так как $|x(n)|=|e^{i\omega n}y(n)|=|y(n)|$, то уравнение (17) экспоненциально устойчиво, если и только если экспоненциально устойчиво уравнение (18). Осталось заметить, что $u=\alpha\cos 2\omega+\beta\sin 2\omega$, а $v=\beta\cos 2\omega-\alpha\sin 2\omega$ и применить к уравнению (18) теорему 6.

Аналогичным образом, опираясь на теорему 6, получаем для (17) критерий устойчивости по Ляпунову.

Теорема 9. *Для того чтобы уравнение* (17) *было устойчиво по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы точка с координатами* $(\alpha\cos 2\omega+\beta\sin 2\omega, \beta\cos 2\omega-\alpha\sin 2\omega, |a|)$ *принадлежала области* $K\cup\partial K\setminus\{0,1,2\}$.

Теоремам 8 и 9 можно придать другой вид, если указать множество, которому должны принадлежать точки $(\alpha,\beta,|a|)$.

Найдём семейство поверхностей, которые задают D-разбиение в пространстве параметров $(\alpha,\beta,|a|)$ при фиксированном ω. Из формул (15), примененных к уравнению (18), и формул для u и v, приведенных в доказательстве теоремы 8, получаем

$$\begin{cases}\alpha\cos 2\omega+\beta\sin 2\omega=|a|\cos\varphi-\cos 2\varphi,\\ \beta\cos 2\omega-\alpha\sin 2\omega=|a|\sin\varphi-\sin 2\varphi,\end{cases}$$

откуда легко выразить α и β:

$$\begin{cases}\alpha=|a|\cos(\varphi+2\omega)-\cos(2\varphi+2\omega),\\ \beta=|a|\sin(\varphi+2\omega)-\sin(2\varphi+2\omega).\end{cases} \tag{19}$$

Равенства (19) можно рассматривать при каждом фиксированном ω как параметрически заданные поверхности, которые мы обозначим через ∂K_ω, а ограниченные ими области через K_ω. При $\omega = 0$ это будет определенная в разделе 2.2 поверхность и ограниченный ею конус устойчивости, т.е. $\partial K_0 = \partial K$, а $K_0 = K$. Так как $\alpha + i\beta = (u + iv)e^{2i\omega}$, то K_ω получается из конуса K_0 поворотом вокруг оси $|a|$ на угол 2ω (на рис. 8 приведены четыре таких конуса). Основанием всех конусов K_ω служит одна и та же окружность $|b| = 1$, лежащая в плоскости $a = 0$, а вершины конусов имеют координаты $\{\cos 2\omega, \sin 2\omega, 2\}$ и описывают в плоскости $a = 2$ ту же окружность $|b| = 1$. Эта окружность образует множество точек, лежащих на поверхностях ∂K_ω, которым соответствуют кратные корни характеристического полинома для уравнения (17).

Теперь теоремы 8 и 9 можно переформулировать в терминах областей K_ω.

Теорема 10. *Для того чтобы уравнение* (17) *было экспоненциально устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы точка с координатами* $(\mathrm{Re}\, b, \mathrm{Im}\, b, |a|)$ *принадлежала области* K_ω.

Теорема 11. *Для того чтобы уравнение* (17) *было устойчиво по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы точка с координатами* $(\mathrm{Re}\, b, \mathrm{Im}\, b, |a|)$ *принадлежала области* $K_\omega \cup \partial K_\omega \setminus \{\cos 2\omega, \sin 2\omega, 2\}$.

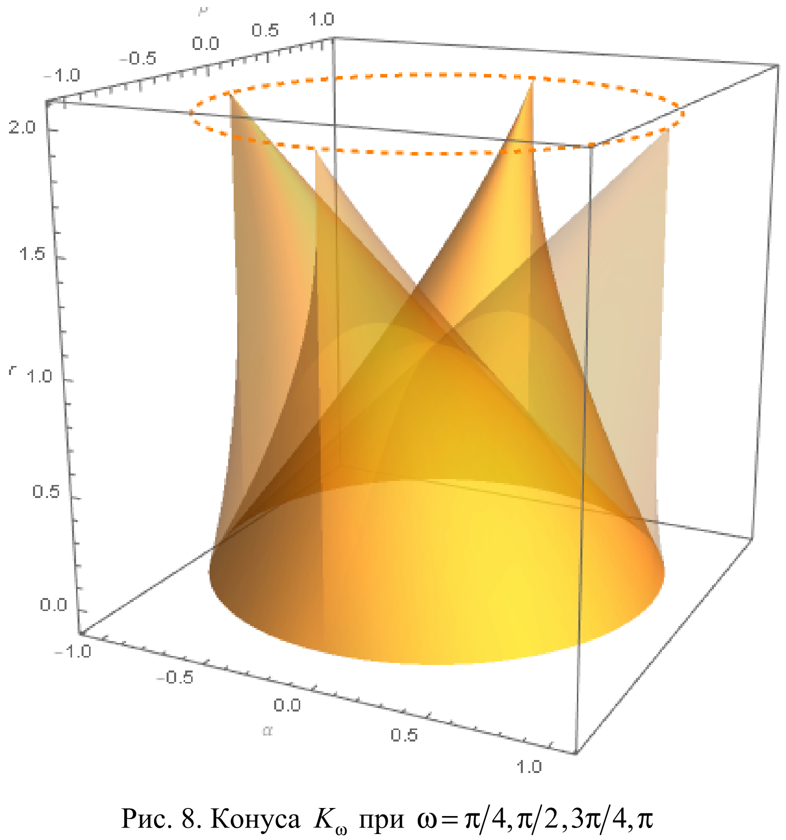

Рис. 8. Конуса K_ω при $\omega = \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$

3. Абсолютная устойчивость

Как отмечалось выше, все конуса семейства K_ω имеют общее основание – круг единичного радиуса, лежащий в плоскости $|a|=0.$ Однако рис. 8 позволяет предположить, что пересечение конусов K_ω существенно больше, чем круг: они пересекаются по области ненулевого объема. Найдем эту область.

Определение 4. Пусть D_ω – семейство областей устойчивости, зависящих от параметра $\omega\in\Omega$. *Областью абсолютной устойчивости относительно параметра* ω назовем пересечение $\bigcap\limits_{\omega\in\Omega} D_\omega.$

Уравнение назовем *абсолютно устойчивым* (экспоненциально, асимптотически, по Ляпунову), если его параметры принадлежат соответствующей области абсолютной устойчивости.

Рассмотрим область K_{abs} – прямой круговой конус вида

$$K_{abs}=\left\{(\alpha,\beta,|a|):\ 0\le|a|<1,\ \alpha^2+\beta^2<(1-|a|)^2\right\},$$

и докажем, что он является областью абсолютной экспоненциальной устойчивости для семейства $K_\omega.$

Теорема 12. $K_{abs}=\bigcap\limits_{\omega\in[0,\pi)} K_\omega.$

Доказательство разобьем на два этапа.

I. Убедимся, что при любом $\omega\in[0,\pi)$ справедливо включение $K_{abs}\subseteq K_\omega$. Пусть точка $M(\alpha,\beta,|a|)\in K_{abs}$. Тогда $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}<1-|a|\le\sqrt{|a|^2+1-2|a|\cdot\cos\varphi}$, что в силу равенств (19) и определения K_ω означает, что M принадлежит всем K_ω. Следовательно, $K_{abs}\subseteq\bigcap\limits_{\omega\in[0,\pi)} K_\omega.$

II. Покажем, что $K_{abs}\supseteq\bigcap\limits_{\omega\in[0,\pi)} K_\omega.$ Допустим, что это не так. Тогда найдется точка M такая, что $M\in K_\omega$ при всех $\omega\in[0,\pi)$, но при этом $M\notin K_{abs}$. Проведем плоскость через точку M и прямую $\alpha=0,\beta=0$ (ось конуса K_{abs}). Сначала рассмотрим случай, когда эта плоскость имеет вид $\beta=0$. Так как $M\in K_0\setminus K_{abs}$, то, в силу следствия 3 (см. рис. 7) с учетом того, что $|a|\ge 0$, заключаем, что $M\in\Delta COD$ (рис. 9). С другой стороны, $M\in K_{\pi/2}\setminus K_{abs}$, где конус $K_{\pi/2}$ получается из K_0 поворотом на угол π, а это означает, что $M\in\Delta AOB$ (см. рис. 9), что, очевидно, невозможно. Так как каждый конус K_ω получается из K_0 поворотом на угол 2ω, а конус K_{abs} инвариантен относительно поворота вокруг оси на любой угол, то рассуждения, проведенные выше для плоскости $\beta=0$, справедливы для любого расположения точки M : в сечениях будет получаться тот же рис. 9. Таким образом, если $M\in K_\omega\setminus K_{abs}$, то $M\notin K_{\omega'}\setminus K_{abs}$ при $\omega'=\omega+\pi/2$, следовательно, $M\notin\bigcap\limits_{\omega\in[0,\pi)} K_\omega.$ Полученное противоречие доказывает требуемое включение.

Из I и II следует утверждение теоремы. ▲

Из определения 4 и теоремы 12 следует

Теорема 13. *Для того чтобы уравнение* (17) *было абсолютно экспоненциально устойчиво относительно параметра* ω, *необходимо и достаточно, чтобы точка с координатами* $(\mathrm{Re}\,b, \mathrm{Im}\,b, |a|)$ *принадлежала конусу* K_{abs}.

Учитывая, что $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = |b|$ из определения K_{abs} и теоремы 12 получаем

Следствие 5. *Если* $|a|+|b|<1$, *то уравнение* (17) *экспоненциально устойчиво.*

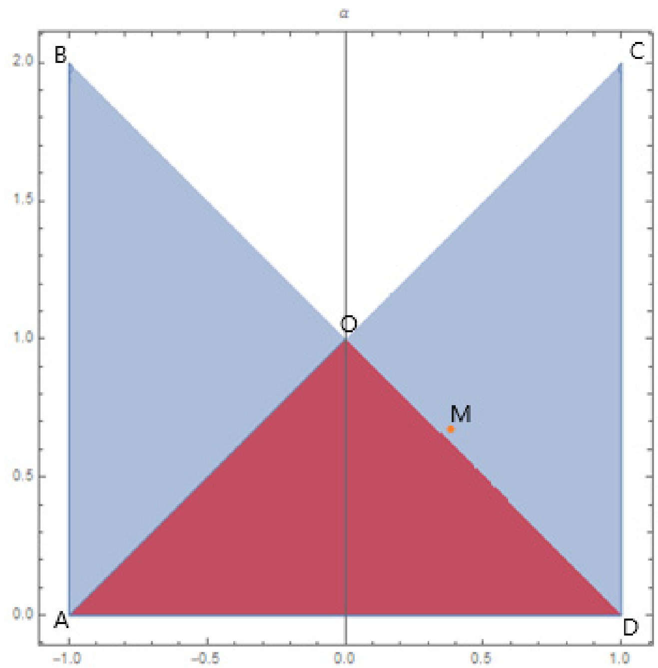

Рис. 9. Пересечение плоскости $\beta = 0$ и конусов $K_0, K_{\pi/2}$

Чтобы сформулировать признак абсолютной устойчивости по Ляпунову, добавим к конусу K_{abs} его границу. Обозначим

$$\partial K_{abs} = \left\{(\alpha, \beta, |a|):\ 0 \le |a| \le 1,\ \alpha^2+\beta^2 = (1-|a|)^2\right\}.$$

Повторяя доказательство теоремы 12, легко установить равенство

$$K_{abs} \cup \partial K_{abs} = \bigcap_{\omega\in[0,\pi)} (K_\omega \cup \partial K_\omega),$$

из которого следует

Теорема 14. *Для того чтобы уравнение* (17) *было абсолютно устойчиво по Ляпунову относительно параметра* ω, *необходимо и достаточно, чтобы точка с координатами* $(\mathrm{Re}\,b, \mathrm{Im}\,b, |a|)$ *принадлежала множеству* $K_{abs} \cup \partial K_{abs}$.

Следствие 6. *Если* $|a|+|b|\le 1$, *то уравнение* (17) *устойчиво по Ляпунову.*

Дадим геометрическую интерпретацию полученных результатов. В п. 2.2 было показано, что при любом ω область устойчивости уравнения (17) лежит внутри цилиндра с радиусом основания 1 и высотой 2. С учетом теорем 10, 11 и 13, 14 цилиндр можно разбить на три подобласти (рис. 10):

- область абсолютной устойчивости (нижний конус): точки, лежащие в этой области, задают коэффициенты уравнений (17), устойчивых при всех ω;

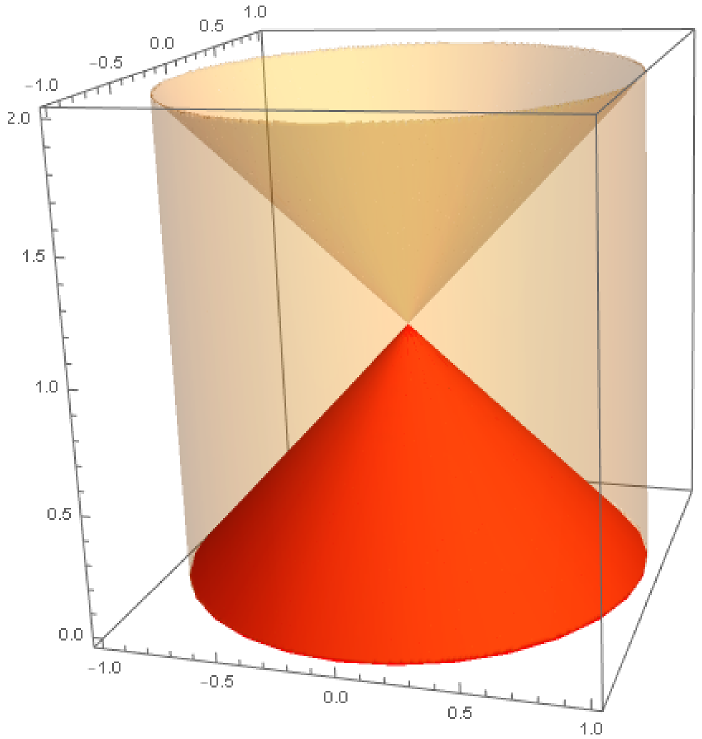

Рис. 10. Разбиение цилиндра

- область «условной устойчивости» (область между конусами): точки, лежащие в этой области, задают коэффициенты уравнений вида (17), которые, в зависимости от ω, могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми;
- область «абсолютной неустойчивости» (верхний конус): точки, лежащие в этой области, задают коэффициенты уравнений (17), не являющихся устойчивыми ни при каком ω.

Список литературы

1. Elaydi S. An Introduction to Difference Equations. – N.Y.: Springer, 2005. – 539 с.
2. Гельфанд А.О. Исчисление конечных разностей. – М.: Наука, 1967. – 376 с.
3. Самарский А.А., Карамзин Ю.Н. Разностные уравнения. – М.: Знание, 1978. – 64 с.
4. Мартынюк Д.И. Лекции по качественной теории разностных уравнений. – Киев: Наукова думка, 1972. – 246 с.
5. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 310 с.
6. Литвинова Э.В. Применение метода конечных разностей для решения динамических задач // Международный научно-исследовательский журнал. – 2017. – Вып. 6. – С. 145–149.
7. Радаченко В.П., Зотеев В.Е. Определение динамических характеристик механической системы на основе стохастических разностных уравнений колебаний // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2007. Вып. 1. С. 3-10.
8. Разностные схемы метода опорных операторов для уравнения теории упругости в цилиндрической геометрии / Ю.А. Повещенко, В.А. Гасилов, М.Е. Ладонкина, В.О. Подрыга, И.С. Насекин // Препринты ИМП им. М.В. Келдыша. – 2018. – № 142. – С. 1–22. DOI: 10.20948/prepr-2018-142
9. Оптимальные вычислительные технологии в математическом моделировании нелинейных задач механики деформируемого твёрдого тела / В.Г. Дмитриев, С.И. Жаворонок, Е.К. Коровин, В.Г. Москвитин // Инженерная физика. – 2008. – № 6. – С. 2–5.

10. Beverton R.J.H., Holt S.J. On the dynamics of exploited fish population // Fishery investigation. – 1957. – Ser. 2, № 19. – P. 1–533.

11. Pielou E.C. An introduction to mathematical ecology. – New York: : Wiley Interscience, 1969. – 294 p.

12. Pielou E.C. Population and community ecology. – N.Y.: Gordon and Breach, 1974. – 424 p.

13. Неймарк Ю.И. Устойчивость линеаризованных систем (дискретных и распределенных). – Л.: ЛКВВИА, 1949. – 140 с.

14. Неймарк Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы. – М.: Наука, 1978. – 336 с.

References

1. Elaydi S. An Introduction to Difference Equations. New York, Springer, 2005, 539 p.

2. Gelfand A.O. *Ischislenie konechnykh raznostei* [Calculus of finite differences]. Moscow, Nauka, 1967, 376 p.

3. Samarskiy A.A., Karamzin Yu.N. *Raznostnye uravneniia* [Difference equations]. Moscow, Znanie, 1978, 64 p.

4. Martynyuk D.I. *Lektsii po kachestvennoi teorii raznostnykh uravnenii* [Lectures on the qualitative theory of difference equations]. Kiev, Naukova dumka, 1972, 246 p.

5. Khalanai A., Wexler D. *Kachestvennaia teoriia impul'snykh sistem* [Qualitative theory of impulse systems]. Moscow, Mir, 1971, 310 p.

6. Litvinova E.V. *Primenenie metoda konechnykh raznostei dlia resheniia dinamicheskikh zadach* [Application of finite differences method for dynamic problems solution]. *International Research Journal*, 2017, iss. 6, pp. 145–149.

7. Radachenko V.P., Zoteev V.E. *Opredelenie dinamicheskikh kharakteristik mekhanicheskoi sistemy na osnove stokhasticheskikh raznostnykh uravnenii kolebanii* [Determination of dynamic characteristics of a mechanical system based on stochastic difference equations of oscillations]. *Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2007, iss. 1, pp. 3–10.

8. Poveshchenko Yu.A., Gasilov V.A., Ladonkina M.E., Podryga V.O., Insekin I.S. *Raznostnye skhemy metoda opornykh operatorov dlia uravneniia teorii uprugosti v tsilindricheskoi geometrii* [Difference schemes of the method of support operators for the equation of elasticity theory in cylindrical geometry]. *Preprints of IMP named after M.V. Keldysh*. 2018, no.142, pp. 1-22. DOI:10.20948/prepr-2018-142

9. Dmitriev V.G., Zhavoronok S.I., Korovin E.K., Moskvitin V.G. *Optimal'nye vychislitel'nye tekhnologii v matematicheskom modelirovanii neli-neinykh zadach mekhaniki deformiruemogo tverdogo tela* [Optimal computational technologies in mathematical modeling of nonlinear problems of deformable solid mechanics]. *Engineering physics*, 2008, no. 6, pp. 2–5.

10. Beverton R.J.H., Holt S.J. On the dynamics of exploited fish population. *Fishery investigation*. 1957, Ser. 2, no. 19, pp.1–533.

11. Pielou E.C. An introduction to mathematical ecology. New York, Wiley Interscience. 1969, 294 p.

12. Pielou E.C. Population and community ecology. New York, Gordon and Breach. 1974, 424 p.

13. Neymark Yu.I. *Ustoichivost' linearizovannykh sistem* (diskretnykh i raspredelennykh) [Stability of linearized systems (discrete and distributed)]. Leningrad, LKVVIA, 1949, 140 p.

14. Neymark Yu.I. *Dinamicheskie sistemy i upravliaemye protsessy* [Dynamic systems and controlled processes]. Moscow, Nauka, 1978, 336 p.