

Горбунов, Д. Л. Оптимальное управление рынком труда при ограничениях в виде интегрируемой в квадратурах конечномерной системы нелинейных дифференциальных уравнений / Д. Л. Горбунов // Прикладная математика и вопросы управления. – 2023. – № 2. – С. 83–92. DOI 10.15593/2499-9873/2023.2.08

Библиографическое описание согласно ГОСТ Р 7.0.100–2018

Горбунов, Д. Л. Оптимальное управление рынком труда при ограничениях в виде интегрируемой в квадратурах конечномерной системы нелинейных дифференциальных уравнений / Д. Л. Горбунов. – Текст : непосредственный. – DOI 10.15593/2499-9873/2023.2.08 // Прикладная математика и вопросы управления / Applied Mathematics and Control Sciences. – 2023. – № 2. – С. 83–92.



ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
И ВОПРОСЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 2, 2023

<https://ered.pstu.ru/index.php/amcs>



Научная статья

DOI: 10.15593/2499-9873/2023.2.08

УДК 517.92



Оптимальное управление рынком труда при ограничениях в виде интегрируемой в квадратурах конечномерной системы нелинейных дифференциальных уравнений

Д.Л. Горбунов

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 01 июня 2023
Одобрена: 22 июня 2023
Принята к публикации:
22 июня 2023

Финансирование

Исследование не имело спонсорской поддержки.

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Вклад автора

100 %.

Ключевые слова:

система нелинейных дифференциальных уравнений, интегрируемость в квадратурах, модель рынка труда, задача оптимального управления, соотношение «цена – качество», эффективность управления, динамика кадров, прогнозирование рынка труда, коэффициент селекции, коэффициент качества.

АННОТАЦИЯ

Выделяется класс конечномерных систем нелинейных дифференциальных уравнений, для которых существует способ представить точное аналитическое решение в виде квадратур. Частный случай системы выделенного класса применяется в качестве набора ограничений типа равенств для задачи оптимального управления замкнутым конечномерным рынком труда с общим коэффициентом селекции – параметром управления исследуемой системой. Уточняются определения квалификационных категорий субъектов рынка труда с учетом физического смысла их поведения в исследуемой системе. Вводятся коэффициенты качества удовлетворения спроса на труд, представляющие собой усредненную разность между оплатой труда и доходом от деятельности субъектов каждой из трех квалификационных категорий. Вводится функция качества управления системой рынка труда, представляющая собой сумму произведений функций долей субъектов каждой из трех квалификационных категорий на их коэффициенты качества. Рассматриваются рынки труда с различными соотношениями коэффициентов качества. Показано, что случай, когда коэффициент качества субъектов низкой квалификационной категории выше коэффициента качества субъектов высокой квалификационной категории, противоречит физическому смыслу модели. Для каждой рассматриваемой системы рынка труда построены графики функции качества от параметров управления. Приведены примеры реальных рынков труда для каждого физически допустимого соотношения коэффициентов качества. Показано, что оптимальное управление системой рынка труда не обязательно означает устремление параметра управления к его крайним значениям. Построен график функции качества управления реально существующего рынка труда с градообразующим предприятием, в качестве которого выбран рынок труда пос. Сылва Пермского края, и определены оптимальные значения параметров управления.

© ПНИПУ

© Горбунов Даниил Львович – выпускник аспирантуры кафедры вычислительной математики, механики и биомеханики, e-mail: call-of-monolit@yandex.ru, ORCID: 0000-0002-3186-3680.



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

Perm Polytech Style: Gorbunov D.L. Optimal labor market management under constraints in the form of a finite-dimensional system of nonlinear differential equations integrated by quadratures. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2023, no. 2, pp. 83–92. DOI: 10.15593/2499-9873/2023.2.08

MDPI and ACS Style: Gorbunov, D.L. Optimal labor market management under constraints in the form of a finite-dimensional system of nonlinear differential equations integrated by quadratures. *Appl. Math. Control Sci.* **2023**, 2, 83–92. <https://doi.org/10.15593/2499-9873/2023.2.08>

Chicago/Turabian Style: Gorbunov, Daniil L. 2023. “Optimal labor market management under constraints in the form of a finite-dimensional system of nonlinear differential equations integrated by quadratures”. *Appl. Math. Control Sci.* no. 2: 83–92. <https://doi.org/10.15593/2499-9873/2023.2.08>



APPLIED MATHEMATICS
AND CONTROL SCIENCES
№ 2, 2023
<https://ered.pstu.ru/index.php/amcs>



Article

DOI: 10.15593/2499-9873/2023.2.08

UDK 517.92



Optimal labor market management under constraints in the form of a finite-dimensional system of nonlinear differential equations integrated by quadratures

D.L. Gorbunov

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 01 June 2023
Approved: 22 June 2023
Accepted for publication:
22 June 2023

Funding

This research received no external funding.

Conflicts of Interest

The author declares no conflict of interest.

Author Contributions

100 %.

Keywords:

systems of nonlinear differential equations, integrability by quadratures, labor market model, optimal management problem, price – quality ratio, management efficiency, staff dynamics, forecasting the labor market, selection coefficient, quality coefficient.

ABSTRACT

The paper separates a class of finite-dimensional systems of nonlinear differential equations, the exact analytical solution of which can be represented in the form of quadratures. The paper uses a particular case of the system of the separated class as a set of equality constraints for the problem of optimal management of a closed finite-dimensional labor market with a common selection coefficient – the management parameter for the system under study. The paper specifies the definitions of the qualification categories for labor market subjects, with allowance for the physical meaning of their behavior in the system under study. It introduces quality factors for meeting the demand for labor, which are the averaged difference between the remuneration of labor and proceeds of the activities of subjects at each of the three qualification categories. It introduces a quality function in respect of the management of the labor market system, which is a sum of the products of the functions of the shares owned by the subjects at each of the three qualification categories by their quality coefficients. It considers labor markets with different ratios of quality factors. The case where the quality factor of subjects of a low qualification category is higher than that of a high qualification category has been shown to contradict the physical meaning of the model. Quality function vs management parameter curves are plotted for each labor market system under study. The paper gives examples of real-life labor markets for every physically admissible ratio of quality factors. The optimal management of the labor market system is shown to not necessarily imply that the management parameter tends to its extreme values. The paper plots a management quality function for a real-life labor market with a city-forming enterprise exemplified by the labor market of the village of Sylva, the Perm Territory, and determines the optimal values of management parameters.

© PNRPU

© Daniil L. Gorbunov – Graduate of Postgraduate Studies, Department of Computational Mathematics and Mechanics, e-mail: call-of-monolit@yandex.ru, ORCID: 0000-0002-3186-3680.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

Введение

Конъюнктура рынка труда – один из важнейших критериев функционирования экономической системы. Продукты, поступающие на рынок и выступающие в качестве товаров, создаются исключительно трудом. Участником этого процесса является трудоустроенное население, которому, в свою очередь, можно противопоставить безработных, поэтому вопросы управления рынком труда никогда не теряют своей актуальности [1].

Для предложенной в статье [2] конечномерной стохастической математической модели рынка труда в работе [3] сформулирована задача оптимального управления на основе принципа максимума Понтрягина [4], а в [5] для модели из статьи [2] предложена математическая модель оптимального управления рынком труда в виде квадратичного функционала интегрального типа. Здесь предлагается задача оптимального управления рынком труда для конечномерной детерминированной модели [6].

В общем виде задача оптимального управления формулируется следующим образом [1]. Пусть: управление $u(\cdot) \in C[0; T]$; вектор-функция состояния $x(\cdot) \in [0; T]$; функционал качества $I(u(\cdot), x(\cdot))$; ограничения типа равенств $F(u(\cdot), x(\cdot), \dot{x}(\cdot)) = 0$ представляют собой заданную систему нелинейных дифференциальных уравнений.

Требуется найти такие $\hat{u}(\cdot), \hat{x}(\cdot)$, сообщающие экстремум функционалу качества

$$I(u(\cdot), x(\cdot)) \rightarrow \max,$$

при ограничениях типа равенств:

$$F(u(\cdot), x(\cdot), \dot{x}(\cdot)) = 0, \quad x(0) = x^*, \quad x(T) = x^{**} \quad (1)$$

и неравенств:

$$|u(t)| \leq u^*, \quad t \in [0; T].$$

Для общего случая условие существования экстремали и условие экстремума в задаче (1) сформулированы в виде теоремы Понтрягина в [7].

1. Модель замкнутой системы рынка труда

Рассмотрим более подробно ограничения типа равенств (1). В качестве них может служить система нелинейных дифференциальных уравнений, представленная в [6] в виде детерминированной модели. Функциями состояний здесь выступают доли специалистов различной категории, имеющиеся на рынке труда, а управлениями – коэффициенты селекции. Тогда ограничения в понтрягинской форме для задачи оптимального управления рынком труда могут быть представлены в виде (2): здесь A – общее число специалистов высокой категории на рынке труда, B – общее число специалистов средней категории на рынке труда, G – общее число специалистов низкой категории на рынке труда, M – общее число рабочих мест, занятых на предприятии, N – общее число безработных на рынке труда, q – количество подразделений предприятия; k_i – коэффициенты селекции [8]. При этом $\alpha_i(t)$ – доля специалистов высокой категории i -го подразделения среди всех трудоустроенных субъектов рынка труда; $\beta_i(t)$ – доля специалистов средней категории i -го подразделения среди всех трудоустроенных субъектов рынка труда; $\gamma_i(t)$ – доля специалистов низкой категории i -го подразделения среди всех трудоустроенных субъектов рынка труда.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \dot{\alpha}_1(t) = \frac{A - M \sum_{i=1}^n \alpha_i(t)}{N} (\gamma_1(t) + k_1 \beta_1(t)), \\
 \dots \\
 \dot{\alpha}_n(t) = \frac{A - M \sum_{i=1}^n \alpha_i(t)}{N} (\gamma_n(t) + k_n \beta_n(t)); \\
 \dot{\beta}_1(t) = \frac{B - M \sum_{i=1}^n \beta_i(t)}{N} (\gamma_1(t) + k_1 \beta_1(t)) - k_1 \beta_1(t), \\
 \dots \\
 \dot{\beta}_n(t) = \frac{B - M \sum_{i=1}^n \beta_i(t)}{N} (\gamma_n(t) + k_n \beta_n(t)) - k_n \beta_n(t); \\
 \dot{\gamma}_1(t) = \frac{G - M \sum_{i=1}^n \gamma_i(t)}{N} (\gamma_1(t) + k_1 \beta_1(t)) - \gamma_1(t), \\
 \dots \\
 \dot{\gamma}_n(t) = \frac{G - M \sum_{i=1}^n \gamma_i(t)}{N} (\gamma_n(t) + k_n \beta_n(t)) - \gamma_n(t).
 \end{array} \right. \quad (2)$$

Отметим, что $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $\gamma_i(t)$ – неизвестные функции, тогда как A , B , G , M , N , n , k_i – целые положительные константы. По определению $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $\gamma_i(t)$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i(t) + \sum_{i=1}^n \beta_i(t) + \sum_{i=1}^n \gamma_i(t) \equiv 1. \quad (3)$$

Отметим, что функции состояния и коэффициенты селекции по определению [8] могут принимать значения только из заданного отрезка:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \alpha_i(t) \in [0; 1] \\
 \beta_i(t) \in [0; 1] \\
 \gamma_i(t) \in [0; 1] \\
 k_i \in (0; 1]
 \end{array} \right. \quad (4)$$

Нахождение аналитического решения системы (2) подробно описано в [6], а прикладному применению модели (2) посвящены работы [8; 9]. Согласно полученным в [8; 9] результатам показано, что константы k_i определяют состояние конъюнктуры рынка труда в каждый момент времени. Поэтому их можно выбрать в качестве параметров управления в задаче (1).

В [6] даны первоначальные определения уровням квалификации субъектов рынка труда. Учитывая (2), скорректируем их следующим образом:

- субъекты высокой категории (α) – работники, которые не увольняются ни в какой момент времени;
- субъекты низкой категории (γ) – работники, которые увольняются в каждый момент времени;
- субъекты средней категории (β) – работники, из которых в каждый момент времени увольняется доля, равная коэффициенту селекции k .

Теперь можно сформулировать классическую задачу оптимального управления рынком труда с n источниками спроса для частного случая $k_1 = \dots = k_n = \hat{k}$.

2. Оптимальное управление рынком труда с общим коэффициентом селекции

Пусть r_α – усредненный коэффициент полезности каждого отдельно взятого субъекта высокой категории, r_β – усредненный коэффициент полезности каждого отдельно взятого субъекта средней категории, r_γ – усредненный коэффициент полезности каждого отдельно взятого субъекта низкой категории. Коэффициент полезности каждого субъекта представляется в виде нормированной разности между издержками на оплату труда и доходом от труда субъекта – КПД, качество удовлетворения спроса на труд (далее – коэффициент качества). Тогда в случае $k_1 = k_2 = \dots = \hat{k}$ управление $u(\cdot) \equiv \hat{k}$, где $\hat{k} \in (0; 1]$; функции состояния системы $x(\cdot) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t), \beta_1(t), \dots, \beta_n(t), \gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$. Функционал эффективности управления динамикой кадров на рынке труда можно представить в виде:

$$I(u, x) = \int_0^T (r_\alpha \sigma_\alpha + r_\beta \sigma_\beta + r_\gamma \sigma_\gamma) dt,$$

где

$$\sigma_\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i(\hat{k}, t), \quad \sigma_\beta = \sum_{i=1}^n \beta_i(\hat{k}, t), \quad \sigma_\gamma = \sum_{i=1}^n \gamma_i(\hat{k}, t).$$

Таким образом, функционал $I(u, x)$ представляет собой соотношение «цена – качество» для всех трудоустроенных кадров на рынке труда. Поскольку в качестве параметра управления выбран коэффициент селекции \hat{k} , задача максимизации эффективности управления динамикой кадров сводится к максимизации значения подынтегрального выражения на границе T . Тогда задачу оптимального управления рынком труда в частном случае можно сформулировать в следующем виде:

Найти \hat{k}^* такое, что $I(u, x) = r_\alpha \sigma_\alpha(\hat{k}^*, T) + r_\beta \sigma_\beta(\hat{k}^*, T) + r_\gamma \sigma_\gamma(\hat{k}^*, T) \rightarrow \max$ при ограничениях типа равенств (2) и (3) и неравенств (4).

Учитывая, что функции состояния системы рынка труда с общим коэффициентом селекции находятся аналитически [4], задача оптимального управления динамикой кадров на рынке труда может быть решена путем нахождения \hat{k}^* , при котором $I(\hat{k}^*)$ принимает максимальное значение в момент времени $t = T$.

3. Решение задачи оптимального управления для различных рынков труда

С помощью пакета программ Wolfram Mathematica на основе найденных в [6] аналитических решений (2) были построены графики функции $I(\hat{k})$ на $\hat{k} \in (0; 1]$ для различных зна-

чений констант $r_\alpha, r_\beta, r_\gamma$. Например, очевидно, что при $r_\alpha = r_\beta = r_\gamma = r$ функция в силу (2) примет вид $I(\hat{k}) = r$.

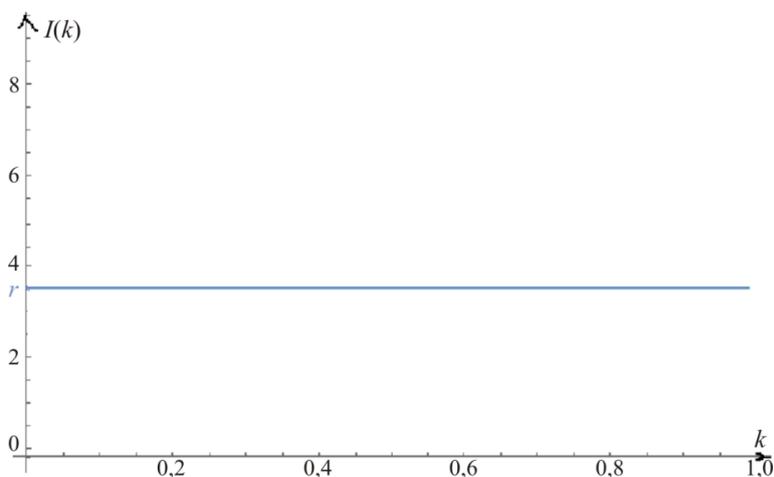


Рис. 1. График функции соотношения «цена – качество» для всех трудоустроенных кадров на рынке труда для случая равенства коэффициентов полезности

Этот тривиальный, на первый взгляд, случай описывает рынок труда, на котором качество удовлетворения спроса на труд не зависит от квалификации трудоустроенного субъекта. Таковым можно считать, например, рынок труда курьеров по доставке еды, расклейщиков объявлений или операторов call-центров. График на рис. 1 подтверждает успешное прохождение проверки модели на адекватность.

На рис. 2 представлен один из случаев $r_\alpha > r_\beta > r_\gamma$, т.е. качество удовлетворения спроса на труд положительно коррелирует с уровнем квалификации работника. Стандартная ситуация, если обратиться к первоначальным определениям квалификации субъекта рынка труда [9].

$I(\hat{k})$ непрерывно возрастает на $\hat{k} \in (0; 1]$, что можно трактовать как рекомендацию по возможности увеличивать коэффициент селекции до 1. Оптимальное управление в данном случае подразумевает увольнение всех субъектов средней категории, что может оказать неблагоприятное влияние на мотивированность потенциально полезных кадров [9].

Аналогичное явление наблюдается, когда корреляция между квалификацией субъекта рынка труда и качеством удовлетворения спроса на труд отсутствует: Для $r_\alpha > r_\gamma > r_\beta$ график $I(\hat{k})$ на $\hat{k} \in (0; 1]$ не отличим от графика на рис. 2. Оптимальное управление опять же подразумевает увольнение всех субъектов средней категории, так как они обходятся компании дороже, чем субъекты высокой и низкой категорий. Такие случаи можно применить к описанию рынков труда, на которых продвижение по карьерной лестнице связано с определенными трудностями, поскольку затраты на повышение квалификации трудоустроенных кадров не окупаются. Это касается, в первую очередь, таких источников спроса на труд, которые готовы взять на работу студентов без опыта для накопления трудового стажа по специальности. Например, начинающие ИТ-компании с высокой текучестью кадров.

Если применить такому рынку труда гипотезу С из [7; 8], согласно которой субъектами низкого уровня квалификации считаются вакантные должности, то на всех источниках спроса $r_\gamma = 0$ по определению. Случай $r_\gamma > r_\alpha$ либо невозможен, либо означает, что оптимальным решением для такого источника спроса на труд будет прекращение деятельности. Что касается случая $r_\alpha > r_\gamma > r_\beta$, где $r_\gamma = 0$, налицо следующая ситуация. Допустим, некая фирма берет на

работу соискателей без опыта с испытательным сроком T . Условие успешного прохождения испытательного срока таково, что в момент T суммарный доход фирмы от деятельности работника превышает суммарные расходы на оплату его труда. Предлагаемая модель позволяет определить, при каком \hat{k} для заданных начальных условий фирма будет иметь максимальный размер чистой прибыли в момент T , заведомо зная, что $r_\beta < 0$. Если данная фирма является градообразующим предприятием, то модель применима ко всему рынку труда на макроуровне.

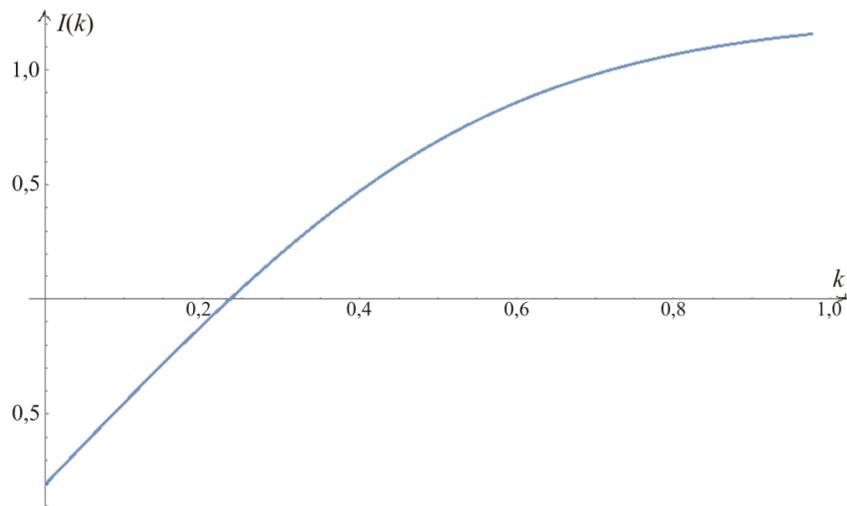


Рис. 2. График функции соотношения «цена – качество» для всех трудоустроенных кадров на рынке труда для $r_\alpha > r_\beta > r_\gamma$

Как уже было сказано выше, гипотеза С из [7; 8] неприменима к рынку труда, где $r_\gamma > r_\alpha > r_\beta$ или $r_\gamma > r_\beta > r_\alpha$. Ситуация, когда наилучшее качество удовлетворения спроса на труд демонстрируют работники низкой квалификационной категории, вообще говоря, противоречит первоначальным определениям квалификационных категорий [9]. Такое явление может наблюдаться только в так называемых «фирмах-однодневках», но такие источники спроса на труд не могут оказывать особенного влияния на всю систему рынка труда и тем более не бывают градообразующими предприятиями, поэтому в рамках текущего исследования рассматривать ситуации $r_\gamma > r_\alpha$ мы не будем.

Осталось прокомментировать рынок труда, где $r_\beta > r_\alpha > r_\gamma$, т.е. наилучшее качество удовлетворения спроса на труд демонстрируют субъекты средней квалификационной категории. Такая ситуация возникнет, если к рынку труда предприятий, где качество удовлетворения спроса на труд не коррелирует с уровнем квалификации работников, применить гипотезу С из [7; 8]. Получится, что $r_\beta > r_\alpha > r_\gamma$, где $r_\gamma = 0$. График $I(\hat{k})$ для такого случая представлен на рис. 3.

Это легко объясняется тем, что субъекты средней квалификационной категории, долю увольнения которых и показывает \hat{k} , во всех этих случаях обходятся предприятию дешевле всего. В качестве примера можно привести опять же фирмы с высокой текучестью кадров, предлагающие, например, мотивацию на долгосрочное сотрудничество в виде доплаты за стаж. Такое явление иногда наблюдается в вышеупомянутых источниках спроса на труд курьеров по доставке еды или операторов call-центров, но ситуация $r_\beta > r_\alpha > r_\gamma$, где $r_\gamma = 0$, может описывать также рынок труда профессиональных спортсменов, которые заключают контракты с клубами на фиксированную сумму, с размером которой далеко не всегда коррелирует качество удовлетворения спроса на их спортивные навыки.

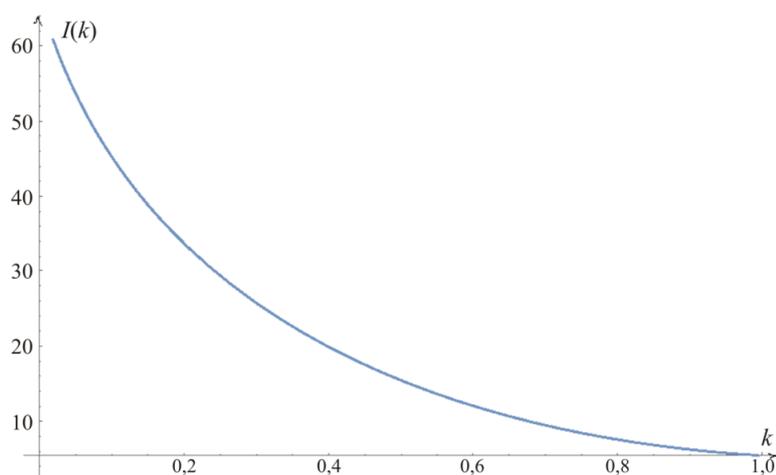


Рис. 3. График функции соотношения цена-качество для всех трудоустроенных кадров на рынке труда для $r_\beta > r_\alpha > r_\gamma$

Однако неверно было бы полагать, что оптимальное управление рынком труда во всех случаях подразумевает устремление \hat{k} к его крайним значениям. Рассмотрим пример реально существующей системы рынка труда, для которой на $\hat{k} \in (0;1]$ существует оптимальное управление такое, что $\frac{\partial I}{\partial \hat{k}} = 0$.

4. Оптимальное управление рынком труда пос. Сылва Пермского края

На градообразующем предприятии АО «Пермская птицефабрика» положим $r_\alpha > r_\beta > r_\gamma$ и обратим внимание на график $I(\hat{k})$ при заданных начальных условиях таких, что значения констант функций состояния системы $x(\cdot)$ характеризуют рынок труда поселка Сылва Пермского края на 2022 г. [7]. Пусть $r_\gamma = 0$, тогда уравнение $\frac{\partial I}{\partial \hat{k}} = 0$ имеет единственное решение на отрезке $\hat{k} \in (0;1]$, и $\exists \hat{k}^* \in (0;1] : \forall \hat{k} \in (0;1] / \{\hat{k}^*\} I(\hat{k}^*) > I(\hat{k})$ в момент времени $t = T$, показанное на рис. 4.

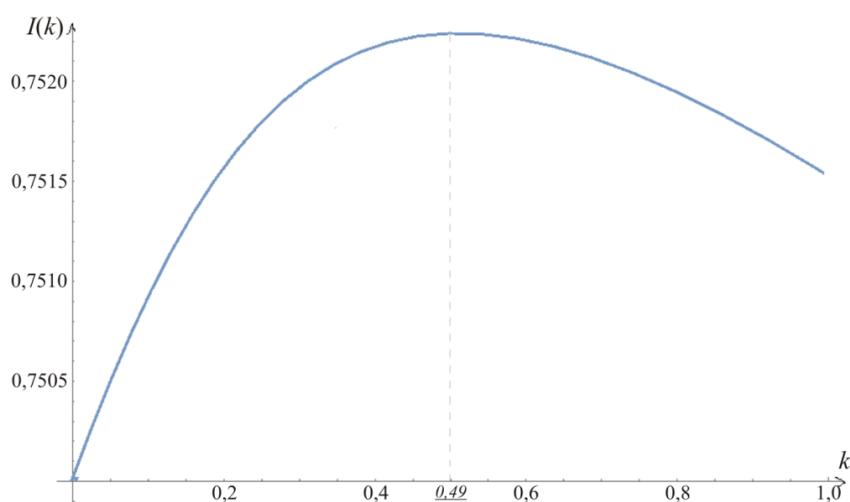


Рис. 4. График функции соотношения «цена – качество» для всех трудоустроенных кадров на рынке труда пос. Сылва Пермского края при заданных значениях $r_\alpha, r_\beta, r_\gamma$

По состоянию на 2022 г. на градообразующем предприятии рынка труда пос. Сылва Пермского края коэффициент селекции, согласно выбранному выше способу присвоения

квалификационных категорий, был равен 0,36. Если принять гипотезу о том, что коэффициент селекции градообразующего предприятия задает коэффициент селекции рынка труда всего поселка, то оптимальное управление рынком труда пос. Сытва Пермского края предполагает увеличение коэффициента селекции на градообразующем предприятии до значения 0,49. Например, за счет ужесточения требований к соискателям вакантных должностей или проведения внутренних тестов на профпригодность.

Заключение

Для предложенной в статье [6] модели замкнутого рынка труда уточнены определения квалификационных категорий, введены коэффициенты качества и функция управления системой. Сформулирована и решена задача оптимального управления для любого рынка труда с физически допустимым соотношением коэффициентов качества, также приведены примеры рынков труда для каждого случая. На примере реально существующей системы рынка труда пос. Сытва Пермского края показано, что оптимальное управление рынком труда не всегда означает устремление параметра управления – коэффициента селекции – к его крайним значениям [10–13].

Впервые введенные в данном исследовании коэффициенты качества позволяют учесть в модели оплату труда субъектов. В дальнейшем возможно рассмотреть коэффициенты качества как функции от времени, так как усредненная оплата труда по субъектам всех трех уровней квалификации на длительных временных отрезках может меняться.

Библиографический список

1. Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. – М.: МПСИ, 2005. – 584 с.
2. Семенчин Е.А., Зайцева И.В. Математическая модель самоорганизации рынка труда для нескольких отраслей экономики // Экономика и математические методы. – 2007. – Т.43, № 1. – С. 133–136.
3. Кисляков, С.В. Применение методов теории оптимального управления в регулировании количества рабочих мест на рынке труда // Экономика. Право. Печать. Вестник КСЭИ. – 2012. – № 3-4 (55-56). – С. 174–176.
4. Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Оптимизация: теория, примеры, задачи. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 320 с.
5. Кисляков С.В. Многомерная математическая модель оптимального управления рынком труда // Научные труды КубГТУ. – 2018. – № 1. – С. 199–205.
6. Горбунов Д.Л., Федосеев С.А. Модель управления конъюнктурой рынка труда предприятия в виде интегрируемой в квадратурах системы нелинейных дифференциальных уравнений // Прикладная математика и вопросы управления. – 2019. – № 4. – С. 90–101. DOI 10.15593/2499-9873/2019.4.06
7. Федосеев С.А., Горбунов Д.Л. Модель прогнозирования муниципального рынка труда // Вестник ЮУрГУ. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2022. – Т. 22, № 3. – С. 163–171. DOI 10.14529/ctcr220315
8. Gorbunov D., Fedoseev S., Eltsova M. System-Dynamic Model for Forecasting Municipal Labour Market Development // 2022 4th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA): proceeding, 8-11 November 2023, Liptsk, Russia. – IEEE, 2022. – P. 296–300. DOI 10.1109/SUMMA57301.2022.9974101
9. Gorbunov D.L. Modeling of a closed mono-branch labor market conditions // Вестник Пермского университета. Сер. «Экономика» = Perm University Herald. Economy. – 2018. – Т. 13, № 3. – С. 357–371. DOI 10.17072/1994-9960-2018-3-357-371

10. Nelder J.A., Mead R. A simplex method for function minimization // *Computer journal*. – 1965. – Vol. 7. – P. 308–313.
11. Карпов Ю.Г. Имитационное моделирование систем. Введение в моделирование с AnyLogic 5. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 400 с.
12. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 384 с.
13. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, Физматлит. – 1998. – 232 с.

References

1. Novikov D.A. Teoriia upravleniia organizatsionnymi sistemami [Organizational behavior control theory]. Moscow, MPSI, 2005, 584 p.
2. Semenchin E.A., Zaitseva I.V. Matematicheskaiia model' samoorganizatsii rynka truda dlia neskol'kikh otraslei ekonomiki [Mathematical model of self-organization of the labor market for several industries]. *Ekonomika i matematicheskie metody*. 2007, vol.43, no. 1, pp. 133–136.
3. Kislyakov S.V. *Primenenie metodov teorii optimal'nogo upravleniia v regulirovanii kolichestva rabochikh mest na rynke truda* [Application of the optimal control theory methods to adjust labor's market]. *Ekonomika. Pravo. Pechat'. Vestnik KSEI*, 2012, no. 3-4 (55-56), pp. 174–176.
4. Galeev E.M., Tihomirov V.M. Optimizatsiia: teoriia, primery, zadachi [Optimization: theory, examples, tasks]. Moscow, Editorial URSS, 2000, 320 p.
5. Kislyakov S.V. Mnogomernaia matematicheskaiia model' optimal'nogo upravleniia rynkom truda [Multidimensional mathematical model of optimal control labour market]. *Nauchnye trudy KubGTU*, 2018, no. 1, pp. 199–205.
6. Gorbunov D.L., Fedoseev S.A. Model' upravleniia kon"iunkturoi rynka truda predpriatiia v vide integriruemoi v kvadraturakh sistemy nelineinykh differentsial'nykh uravnenii [The model of control labor market conditions company as a integrability in quadratures system of nonlinear differential equations]. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2019, no. 4. pp. 90–101. DOI 10.15593/2499-9873/2019.4.06
7. Fedoseev S.A., Gorbunov D.L. Model' prognozirovaniia munitsipal'nogo rynka truda [Forecasting model municipal labor market]. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*, 2022, no. 22(3), pp. 163–171. DOI 10.14529/ctcr2203158.
8. Gorbunov D., Fedoseev S., Eltsova M. System-Dynamic Model for Forecasting Municipal Labour Market Development. *Proceeding of the 2022 4th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA)*. 2022. pp. 296–300. DOI 10.1109/SUMMA57301.2022.9974101
9. Gorbunov D.L. Modeling of a closed mono-branch labor market conditions. *Perm University Herald. Economy*, 2018, vol 13. no. 3. pp. 357–371. DOI 10.17072/1994-9960-2018-3-357-371
10. Nelder J.A., Mead R.A simplex method for function mini-mization. *Computer journal*, 1965, vol. 7, pp. 308–313.
11. Карпов Ю.Г. Имитационное моделирование систем. Введение в моделирование с [Simulation modeling of systems. Introduction to Modeling with AnyLogic 5]. Санкт-Петербург, БХВ-Петербург, 2006, 400 p.
12. Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. Optimal'noe upravlenie [Optimal control]. Moscow, FIZMATLIT, 2005, 384 p.
13. Tikhonov A.N., Vasil'eva A.B., Svешnikov A.G. Differentsial'nye uravneniia [Differential equations]. Moscow, Nauka, Fizmatlit, 1998, 232 p.