Баротов, Д. Н. О выразимости функций системы $x'(t) = A \cdot x(t)$, собственные значения матрицы которой являются некратными в виде линейных комбинаций производных одной функции, входящей в эту систему / Д. Н. Баротов, Р. Н. Баротов // Прикладная математика и вопросы управления. – 2023. – № 2. – С. 8–16. DOI 10.15593/2499-9873/2023.2.01

Библиографическое описание согласно ГОСТ Р 7.0.100–2018
Баротов, Д. Н. О выразимости функций системы $x'(t) = A \cdot x(t)$, собственные значения матрицы которой являются некратными в виде линейных комбинаций производных одной функции, входящей в эту систему / Д. Н. Баротов, Р. Н. Баротов. – Текст : непосредственный. – DOI 10.15593/2499-9873/2023.2.01 // Прикладная математика и вопросы управления / Applied Mathematics and Control Sciences. – 2023. – № 2. – С. 8–16.

пермский политех

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ВОПРОСЫ УПРАВЛЕНИЯ
№ 2, 2023
https://ered.pstu.ru/index.php/amcs

Научная статья
DOI: 10.15593/2499-9873/2023.2.01
УДК 517.912

О выразимости функций системы $x'(t) = A \cdot x(t)$, собственные значения матрицы которой являются некратными в виде линейных комбинаций производных одной функции, входящей в эту систему

Д.Н. Баротов[1], Р.Н. Баротов[2]

[1]Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва, Российская Федерация
[2]Худжандский государственный университет имени академика Бободжона Гафурова, Худжанд, Республика Таджикистан

О СТАТЬЕ

Получена: 10 марта 2023
Одобрена: 05 июня 2023
Принята к публикации: 22 июня 2023

Финансирование
Исследование не имело спонсорской поддержки.

Конфликт интересов
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов
равноценен.

Ключевые слова:
система линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, метод приведения системы линейных уравнений к одному уравнению высшего порядка, выразимость, критерий выразимости функций системы линейных дифференциальных уравнений.

АННОТАЦИЯ

Задача решения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами является одной из важнейших проблем как теории обыкновенных дифференциальных уравнений, так и линейной алгебры. Поэтому, с одной стороны, для таких систем разрабатываются новые методы и алгоритмы, а с другой стороны, существующие методы и алгоритмы решения таких систем совершенствуются. Одним из наиболее известных методов решения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами является метод приведения системы линейных уравнений к одному уравнению высшего порядка, позволяющего находить решения исходной системы в виде линейных комбинаций производных только одной неизвестной функции.

В данной работе рассматривается уточнение метода приведения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами к одному уравнению высшего порядка, позволяющего найти общее решение исходной системы, а именно исследуется выразимость всех функций системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $x'(t) = A \cdot x(t)$ в виде линейных комбинаций производных только одной неизвестной функции $x_k(t)$, входящей в эту систему. Для любой матрицы A, все собственные значения которой не кратны, сформулирован новый простой критерий выразимости в терминах рангов матриц и подробно доказана его корректность. Полученный результат может быть также применен при исследовании решений системы $x'(t) = A \cdot x(t)$ на периодичность и при изучении линейных систем на полную наблюдаемость.

© **Баротов Достонжон Нумонжонович** – старший преподаватель департамента анализа данных и машинного обучения, e-mail: dnbarotov@fa.ru, ORCID: 0000-0001-5047-7710.
Баротов Рузибой Нумонжонович – докторант кафедры математического анализа имени профессора А. Мухсинова, e-mail: ruzmet.tj@mail.ru, ORCID: 0000-0003-3729-6143.

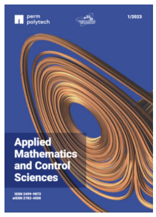
Perm Polytech Style: Barotov D.N., Barotov R.N. On the expressibility of the functions of the system $x'(t) = A \cdot x(t)$, the eigenvalues of the matrix of which are non-multiple in the form of linear combinations of derivatives of one function included in this system. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2023, no. 2, pp. 8–16. DOI: 10.15593/2499-9873/2023.2.01

MDPI and ACS Style: Barotov, D.N.; Barotov, R.N. On the expressibility of the functions of the system $x'(t) = A \cdot x(t)$, he eigenvalues of the matrix of which are non-multiple in the form of linear combinations of derivatives of one function included in this system. *Appl. Math. Control Sci.* **2023**, 2, 8–16. https://doi.org/10.15593/2499-9873/2023.2.01

Chicago/Turabian Style: Barotov, Dostonjon N., and Ruziboy N. Barotov. 2023. "On the expressibility of the functions of the system $x'(t) = A \cdot x(t)$, the eigenvalues of the matrix of which are non-multiple in the form of linear combinations of derivatives of one function included in this system". *Appl. Math. Control Sci.* no. 2: 8–16. https://doi.org/10.15593/2499-9873/2023.2.01

perm polytech

APPLIED MATHEMATICS
AND CONTROL SCIENCES
№ 2, 2023
https://ered.pstu.ru/index.php/amcs



Article
DOI: 10.15593/2499-9873/2023.2.01
UDK 517.912

On the expressibility of the functions of the system $x'(t) = A \cdot x(t)$, the eigenvalues of the matrix of which are non-multiple in the form of linear combinations of derivatives of one function included in this system

D.N. Barotov[1], R.N. Barotov[2]

[1]Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russian Federation
[2]Khujand State University named after Academician Bobojon Gafurov, Khujand, Republic of Tajikistan

ARTICLE INFO

Received: 10 March 2023
Approved: 05 June 2023
Accepted for publication: 22 June 2023

Funding
This research received no external funding.

Conflicts of Interest
The authors declare no conflict of interest.

Author Contributions
equivalent.

Keywords:
system of linear homogeneous differential equations with constant coefficients, method for reducing a system of linear equations to a single higher-order equation, expressibility, criterion for expressibility of functions of a system of linear differential equations.

ABSTRACT

The problem of solving a system of linear ordinary differential equations with constant coefficients is one of the most important problems in both the theory of ordinary differential equations and linear algebra. Therefore, on the one hand, new methods and algorithms are being developed for such systems, and on the other hand, existing methods and algorithms for solving such systems are being improved. One of the most well-known methods for solving a system of linear ordinary differential equations with constant coefficients is the method of reducing a system of linear equations to a single higher-order equation, which makes it possible to find solutions to the original system in the form of linear combinations of derivatives of only one unknown function.

In this paper, we consider a refinement of the method for reducing a system of linear ordinary differential equations with constant coefficients to a single higher-order equation, which makes it possible to find a general solution to the original system; namely, we study the expressibility of all functions of the system of linear homogeneous differential equations with constant coefficients $x'(t) = A \cdot x(t)$ in the form of linear combinations of derivatives of only one unknown function $x_k(t)$, which is part of this system. For any matrix A, all of whose eigenvalues are not multiples, a new simple criterion for expressibility in terms of matrix ranks is formulated, and its correctness is proved. The result obtained can also be applied in the study of solutions of the system $x'(t) = A \cdot x(t)$ for periodicity and in the study of linear systems for complete observability.

© **Dostonjon N. Barotov** – Senior Lecturer, Department of Data Analysis and Machine Learning, e-mail: dnbarotov@fa.ru, ORCID: 0000-0001-5047-7710.
Ruziboy N. Barotov – Doctoral Student of the Department of Mathematical Analysis named after Professor A. Mukhsinov, e-mail: ruzmet.tj@mail.ru, ORCID: 0000-0003-3729-6143.

Введение

В данной работе рассматривается уточнение метода приведения системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами к одному уравнению высшего порядка, позволяющего найти общее решение исходной системы, а именно изучается задача выразимости всех функций $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, входящих в заданную однородную систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $x'(t) = A \cdot x(t)$ в виде линейных комбинаций производных только одной неизвестной функции $x_k(t)$, входящей в эту систему. В результате исследования для любой матрицы A, все собственные значения которой не кратны, найден простой критерий выразимости всех функций системы $x'(t) = A \cdot x(t)$ в виде линейных комбинаций производных $x_k(t)$ и доказана его корректность. Полученный результат может быть применен в ряд случаях: *a*) при исследовании решений системы $x'(t) = A \cdot x(t)$ на периодичность, поскольку периодическое решение системы имеет особое значение как для качественной теории дифференциальных уравнений, так и для изучения различных математических моделей в физике, химии, астрономии и других науках [1]; *b*) при применении метода сведения системы линейных дифференциальных уравнений относительно $x_k(t)$ к одному дифференциальному уравнению n-го порядка, позволяющего найти общее решение исходной системы в виде линейных комбинаций производных функции $x_k(t)$ [2–5]; *c*) при исследовании линейных систем на полную наблюдаемость [6].

Используемые обозначения и понятия

Пусть $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 1 \ldots & 0 \\ \ldots & & \\ 0 & 0 \ldots & 1 \end{bmatrix}$ – единичная матрица n-го порядка, а $E_i = \begin{bmatrix} 0 \ldots & 0 & 1 & 0 \ldots & 0 \end{bmatrix}$ – i-я строка матрицы E.

Пусть $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \ldots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$ – комплексная матрица n-го порядка такая, что мощность множества ее собственных значений равна n, то есть $\left|\{\lambda : \det(A - \lambda \cdot E) = 0\}\right| = n$.

Через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ обозначим собственные значения матрицы A, через Λ обозначим их множество, то есть $\Lambda = \{\lambda : \det(A - \lambda \cdot E) = 0\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$.

Через v_i обозначим собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению λ_i.

Пусть $V = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ – матрица, составленная из координат собственных векторов-столбцов матрицы A.

Пусть $B(\lambda)=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}$.

Пусть $A_i=\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}$ – i-я строка матрицы $A, B_j(\lambda)=\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$ – j-й столбец матрицы $B(\lambda)$.

Пусть

$$B(\lambda,k)=\left[B_1(\lambda),B_2(\lambda),\dots,B_{k-1}(\lambda),B_{k+1}(\lambda),\dots,\ B_n(\lambda)\right]\ =\ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1\,k-1} & b_{1\,k+1} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2\,k-1} & b_{2\,k+1} & \dots & b_{2n} \\ \dots & & & & & & b_{nn} \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{n\,k-1} & b_{n\,k+1} & \dots & \end{bmatrix} -$$

матрица, полученная из матрицы $B(\lambda)$ вычеркиванием k-го столбца $B_k(\lambda)$.

Пусть $Sp(f_1,f_2,\dots,f_n)=\{\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2+\dots+\alpha_n f_n:\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in\mathbb{C}\}$ – линейная оболочка функций $f_1,f_2,\dots,f_n$.

Критерий выразимости всех функций системы *x'*(*t*) = *A*·*x*(*t*) в виде линейных комбинаций производных неизвестной функции *x*$_k$(*t*), входящей в эту систему

Рассмотрим однородную систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} x_1'(t)=a_{11}x_1(t)+a_{12}x_2(t)+\dots+a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t)=a_{21}x_1(t)+a_{22}x_2(t)+\dots+a_{2n}x_n(t) \\ x_3'(t)=a_{31}x_1(t)+a_{32}x_2(t)+\dots+a_{3n}x_n(t) \\ \dots \\ x_n'(t)=a_{n1}x_1(t)+a_{n2}x_2(t)+\dots+a_{nn}x_n(t) \end{cases}, \qquad (1)$$

В данной работе мы исследуем такую задачу: можно ли систему (1) относительно неизвестной функции $x_k(t)$ привести к эквивалентной системе дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} x_1(t)=d_{11}x_k(t)+d_{12}x_k'(t)+\dots+d_{1n}x_k^{(n-1)}(t) \\ x_2(t)=d_{21}x_k(t)+d_{22}x_k'(t)+\dots+d_{2n}x_k^{(n-1)}(t) \\ \dots \\ x_{k-1}'(t)=d_{k-1\,1}x_k(t)+d_{k-1\,2}x_k'(t)+\dots+d_{k-1\,n}x_k^{(n-1)}(t) \\ x_k^{(n)}(t)=d_{k1}x_k(t)+d_{k2}x_k'(t)+\dots+d_{kn}x_k^{(n-1)}(t) \\ x_{k+1}'(t)=d_{k+1\,1}x_k(t)+d_{k+1\,2}x_k'(t)+\dots+d_{k+1\,n}x_k^{(n-1)}(t) \\ \dots \\ x_n(t)=d_{n1}x_k(t)+d_{n2}x_k'(t)+\dots+d_{nn}x_k^{(n-1)}(t) \end{cases}, \qquad (2)$$

то есть можно ли для любого начального условия $x(t_0)=x_0$ выразить значения всех функций $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, входящих в заданную систему (1) в виде линейных комбинаций производных только одной неизвестной функции $x_k(t)$, входящей в эту систему и удовлетворяющей одному скалярному дифференциальному уравнению n-го порядка.

Теорема. *Систему* (1) *относительно неизвестной функции* $x_k(t)$ *можно привести к эквивалентной системе* (2) *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rang}(B(\lambda))=\operatorname{rang}(B(\lambda,k)), \forall\lambda\in\Lambda.$

Доказательство. Достаточность. Пусть $\operatorname{rang}(B(\lambda))=\operatorname{rang}(B(\lambda,k)), \forall\lambda\in\Lambda.$ Из системы (1) и теоремы Гамильтона – Кэли [7] получаем:

$$\begin{cases} x_k(t)=E_k\cdot E\cdot x(t) \\ x_k^{'}(t)=A_k\cdot E\cdot x(t) \\ x_k^{''}(t)=A_k\cdot A\cdot x(t) \\ \ldots \\ x_k^{(n-1)}(t)=A_k\cdot A^{n-2}\cdot x(t) \\ x_k^{(n)}(t)-\sigma_1 x_k^{(n-1)}(t)+\ldots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}x_k^{'}(t)+(-1)^n\sigma_n x_k(t)=0 \end{cases}, \tag{3}$$

где $\sigma_i=\sigma_i(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ – элементарный симметрический многочлен степени i. Докажем, что $\det(H)\neq 0,$ где $H=\begin{bmatrix} E_k\cdot E \\ A_k\cdot E \\ A_k\cdot A \\ \ldots \\ A_k\cdot A^{n-2}\end{bmatrix}$. Для этого достаточно показать, что строки матрицы H линейно независимы. Действительно, пусть

$$\alpha_1\cdot E_k\cdot E+\alpha_2\cdot A_k\cdot E+\alpha_3\cdot A_k\cdot A+\ldots+\alpha_n\cdot A_k\cdot A^{n-2}=0. \tag{4}$$

Теперь из $\operatorname{rang}(B(\lambda))=\operatorname{rang}(B(\lambda,k)), \forall\lambda\in\Lambda$ следует, что для любого собственного значения λ_i матрицы A существует соответствующий собственный вектор v_i, у которого k-я координата равна 1 (отлична от нуля). Умножая равенство (4) справа на $v_1, v_2, \ldots, v_n$, получим

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2\cdot\lambda_1+\alpha_3\cdot\lambda_1^2+\ldots+\alpha_n\cdot\lambda_1^{n-1}=0 \\ \alpha_1+\alpha_2\cdot\lambda_2+\alpha_3\cdot\lambda_2^2+\ldots+\alpha_n\cdot\lambda_2^{n-1}=0 \\ \ldots \\ \alpha_1+\alpha_2\cdot\lambda_n+\alpha_3\cdot\lambda_n^2+\ldots+\alpha_n\cdot\lambda_n^{n-1}=0 \end{cases}. \tag{5}$$

Из формулы Крамера и свойств детерминанта Вандермонда следует, что система (5) имеет только одно нулевое решение, так как собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ попарно различны. Теперь из (3) следует, что

$$\begin{cases} x_k^{(n)}(t)-\sigma_1 x_k^{(n-1)}(t)+\ldots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}x_k^{'}(t)+(-1)^n\sigma_n x_k(t)=0 \\ x(t)= H^{-1}\cdot x_{(k)}(t) \end{cases}, \qquad (6)$$

где $x_{(k)}(t)=\begin{bmatrix} x_k(t) \\ x_k^{'}(t) \\ x_k^{''}(t) \\ \ldots \\ x_k^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$. Равенство (6) означает, что значения всех функций $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, входящих в систему (1), удалось выразить в виде линейных комбинаций производных только одной неизвестной функции $x_k(t)$, входящей в эту систему и удовлетворяющей одному скалярному дифференциальному уравнению n-го порядка

$$x_k^{(n)}(t)-\sigma_1 x_k^{(n-1)}(t)+\ldots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}x_k^{'}(t)+(-1)^n\sigma_n x_k(t)=0.$$

Чтобы завершить доказательство достаточности, остается только показать, что не только всякое решение системы (1) удовлетворяет системе (6), но и, наоборот, всякое решение системы (6) удовлетворяет системе (1). Для этого достаточно показать следующие:

$$i)\, A=H^{-1}\cdot F\cdot H \quad и \quad ii)\, x_{(k)}^{'}(t)=F\cdot x_{(k)}(t).$$

i) Непосредственно умножая матрицы, легко заметить, что

$$H\cdot V=W,\; W\cdot D=F\cdot W,\; A\cdot V=V\cdot D, \qquad (7)$$

где

$$W=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots & \lambda_n \\ \ldots & & & & \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

$$F=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -(-1)^n\sigma_n & -(-1)^{n-1}\sigma_{n-1} & -(-1)^{n-2}\sigma_{n-2} & \ldots & -(-1)^1\sigma_1 \end{bmatrix}$$

Теперь покажем, что из (7) следует $A=H^{-1}\cdot F\cdot H$. Действительно, $W\cdot D=F\cdot W\Rightarrow D\cdot W^{-1}= =W^{-1}\cdot F\Rightarrow V^{-1}\cdot A\cdot V\cdot W^{-1}=W^{-1}\cdot F\Rightarrow A\cdot V\cdot W^{-1}=V\cdot W^{-1}\cdot F\Rightarrow A\cdot H^{-1}=H^{-1}\cdot F\Rightarrow A=H^{-1}\cdot F\cdot H$.

ii) Проверяется непосредственно, то есть $x_{(k)}^{'}(t)=\begin{bmatrix} x_k^{'}(t) \\ x_k^{''}(t) \\ x_k^{'''}(t) \\ \ldots \\ x_k^{(n)}(t) \end{bmatrix}=$

$$=\begin{bmatrix} x_k^{'}(t) \\ x_k^{''}(t) \\ x_k^{'''}(t) \\ \dots \\ -(-1)^n\sigma_n x_k(t)-(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}x_k^{'}(t)-\dots-(-1)^1\sigma_1 x_k^{(n-1)}(t)\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -(-1)^n\sigma_n & -(-1)^{n-1}\sigma_{n-1} & -(-1)^{n-2}\sigma_{n-2} & \dots & -(-1)^1\sigma_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_k(t) \\ x_k^{'}(t) \\ x_k^{''}(t) \\ \dots \\ x_k^{(n-1)}(t)\end{bmatrix}=F\cdot x_{(k)}(t).$$

Необходимость. Пусть неверно, что $\operatorname{rang}(B(\lambda))=\operatorname{rang}(B(\lambda,k)),\forall\lambda\in\Lambda.$ Тогда $\exists r\in\{1,2,\dots,n\}:\operatorname{rang}(B(\lambda_r))\neq\operatorname{rang}(B(\lambda_r,k)).$ Из этого следует, что k-я координата собственного вектора v_r, соответствующего собственному значению λ_r равна 0. Общее решение системы (1) может быть представлено в виде [2–4; 8–12]:

$$x(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t)\end{bmatrix}=c_1\cdot v_1\cdot e^{\lambda_1\cdot x}+c_2\cdot v_2\cdot e^{\lambda_2\cdot x}+\dots+c_n\cdot v_n\cdot e^{\lambda_n\cdot x}.$$

Отсюда находим $x_k(t)=c_1\cdot v_{1k}\cdot e^{\lambda_1\cdot x}+c_2\cdot v_{2k}\cdot e^{\lambda_2\cdot x}+\dots+c_{r-1}\cdot v_{r-1k}\cdot e^{\lambda_{r-1}\cdot x}+c_r\cdot 0\cdot e^{\lambda_r\cdot x}+c_{r+1}\times$ $\times v_{r+1k}\cdot e^{\lambda_{r+1}\cdot x}+\dots+c_n\cdot v_{nk}\cdot e^{\lambda_n\cdot x}$, где v_{ik} – эта k-я координата вектора v_i. Теперь несложно заметить, что $Sp\left(x_k(t),x_k^{'}(t),\dots,x_k^{(n-1)}(t)\right)\subset Sp\left(e^{\lambda_1\cdot x},e^{\lambda_2\cdot x},\dots,e^{\lambda_{r-1}\cdot x},e^{\lambda_{r+1}\cdot x},\dots,e^{\lambda_n\cdot x}\right)$, но в силу собственности вектора v_r, $\exists i\in\{1,2,\dots,n\}:x_i(t)\notin Sp\left(e^{\lambda_1\cdot x},e^{\lambda_2\cdot x},\dots,e^{\lambda_{r-1}\cdot x},e^{\lambda_{r+1}\cdot x},\dots,e^{\lambda_n\cdot x}\right)$. Теорема доказана.

Замечание. *Пусть система* (1) *относительно неизвестной функции* $x_k(t)$ *приводится к системе* (2). *Тогда все функции* $x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t)$ *системы* (1) *периодические тогда и только тогда, когда функция* $x_k(t)$ *периодична*.

Заключение

В результате исследования для любой матрицы A, все собственные значения которой не кратны, найден простой критерий выразимости всех функций системы $x'(t)=A\cdot x(t)$ в виде линейных комбинаций производных $x_k(t)$ и доказана его корректность. Полученный результат может быть применен при исследовании решений системы $x'(t)=A\cdot x(t)$ на периодичность при применении метода сведения системы линейных дифференциальных уравнений относительно $x_k(t)$ к одному дифференциальному уравнению n-го порядка, позволяющего найти общее решение исходной системы в виде линейных комбинаций производных функции $x_k(t)$, при исследовании линейных систем на полную наблюдаемость.

Список литературы

1. Коломина М.В. Периодические решения систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами: дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02, защищена 29.11.2000. – Казань, 2000. – 119 с.

2. Малышев Ю.В., Атаманов П.С. О решении системы линейных дифференциальных уравнений операторным методом // Вестник Чувашского университета. – 2011. – № 3. – С. 155–159.

3. Ивлев В.В., Кривошей Е.А. Системы линейных дифференциальных уравнений. Интегрируемые комбинации (продолжение) // Математическое образование. – 2018. – № 1 (85). – С. 47–51.

4. Градштейн И.С. О поведении решений системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, вырождающихся в пределе // Известия Российской академии наук. Серия математическая. – 1949. – Т. 13, № 3. – С. 253–280.

5. Рыбаков М.А. Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с помощью преобразования Лапласа // Вестник российских университетов. Математика. – 2009. – Т. 14, № 4. – С. 791–792.

6. Бударгин О.М., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Новые эффективные критерии управляемости и наблюдаемости для систем большой размерности // Проблемы управления. – 2012. – № 1. – С. 21–25.

7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Физматгиз, 2010. – 560 с.

8. Пантелеев А.В., Якимова А.С., Рыбаков К.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Практикум. – М.: Инфра-М, 2016. – 432 с.

9. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Физматгиз, 1965. – 332 с.

10. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Физматгиз, 1961. – 100 с.

11. Мухамеджанова У.М. Жорданова форма матрицы и решения линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Ученые записки Худжандского государственного университета им. академика Б. Гафурова. Серия: Естественные и экономические науки. – 2017. – № 1. – С. 20–26.

12. Балоев А.А. Матрично-алгебраическая форма решения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2014. – Т. 17, № 3. – С. 3–12.

References

1. Kolomina M.V. Periodicheskiye resheniya sistem differentsial'nykh uravneniy s peremennymi koeffitsiyentami [Periodic solutions of systems of differential equations with variable coefficients]. Ph.D. thesis, Kazan, 2000, 119 p.

2. Malyshev Yu.V., Atamanov P. S. Operatornyy metod privedeniya sistemy lineynykh differentsial'nykh uravneniy k odnomu differentsial'nomu uravneniyu [Symbolic method transforming the system of linear differential equations to one differential equation]. *Vestnik Chuvashskogo universiteta*. 2012, no. 3, pp. 13–24.

3. Ivlev V.V., Krivoshey Ye. A. Sistemy lineinykh differentsial'nykh uravnenii. Integriruemye kombinatsii (prodolzhenie) [Systems of linear differential equations Integrable combinations (continued)]. *Mathematical Education*, 2018, no. 1 (85), pp. 47–51.

4. Gradstein I.S. O povedenii reshenii sistemy lineinykh differentsial'nykh uravnenii s postoiannymi koeffitsientami, vyrozhdaiushchikhsia v predele [The behavior of the solutions of a system of linear differential equations with constant coefficients which degenerate in the limit]. *Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat*, 1949, vol. 13, no. 3, pp. 253–280.

5. Rybakov M.A. Resheniye sistem lineynykh differentsial'nykh uravneniy s postoyannymi koeffitsiyentami s pomoshch'yu preobrazovaniya Laplasa [Solving systems of linear differential equations with constant coefficients using the Laplace transform]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: yestestvennyye i tekhnicheskiye nauki*, 2009, vol. 14, no. 4, pp. 791–792.

6. Budargin O.M., Misrikhanov M.SH., Ryabchenko V.N. Novyye effektivnyye kriterii upravlyayemosti i nablyudayemosti dlya sistem bol'shoy razmernosti [New effective criteria for controllability and observability for high-dimensional systems]. *Control Sciences*, 2012, no. 1, pp. 21–25.

7. Gantmakher F. R. Teoriya matrits [The theory of matrices]. Moscow, Fizmatgiz, 2010, 560 p.

8. Panteleev A. V., Yakimova A. S., Rybakov K. A. Obyknovennye differentsialnye uravneniya. Praktikum [Ordinary Differential Equations. Practical Work]. Moscow, INFRA-M, 2016, 432 p.

9. Pontryagin L. S. Obyknovennyye differentsial'nyye uravneniya [Ordinary Differential Equations]. Moscow, Fizmatgiz, 1965, 332 p.

10. Filippov A. F. Sbornik zadach po differentsial'nym uravneniyam [Collection of problems on differential equations]. Moscow, Fizmatgiz, 1961, 100 p.

11. Mukhamedzhanova U. M. Jordanova forma matritsy i resheniya lineynykh sistem obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy s postoyannymi koeffitsiyentami [Jordan Matrix Form and Solutions of Linear Systems of Ordinary Differential Equations with Constant Coefficients]. *Scientists notes of Khujand State University Academician B. Gafurov Series: Natural and economic sciences*, 2017, no. 1, pp. 20–26.

12. Baloyev A.A. Matrichno-algebraicheskaia forma resheniia sistemy lineinykh obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii s postoiannymi koeffitsientami [The matrix-algebraic form of a solution to the system of linear ordinary differential equations with constant coefficients]. *Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki*, 2014, vol. 17, no. 3, pp. 3–12.