Корнеенко, В. П. Многокритериальное ранжирование и выбор в ранговых градациях объектов, измеренных в разнотипных шкалах / В. П. Корнеенко // Прикладная математика и вопросы управления. – 2023. – № 4. – С. 55–69. DOI 10.15593/2499-9873/2023.4.03

Библиографическое описание согласно ГОСТ Р 7.0.100–2018
Корнеенко, В. П. Многокритериальное ранжирование и выбор в ранговых градациях объектов, измеренных в разнотипных шкалах / В. П. Корнеенко. – Текст : непосредственный. – DOI 10.15593/2499-9873/2023.4.03 // Прикладная математика и вопросы управления / Applied Mathematics and Control Sciences. – 2023. – № 4. – С. 55–69.

пермский политех

**ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
И ВОПРОСЫ УПРАВЛЕНИЯ
№ 4, 2023**
https://ered.pstu.ru/index.php/amcs

Научная статья
DOI: 10.15593/2499-9873/2023.4.03
УДК 519.816

Многокритериальное ранжирование и выбор в ранговых градациях объектов, измеренных в разнотипных шкалах

В.П. Корнеенко

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, Москва, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 27 ноября 2023
Одобрена: 12 декабря 2023
Принята к публикации: 15 декабря 2023

Финансирование
Исследование не имело спонсорской поддержки.
Конфликт интересов
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.
Вклад автора
100 %.

Ключевые слова:
многокритериальное ранжирование, исходные шкалы, результирующая каноническая шкала, сумма рангов, адекватность преобразований, многокритериальный выбор.

АННОТАЦИЯ

Для решений многокритериальных прикладных задач, связанных с построением рейтингов организаций, выбором эффективных объектов (альтернатив, вариантов решений), исходные данные которых представлены в разнотипных (количественных, порядковых) шкалах измерения, применение обобщенного критерия в виде аддитивной свертки частных критериев некорректно.

В связи с этим распространение получили методы сужения исходного множества объектов, а также методы построения результирующего ранжирования (медианы Кемена – Снелла). Однако, если исходные оценки объектов преобразовать в результирующую однородную шкалу, т.е. шкалу с одинаковым размахом критериев, то применение аддитивного механизма агрегирования в этом случае будет корректно.

В качестве такой результирующей шкалы может служить порядковая ранговая шкала. В работе обосновывается метод, при котором результаты преобразования количественных (балльных) оценок объектов в градации ранговой шкалы при решении многокритериальных задач будут инвариантны при любых количественных преобразованиях исходных шкал.

Доказывается сохранение упорядочений объектов по обобщенным оценкам в виде суммы рангов по равноважным критериям. При этом также сохраняются упорядочения объектов, базирующиеся на отношениях с k-м порядком строгого предпочтения. Приводятся иллюстративные примеры.

© **Корнеенко Виктор Павлович** – кандидат технических наук, доцент по кафедре специальных дисциплин, старший научный сотрудник лаборатории систем поддержки принятия решений, e-mail: vkorn@ipu.ru, ORCID 0000-0002-3643-1609

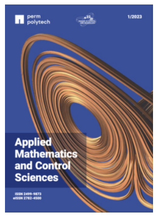
Perm Polytech Style: Korneenko, V.P. Multicriteria ranking and selection in rank gradations of objects measured in different types of scales. *Applied Mathematics and Control Sciences.* 2023, no. 4, pp. 55–69. DOI: 10.15593/2499-9873/2023.4.03

MDPI and ACS Style: Korneenko, V.P. Multicriteria ranking and selection in rank gradations of objects measured in different types of scales. *Appl. Math. Control Sci.* **2023**, 4, 55–69. https://doi.org/10.15593/2499-9873/2023.4.03

Chicago/Turabian Style: Korneenko, Victor P. 2023. "Multicriteria ranking and selection in rank gradations of objects measured in different types of scales". *Appl. Math. Control Sci.* no. 4: 55–69. https://doi.org/10.15593/2499-9873/2023.4.03

perm polytech

APPLIED MATHEMATICS AND CONTROL SCIENCES
№ 4, 2023
https://ered.pstu.ru/index.php/amcs



Article
DOI: 10.15593/2499-9873/2023.4.03
UDK 519.816

Multi-criteria ranking and selection in rank gradations of objects measured in different types of scales

V.P. Korneenko

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 27 November 2023
Approved: 12 December 2023
Accepted for publication: 15 December 2023

Funding
This research received no external funding.
Conflicts of Interest
The author declare no conflict of interest.
Author Contributions
100 %.

Keywords:
multicriteria ranking, initial scales, resulting canonical scale, sum of ranks, adequacy of transformations, multicriteria choice.

ABSTRACT

To solve multi-criteria applied problems related to the construction of ratings of organizations, the choice of effective objects (alternatives, solutions), the initial data of which are presented in different types (quantitative, ordinal) measurement scales, the use of a generalized criterion in the form of an additive convolution of particular criteria is incorrect.

In this regard, methods for narrowing the initial set of objects, as well as methods for constructing the resulting ranking (Kemeny-Snell medians), have become widespread. However, if the initial estimates of objects are transformed into the resulting homogeneous scale i.e., if there is a scale with the same scope of criteria, then the use of an additive aggregation mechanism in this case will be correct.

An ordinal rank scale can serve as such a resultant scale. The paper substantiates a method in which the results of the transformation of quantitative (point) estimates of objects in the gradation of the rank scale when solving multi-criteria problems will be invariant for any quantitative transformations of the original scales.

The preservation of the ordering of objects according to generalized estimates in the form of the sum of ranks according to equally important criteria is proved. At the same time, object orderings based on relationships with the k-th order of strict preference are also preserved. Illustrative examples are given.

© **Viktor P. Korneenko** – CSc of Technical Sciences, Senior Researcher, Laboratory of Decision Support Systems, e-mail: vkorn@ipu.ru, ORCID: 0000-0002-3643-1609.

Введение

Современная теория управления большое внимание уделяет одной из наиболее важных задач системного анализа – задаче многокритериальной оценке и выбора эффективных объектов (проектов, вариантов решений, стратегий развития и т.п.). Поскольку исходные данные, характеризующие объекты, как правило, измерены в смешанных (количественных, качественных, экспертных) шкалах [1–3], то возникает проблема решения подобного класса задач.

В настоящее время глубоко исследованы задачи выделения и сужения множества недоминируемых объектов (эффективных решений), оценки по частным критериям которых, как правило, представлены в разнотипных шкалах [4–7]. На практике для решения задач группового выбора получили распространение в основном методы, базирующиеся на построении медианы ранжирований [1; 2; 8; 9], которая в дальнейшем получила названии медианы Кемена – Снелла. В работе [8] комбинаторная задача выбора медианы ранжирования сводится к поиску перестановки объектов ранжирования, минимизирующая сумму расстояний до исходных ранжирований, представленных матрицами бинарных отношений. В связи с тем, что для комбинаторной задачи не существует оптимальных методов решения, были предложены различные эвристические методы экспертного оценивания и рассуждений на основе прецедентов [10–15]. В [15] подробно представлены механизмы индивидуального и группового выбора, базирующиеся на различных принципах согласования на множестве объектов. В работе [16] предлагается ранжирование факторов по их информативности на основе математических методов распознавания образов.

Другой подход для решения многокритериальных задач ранжирования и выбора эффективных объектов, исходные шкалы которых разнотипны, основан на построении результирующих порядковых шкал. При этом в литературе часто обсуждается вопрос о корректности использования количественных преобразований, например, среднего ранга или среднего арифметического при индивидуальном или групповом экспертном оценивании объектов в порядковых шкалах [15; 17]. Общепринятой считается точка зрения, что при переходе к эквивалентным порядковым шкалам с помощью монотонно возрастающих преобразований результаты оценивания будут различными [2, с. 29].

Покажем, что при определенных условиях результаты оценивания будут инвариантны при количественных преобразованиях оценок в исходных шкалах в ранги результирующей канонической шкалы. Формализуем это утверждение, когда отношения на множестве объектов представлены в виде ранжирований или в виде оценок в количественных или порядковых балльных шкалах.

Ранжирование объектов в исходной шкале измерения

Обозначим через $A=\{a_1,\ldots,a_l\ldots,a_n\}$ – множество оцениваемых объектов, n – число объектов, $F=\{f_1,\ldots,f_i\ldots,f_m\}$ – множество критериев, по которым сравниваются объекты из множества A, m – число критериев.

Тогда результаты оценивания объектов можно представить в виде матрицы $M=x_i^{(l)}$, $i=\overline{1,m}$; $l=\overline{1,n}$ размерности $m\times n$, где $x_i^{(l)}=f_i(a_l)$ – результат оценивания экспертом объекта a_l по f_i критерию в произвольной порядковой балльной или количественной шкале измерения.

При строгом отношении порядка (предпочтений), удовлетворяющего свойству антирефлексивности и транзитивности, на множестве объектов ранжирование объектов представимо в виде

$$P: a_1 \succ a_2 \succ \ldots \succ a_n, \tag{1}$$

которому при прямом направлении предпочтений объектов (чем больше значение $x_i^{(l)}$ оценки, тем предпочтительнее объект) будет соответствовать убывающая последовательность чисел (баллов):

$$x_i^{(1)} > x_i^{(2)} > \ldots > x_i^{(n)}, \tag{2}$$

а при обратном (чем меньше значение $x_i^{(k)}$ оценки, тем предпочтительнее объект) ранжированию чисел $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(n)}$ будет соответствовать возрастающая последовательность чисел:

$$x_i^{(1)} < x_i^{(2)} < \ldots < x_i^{(n)}. \tag{3}$$

При нестрогом отношении предпочтений удовлетворяющее свойству рефлексивности и транзитивности ранжирование объектов можно представить в виде:

$$P: a_{l_1} \succeq \ldots \succeq a_{l_n} x_i^{(1)} \geq x_i^{(2)} \geq \ldots \geq x_i^{(n)} \left(x_i^{(1)} \leq x_i^{(2)} \leq \ldots \leq x_i^{(n)} \right), \tag{4}$$

где $a_{l_v} \succeq a_{l_q} \Rightarrow \left(a_{l_v} \succ a_{l_q} \right) \vee \left(a_{l_v} \approx a_{l_q} \right) \forall v, q \in \overline{1,n}$; $\succ$ – обозначение строгого предпочтения объектов; $\succeq$ – обозначение нестрогого предпочтения объектов; $\approx$ – обозначение эквивалентности (равнозначности) объектов; $\vee$ – логическая операция «или».

В теории измерений свойствам отношения строгого и нестрогого порядка удовлетворяет числовая система шкалы [18], элементами которой являются действительные числа, связанные между собой отношением строгих > (<) и нестрогих ≥ (≤) неравенств.

Преобразование исходных оценок в градации ранговой шкалы

Соответствие последовательностей (1) и (2) или (1) и (3), т.е. их изоморфизм или гомоморфизм, можно осуществить, выбирая любые числовые представления. В практике ранжирования чаще всего применяется числовое представление последовательностей (2) и (3) в виде натуральных чисел:

$$x_i^{(1)} = n,\ x_i^{(2)} = n-1, \ldots, x_i^{(n)} = 1 \tag{5}$$

либо

$$x_i^{(1)} = 1,\ x_i^{(2)} = 2, \ldots, x_i^{(n)} = n, \tag{6}$$

т.е. используются числовые последовательности типа (5) и (6).

При прямом (обратном) ранжировании числа $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(n)}$, удовлетворяющие соотношениям (5) и (6), называются рангами (местами) по критерию $f_i \in F$ и обычно обозначаются в виде: $r_i^{(1)}, r_i^{(2)}, \ldots, r_i^{(n)}$. В этом случае ранжирование *n* объектов $a_l \in A$ по критерию f_i можно представить в виде векторной оценки: $\vec{r}_i = (r_i^{(1)}, r_i^{(2)}, \ldots, r_i^{(n)})$.

В практике ранжирования объектов допускаются как отношения строгого упорядочения, так и нестрогого упорядочения, т.е. эквивалентность некоторых групп объектов. Для эквивалентных объектов удобно с позиции технологии последующей обработки экспертных оценок назначать одинаковые ранги, равные среднему арифметическому значению рангов, присваиваемых одинаковым объектам. Такие ранги называют связанными рангами [19].

Удобство использования связанных рангов заключается в том, что сумма рангов n объектов для любого критерия f_i равна сумме натуральных чисел от единицы до n:

$$r_i^{(\Sigma)} = \sum_{l=1}^{n} r_i^{(l)} = \frac{1+n}{2} \cdot n.$$

При этом любые комбинации связанных рангов не изменяют эту сумму.

Определение 1. Будем называть ранговую шкалу канонической, если в качестве градаций при строгом ранжировании n объектов множества A используются натуральные числа от 1 до n. При нестрогом ранжировании со связанными рангами натуральные числа заменяются средними арифметическими рангов эквивалентных объектов.

Рассмотрим преобразования оценок $x_i^{(l)}$ в количественной шкале измерения объектов a_l по f_i критерию в ранговые градации:

а) при прямом направлении предпочтений объектов преобразование имеет вид:

$$\pi_r^{\downarrow} : x_i^{(l)} \; r_i^{(l)} = n - (l - 1), \tag{7}$$

где $r_i^{(l)} = n - (l-1)$ – ранг, сопоставляемый a_l объекту по f_i критерию;

б) при обратном направлении предпочтений объектов введем преобразование:

$$\pi_r^{\uparrow} : x_i^{(l)} \; r_i^{(l)} = l, \tag{8}$$

где $r_i^{(l)} = l$ – ранг, сопоставляемый $a_l \in A$ объекту по f_i критерию.

Определение 2. Преобразование, переводящее произвольную порядковую или количественную шкалу в каноническую, будем называть каноническим прямым (7) или обратным (8) ранговым преобразованием.

В зависимости от направления предпочтения (прямого или обратного) каноническую ранговую шкалу будем называть соответственно прямой или обратной канонической ранговой шкалой.

Постановка задачи многокритериального выбора в ранговой шкале

Рассмотрим теперь суммы рангов ранжирований, полученные объектами по всем рассматриваемым критериям с точки зрения предпочтений эксперта. Единицей измерения здесь является один ранг, характеризующий, что один объект предпочтительнее другого.

В качестве обобщенного критерия качества каждого объекта примем аддитивную свертку с весами $w_i = w(f_i), i = \overline{1,m},$ важности критериев [20]:

$$F(a_l, w_1, \ldots, w_m) = \sum_{i=1}^{m} w_i r_i^{(l)}, \; \sum_{i=1}^{m} w_i = 1, \tag{9}$$

где $r_i^{(l)} = \pi\left(f_i\left(a_l\right)\right)$ – оценка a_l объекта в результирующей порядковой шкале; $r_\Sigma^{(l)} = \sum_{i=1}^{m} w_i r_i^{(l)}$ – обобщенная оценка по критерию (9).

При равноважности f_i критериев, т.е. $w_i = 1$ для $\forall\ i = \overline{1,m}$, оценки по обобщенному критерию (9) для каждого a_l объекта будут равны сумме рангов:

$$r_\Sigma^{(l)} = \sum_{i=1}^{m} r_i^{(l)}. \tag{10}$$

Исходя из обобщенной оценки в виде суммы рангов (10), при прямом направлении предпочтений объектов получим обобщенную ранжировку объектов по множеству критериев:

$$P_\downarrow : a_1 \succ \ldots \succ a_n \Leftrightarrow r_\Sigma^{(1)} > \ldots > r_\Sigma^{(n)}, \tag{11}$$

а при обратном направлении предпочтения объектов – обобщенную ранжировку в виде:

$$P_\uparrow : a_1 \succ \ldots \succ a_n \Leftrightarrow r_\Sigma^{(1)} < \ldots < r_\Sigma^{(n)}. \tag{12}$$

Если обобщенные критерии качества некоторых объектов совпадают, то такие объекты эквивалентны:

$$a_{l_v} \approx a_{l_q} \Leftrightarrow r_\Sigma^{(l_v)} = r_\Sigma^{(l_q)}.$$

В результате имеем нестрогое ранжирование по суммам рангов (10) при прямом направлении предпочтений объектов по множеству критериев:

$$P_\downarrow : a_l \succeq \ldots \succeq a_{l_n} \Leftrightarrow r_\Sigma^{(l_1)} \geq \ldots \geq r_\Sigma^{(l_n)}, \tag{13}$$

а при обратном направлении предпочтения объектов обобщенную ранжировку в виде:

$$P_\uparrow : a_{l_1} \succeq \ldots \succeq a_{l_n} \Leftrightarrow \ r_\Sigma^{(l_1)} \ldots r_\Sigma^{(l_n)}. \tag{14}$$

Объединяя строгие (11), (12) и нестрогое (13), (14) ранжирования, получим обобщенные ранжирования при прямом, обратном направлении предпочтения объектов:

$$P_\downarrow : a_{l_1} \succ a_{l_2} \succeq \ldots \succeq a_{l_n} \Leftrightarrow r_\Sigma^{(l_1)} > r_\Sigma^{(l_2)} \geq \ldots \geq r_\Sigma^{(l_n)};$$

$$P_\uparrow : a_{l_1} \succ a_{l_2} \succeq \ldots \succeq a_{l_n} \Leftrightarrow r_\Sigma^{(l_1)} < r_\Sigma^{(l_2)} \leq \ldots \leq r_\Sigma^{(l_n)}.$$

О корректности сумм рангов в задаче ранжирования

Покажем на примере, что результаты суммирования при использовании канонических ранговых преобразований не будут зависеть от исходных количественных или порядковых балльных шкал, выбранных экспертом при измерении объектов, и их можно сравнивать между собой в любом качественном или количественном отношении.

Для примера воспользуемся данными из [21]. Исходные данные для объектов a_1, a_2 и a_3 представлены в табл. 1.

Для простоты будем предполагать, что критерии равноважны, т.е. коэффициенты их важности равны между собой. Примем, что по критериям f_1, f_2 и f_3 объекты ориентированы в прямом направлении (обозначение ↑) в том смысле, что объекты с большими значениями предпочтительнее объектов с меньшими значениями, а предпочтения объектов по критерию f_4 ориентированы в обратном направлении (обозначение ↓) в том смысле, что объекты с меньшими значениями предпочтительнее объектов с большими значениями.

Таблица 1

Оценки объектов по критериям в исходных количественных шкалах

Объект	$f_1(\uparrow)$	$f_2(\uparrow)$	$f_3(\uparrow)$	$f_4(\downarrow)$
a_1	7,5	344	0,47	12,15
a_2	3,7	268	0,68	12,20
a_3	6,7	250	0,24	12,92

Профили объектов представим в виде:

$$\vec{x}_1 = (7,5;344;0,47;12,15),\ \vec{x}_2 = (3,7;268;0,68;12,20),$$
$$\vec{x}_3 = (6,7;250;0,24;12,92).$$

При рассмотрении профилей можно заметить, что векторная оценка $\vec{x}_1$ объекта a_1 строго доминирует векторную оценку $\vec{x}_3$ объекта a_3:

$$a_1 \succ a_3 \Leftrightarrow \vec{x}_1 \succ \vec{x}_3,$$

Поскольку $x_1^{(1)} > x_1^{(3)}$, $x_2^{(1)} > x_2^{(3)}$, $x_3^{(1)} > x_3^{(3)}$ и $x_4^{(1)} < x_4^{(3)}$, а векторные оценки $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ объектов a_1 и a_2 несравнимы между собой, т.е. объекты a_1, a_2 принадлежат множеству недоминируемых (эффективных) объектов.

Для наглядного сравнения профили объектов удобно представлять в графическом виде (рис. 1).

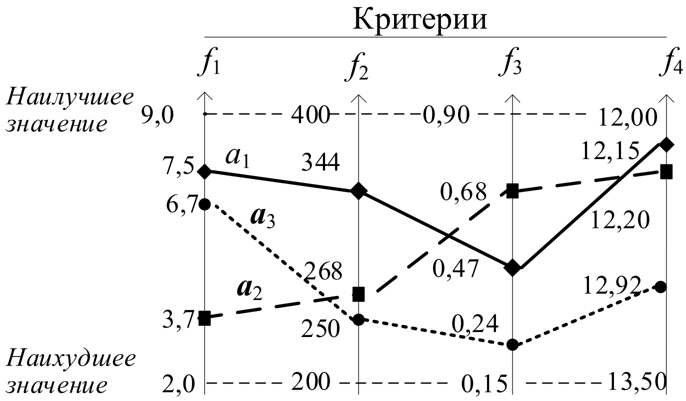


Рис. 1. Профили эффективности объектов: ориентация осей измерения для критериев f_i соответствует направлениям предпочтений: для f_1, f_2 и f_3 прямое направление в том смысле, что объекты с большими значениями предпочтительнее объектов с меньшими значениями, для f_4 – обратное в том смысле, что объекты с меньшими значениями предпочтительнее объектов с большими значениями

Покажем, что при использовании канонических ранговых шкал результаты упорядочения объектов и результаты суммирования рангов не будут зависеть от любых монотонных преобразований исходных шкал.

Результаты оценивания объектов в канонических порядковых шкалах представлены в табл. 2.

Таблица 2

Оценки объектов в канонической ранговой шкале

Объект	$f_1(\uparrow)$	$f_2(\uparrow)$	$f_3(\uparrow)$	$f_4(\downarrow)$	Сумма рангов
a_1	3	3	2	3	11
a_2	1	2	3	2	8
a_3	2	1	1	1	5

Применим произвольные монотонные преобразования к исходным оценкам в количественных шкалах (см. табл. 1). Например, для первого критерия – возведение в квадрат, для второго критерия – извлечение корня, для третьего критерия – умножение на 2, для четвертого критерия – деление на 3. Результаты представлены в табл. 3.

Таблица 3

Результаты монотонных преобразований оценок объектов в исходных шкалах

Объект	$f_1(\uparrow)$	$f_2(\uparrow)$	$f_3(\uparrow)$	$f_4(\downarrow)$
a_1	56,25	18,55	0,94	4,05
a_2	13,69	16,37	1,36	4,07
a_3	44,89	15,81	0,48	4,31

Нетрудно заметить, что переход данных табл. 3 к канонической ранговой шкале дает те же результаты, что и в табл. 2. По результатам рассмотрения можно сделать следующие выводы:

1. По сумме рангов наиболее предпочтительным является объект a_1, затем объект a_2, а наименее предпочтительным – объект a_3. При этом объект a_1 более чем в два раза предпочтительнее объекта a_3.

2. Оценки объектов в канонической порядковой шкале при использовании канонических преобразований инвариантны относительно любых монотонно возрастающих преобразований значений исходных шкал.

Теорема 1. *Любые произвольные монотонные преобразования оценок объектов в исходных количественных (качественных) шкалах не будут влиять на ранжирование объектов в результирующей канонической ранговой шкале по обобщенным оценкам по сумме рангов.*

Доказательство. Поскольку допустимыми преобразованиями в исходной количественной или порядковой (балльной, экспертной) шкале являются монотонно возрастающие преобразования, они не будут менять упорядочивание оценок объектов в исходной шкале. Поэтому применение канонических преобразований (7) или (8) не будет изменять соответствующие канонические ранжировки объектов по каждому критерию $f_i,\ i=\overline{1,m}$.

Началом отсчета в данных шкалах служат ранги, равные единице. Единицей масштаба, т.е. расстоянием между смежными рангами, также является единица. Для абсолютных типов шкал адекватными относительно исходного типа шкал будут любые отношения, как количественные, так и качественные.

Другими словами, после применения канонических ранговых преобразований в ранговых шкалах можно выполнять любые вычисления, и их результаты будут адекватными относительно исходного типа шкал. В частности, можно сравнивать объекты по числу рангов: во сколько (или на сколько) раз ранг одного объекта больше ранга другого, и т.п.

Таким образом, поскольку оценки объектов по критериям $f_i, i=\overline{1,m}$ преобразованы в ранговые однородные шкалы, т.е. с одинаковыми максимальными и минимальными значениями критериев, а также одинаковыми градациями порядковой шкалы, то применение аддитивного механизма агрегирования (10) корректно. Теорема доказана.

Утверждение о связи ранжирований объектов по сумме рангов

Рассмотрим вопрос о связи ранжирований объектов по сумме рангов с ранжированиями, базирующимися на отношениях с k-м порядком строгого предпочтения [7].

В начале рассмотрим пример ранжирования проектов радиолокационных станций по трем неоднородным критериям [22; 23]:

f_1 – дальность обнаружения цели радиолокационной станцией, км;

f_2 – вероятность обнаружения цели радиолокационной станцией;

f_3 – мощность зондирующего сигнала радиолокационной станции, мегаватт.

Исходные условные данные представлены в табл. 4.

Таблица 4

Исходные данные вариантов РЛС

Критерий	Варианты проектов радиолокационных станций в исходных шкалах									
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
f_1, км	60	120	180	210	210	300	180	150	180	210
f_2	0,95	0,95	0,94	0,95	0,95	0,91	0,95	0,94	0,93	0,92
f_3, мвт	1,70	2,00	1,00	1,60	1,50	1,90	1,60	1,30	1,80	1,00

Ранжирование проектов выполним в соответствии с правилами методов многокритериального выбора [7], которые базируются на результирующем отношении доминирования с k-м порядком строгого предпочтения объектов:

$$a_l \succ^k a_q \Leftrightarrow \ \forall\, i \in I : x_i^{(l)} \geq x_i^{(q)} \wedge \exists i_\xi \in I, \xi = \overline{1,k} : x_{i_\xi}^{(l)} > x_{i_\xi}^{(q)},$$

т.е. объект a_l доминирует с k-м порядком строгого предпочтения объект a_q (обозначение $a_l \succ^k a_q$), если для оценок $x_i^{(l)} = f_i(a_l)$ объектов с прямым порядком предпочтения по критериям f_i, $i \in I$, выполняются нестрогие неравенства $x_i^{(l)} \geq x_i^{(q)}$, причем по крайней мере для k критериев $f_{i_1}, \ldots, f_{i_\xi}, \ldots, f_{i_k}$ с номерами $i_\xi \in I = \{1, 2, \ldots, m\}$, где $\xi = \overline{1,k}$, выполняются строгие неравенства $x_{i_\xi}^{(l)} > x_{i_\xi}^{(q)}$.

В соответствии с правилом доминирующих объектов [7]:

$$\pi_k^* : A \to V_k^*(A), k = \overline{1,m}, \tag{15}$$

где $V_k^*(A) = \left\{a_q^* \in A : \exists a_q^* \succ^k a_l, \forall a_l \in A\right\}$ – множество доминирующих объектов; $\succ^k$ – результирующие отношения доминирования с k-м порядком строгого предпочтения, получим следующие ранжирования:

$$k = 1 : a_2^* \succ^1 \{a_1\},\ a_4^* \succ^1 \{a_3, a_5, a_7, a_8, a_{10}\},\ a_5^* \succ^1 \{a_3, a_8, a_{10}\}, a_7^* \succ^1 \{a_3, a_8\}; \tag{16}$$

$$k=2: a_2^* \succ^2 \{a_1\}, a_4^* \succ^2 \{a_3, a_8, a_{10}\}, a_5^* \succ^2 \{a_3, a_8, a_{10}\}, a_7^* \succ^2 \{a_3, a_8\}; \quad (17)$$

$$k=3: a_4^* \succ^3 \{a_3, a_8\}, a_5^* \succ^3 \{a_3, a_8\}, a_7^* \succ^3 \{a_8\}; \quad (18)$$

В итоге получим следующие результаты сужения исходного множества проектов:

$$A_1^{nd} = \{a_2^*,\ a_4^*,\ \ a_6,\ a_9\}, \quad (19)$$

$$A_2^{nd} = \{a_2^*, a_4^*, a_5^*,\ a_6, a_7^*, a_9\}, \quad (20)$$

$$A_3^{nd} = \{a_1, a_2, a_4^*, a_5^*, a_6, a_7^*, a_9, a_{10}\}. \quad (21)$$

Результаты сужения исходного множества объектов при различном числе строгих предпочтений в результирующем отношении представлены в табл. 5 (отмечены «+»).

Таблица 5

Результаты сужения исходного множества

k	Подмножества k-эффективных (недоминируемых) объектов									
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1		+		+		+			+	
2		+		+	+	+	+		+	
3	+	+		+	+	+	+		+	+

Из табл. 5 следует, что варианты неэффективных (доминируемых) проектов a_3 и a_8 в дальнейшем можно исключить из рассмотрения. Если ориентироваться на правило доминирования (15) также с учетом трех строгих отношениях доминирования $(k=3)$, то для дальнейшего рассмотрения можно оставить варианты проектов $a_4^*, a_5^*, a_7^* \in V_3^*(A)$.

Перейдем от исходных оценок к градациям ранговой шкалы с учетом связанных рангов, результаты перехода представлены в табл. 6.

Таблица 6

Проекты радиолокационных станций в ранговой шкале

Критерий	Вариант проекта радиолокационных станций в ранговой шкале									
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
f_1, км	1	2	5	8	8	10	5	3	5	8
f_2	8	8	4,5	8	8	1	8	4,5	3	2
f_3, мвт	7	10	1,5	5,5	4	9	5,5	3	8	1,5
Сумма рангов	16	20	11	21,5	20	20	18,5	10,5	16	11,5

В последней строке табл. 6 представлены обобщенные оценки по формуле суммы рангов: $r_\Sigma^{(l)} = \sum_{i=1}^{3} r_i^{(l)}\ \forall\, l = 1,2,\ldots,10.$

С учетом обобщенных оценок объектов по сумме рангов получим ранжирования, совпадающие с ранжированиями (16)–(18), а именно:

$k=1: a_2^* \succ^1 \{a_1\} \Leftrightarrow 20 > 16,$

$a_4^* \succ^1 \{a_3, a_5, a_7, a_8, a_{10}\} \Leftrightarrow 21{,}5 > \{11; 20; 18{,}5; 10{,}5; 11{,}5\};$

$a_7^* \succ^1 \{a_3, a_8\} \Leftrightarrow 18{,}5 > \{11;10{,}5\};$

$k = 2 : a_2^* \succ^2 \{a_1\} \Leftrightarrow 20 > 16,$

$a_4^* \succ^2 \{a_3, a_8, a_{10}\} \Leftrightarrow 21{,}5 > \{11;10{,}5;\ 11{,}5\},$

$a_5^* \succ^2 \{a_3, a_8, a_{10}\} \Leftrightarrow 20 > \{11;10{,}5;\ 11{,}5\},$

$a_7^* \succ^2 \{a_3, a_8\} \Leftrightarrow 18{,}5 > \{11;10{,}5;$

$k = 3 : a_4^* \succ^3 \{a_3, a_8\} \Leftrightarrow 21{,}5 > 10{,}5,$

$a_5^* \succ^3 \{a_3, a_8\} \Leftrightarrow 20 > 10{,}5,$

$a_7^* \succ^3 \{a_8\} \Leftrightarrow 18{,}5 > 10{,}5.$

Наглядно результаты ранжирования проектов для k строгих отношений по сумме рангов, совпадающие с ранжированиями (16)–(18), представлены на рис. 2.

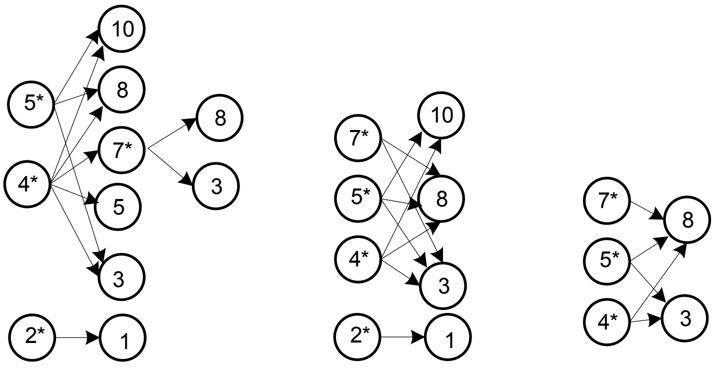


Рис. 2. Представление ранжирований в виде ориентированного графа: *а* – k = 1; *б* – k = 2; *в* – k = 3

Формирование обобщенных оценок объектов в канонической ранговой шкале позволяет также ранжировать и оценивать объекты из множества недоминируемых (19)–(21) в шкале разности: на сколько рангов один объект предпочтительней другого.

Исходя из значений, суммы рангов ранжирование проектов представим в виде:

$$a_4^* \succ \{a_2^* \approx a_5^* \approx a_6\} \succ a_7^* \succ \{a_1 \approx a_9\} \succ a_{10} \succ a_3 \succ a_8.$$

Следует заметить, что проекты a_2^*, a_4^* в исходных шкалах не сравнимы между собой и принадлежат множеству недоминируемых объектов A_1^{nd} и A_2^{nd}. Однако по сумме рангов проект a_4^* на 1,5 балла предпочтительнее, чем проект a_2^*. Окончательное решение за лицом, принимающим решение.

Теорема 2. *Пусть предпочтения на множестве объектов, измеренных в разнотипных шкалах по критериям* f_i, $i = \overline{1, m}$, *представлены ранжированиями, базирующимися на отношениях доминирования с k-м порядком строго предпочтения.*

Тогда ранжирования объектов по сумме рангов совпадут с ранжированиями, базирующимися на отношениях доминирования с k-м порядком строго предпочтения.

Доказательство. Пусть для правила доминирования π_k^* (15) множество доминирующих объектов не пусто $V_k^*(A) \neq \varnothing$. Это значит, что найдется пара объектов, для которых справедливо отношение доминирования $a_q^* \succ^k a_l$.

Исходя из вывода теоремы 1, что монотонные преобразования оценок объектов в исходных шкалах не будут влиять на ранжирование объектов по критериям в результирующей канонической ранговой шкале, в этом случае справедливы выражения:

$$a_l \succ^k a_q \Leftrightarrow \forall\ i = \overline{1,m} : r_i^{(l)} \geq r_i^{(q)} \wedge \exists\, i_\xi \in I, \xi = \overline{1,k} : r_{i_\xi}^{(l)} > r_{i_\xi}^{(q)}.$$

Откуда

$$\sum_{i=1}^{m} r_i^{(l)} > \sum_{i=1}^{m} r_i^{(q)},$$

где $r_\Sigma^{(l)} = \sum_{i=1}^{m} r_i^{(l)}$, $r_\Sigma^{(q)} = \sum_{i=1}^{m} r_i^{(q)}$.

Итак, ранжирование объектов по сумме рангов совпадает и для оценок объектов в исходных шкалах, что и требовалось доказать.

Заключение

Таким образом, математически обоснован метод, при котором показано, что результаты преобразования количественных (порядковых) оценок объектов в градации ранговой шкалы при решении многокритериальных задач будут инвариантны при любых количественных преобразованиях исходных шкал. Доказывается сохранение упорядочений объектов по обобщенным оценкам в виде суммы рангов по равноважным критериям. При этом также сохраняются упорядочения объектов, базирующиеся на отношениях с k-м порядком строгого предпочтения.

Показано, что в ранговой шкале не только сохраняются ранжирования, но и недоминируемые (эффективные) объекты можно различать в шкале разности: на сколько баллов один объект предпочтительнее другого.

В практике ранжирования объектов допускаются как отношения строгого порядка, так и нестрогого порядка, т.е. эквивалентность некоторых групп объектов.

В задачах многокритериального ранжирования и выбора при построении результирующих шкал необходимо учитывать линейность или нелинейность исходных шкал, в которых измеряются объекты.

Для объектов, представленных в различных шкалах, в качестве результирующих шкал необходимо использовать только канонические, которые одновременно удовлетворяют требованиям линейности и однородности. При этом применение аддитивного механизма оценок объектов в канонических порядковых шкалах корректно.

Список литературы

1. Литвак Б.Г. Экспертная информация: методы получения и анализа. – М.: Радио и связь, 2006. – 184 с.

2. Миркин Б.Г. Проблема группового выбора. – М.: Наука, 1974. – 256 с.

3. Новиков Д.А., Орлов А.И. Экспертные оценки – инструменты аналитика // Заводская лаборатория. – 2013. – Т. 79, № 4. – С. 3–4.

4. Захаров А.О. Сужение множества Парето на основе замкнутой информации об отношении предпочтения ЛПР // Вестник Санкт-петербургского университета. – 2009. – № 4. – С. 69–83.

5. Бугаев Ю.В., Никитин Б.Е., Диоп А. Сужение множества Парето на основе информации о предпочтениях ЛПР // Воронежский государственный университет инженерных технологий. – 2016. – № 2. – С. 78–84.

6. Ногин В.Д. Сужение множества Парето: аксиоматический подход. – М. ФИЗМАТЛИТ, 2016. – 249 с.

7. Корнеенко В.П. Методы многокритериального сужения и выбора объектов, базирующиеся на отношениях с k-м порядком строгого предпочтения // Информационные технологии. – 2023. – Т. 29, № 9. – С. 457–466.

8. Формализация метода ранжирования альтернатив для процесса группового принятия решений при анализе социальных сетей / А.А. Гайдамака, Н.В. Чухно, О.В. Чухно, К.Е. Самуйлов, С.Я. Шоргин // Информатика и ее применения. – 2019. – Т. 13, № 3. – С. 63–71.

9. Малтугуева Г.С., Юрин А.Ю. Алгоритм коллективного выбора на основе обобщенных ранжировок для поддержки принятия решений // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2009. – № 3 (23). – С. 57–62.

10. Mitra R., Basak J. Methods of case adaptation: A survey // International Journal of Intelligent Systems. –2005. – Vol. 20, № 6. – P. 627–645.

11. Kemeny J.G., Snell J.L. Mathematical Models in the Social Sciences. – New York, University of Michigan, 1962. – 168 p.

12. Plaza E., Arcos J.L. Constructive Adaptation // LNCS. – 2002. – Vol. 2416. – P. 306–320.

13. A statistical comparative study of different similarity measures of consensus in group decision making / F. Chiclana, G.J. Tapia, M.J. Moral, E. Herrera-Viedma // Inform. Sciences. – 2013. – Vol. 221. – P. 110–123.

14. Юрин А.Ю. Методы группового выбора для адаптации решений, полученных в результате рассуждений на основе прецедентов // Искусственный интеллект и принятие решений. – 2013. – № 3. – С. 78–85.

15. Гилев Д.В., Логиновский О.В. Модель интегральной оценки эффективности управления медицинской организацией на основе математического подхода // Прикладная математика и вопросы управления. – 2022. – № 4. – С.108–122.

16. Рамеев О.А. Основы теории принятия решений в организационных системах управления. – М.: Горячая линия – Телеком, 2023. – 288 с.

17. Орлов А.И. Средние величины и законы больших чисел в пространстве произвольной природы // Научный журнал КубГАУ. – 2013. – № 89(05). – С. 1–31.

18. Pfanzsagl J. Theory of measurement. – Berlin, Heidelberg: Spriger-Verlag, 1971. – 235 p.

19. Kendall M.G. Rank correlation methods. – New York: Oxford University, 1990. – 260 p.

20. Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys multiple criteria decision analysis: state of the art surveys / edited by Jose Figueira, Salvatore Greco, Matthias Ehrgott. Springer, 2005. – 1048 p.

21. Keeney R.L., Raiffa H. Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Trade-Offs. – New York: Wiley, 1976. – 569 p.

22. Друзин С.В., Горевич Б.Н. Методика формирования облика радиолокационных станций перспективной системы вооружения войсковой ПВО // Вестник Концерна ВКО «Алмаз – Антей». – 2020. – № 2. – С. 6–30.

23. Горохов А.Х., Кашпур Н.Л. Основы радиолокации и элементы РЛС. – Самара: СГТУ, 2014. – 247 с.

References

1. Litvak B.G. Ehkspertnaya informatsiya: Metody polucheniya i analiza [Expert information: Methods of obtaining and analysis]. Moscow, Radio and Communications, 2006, 184 p.

2. Mirkin B.G. Problema gruppovogo vybora [The problem of group choice]. Moscow, Nauka, 1974, 256 p.

3. Novikov D.A., Orlov A.I. Ehkspertnye otsenki – instrumenty analitika [Expert assessments – analytical tools]. *Factory laboratory*, 2013, vol. 79, no. 4, pp. 3–4.

4. Zakharov A.O. Suzhenie mnozhestva Pareto na osnove zamknutoi informatsii ob otnoshenii predpo-chteniya LPR [Narrowing of the Pareto set based on closed information about the LPR preference relation]. *Bulletin of St. Petersburg University*, 2009, no. 4, pp. 69–83.

5. Bugaev Yu.V., Nikitin B.E., Diop A. Cuzhenie mnozhestva Pareto na osnove informatsii o predpochteniyakh LPR [Narrowing of the Pareto set based on information about the preferences of LPR]. *Voronezh State University of Engineering Technologies*. 2016, no. 2, pp. 78–84.

6. Nogin V.D. Suzhenie mnozhestva Pareto: aksiomaticheskii podkhod [Narrowing of the Pareto set: an axiomatic approach]. Moscow, FIZMATLIT, 2016, 249 p.

7. Korneenko V.P. Metody mnogokriterial'nogo suzheniya i vybora ob"ektov, baziruyushchiesya na otnosheniyakh s k-m poryadkom strogogo predpochteniya [Methods of multicriteria narrowing and selection of objects based on relations with the k-th order of strict preference]. *Information technologies*, 2023, vol. 29, no. 9, pp. 457–466.

8. Gaydamaka A.A., Chukhno N.V., Chukhno O.V., Samuilov K.E., Shorgin S.Ya. Formalizatsiya metoda ranzhirovaniya al'ternativ dlya protsessa gruppovogo prinyatiya reshenii pri analize sotsial'nykh setei [Formalization of the method of ranking alternatives for the process of group decision-making in the analysis of social networks]. *Informatics and its applications*, 2019, vol. 13, no. 3, pp. 63–71.

9. Maltugueva G.S., Yurin A.Yu. Algoritm kollektivnogo vybora na osnove obobshchennykh ranzhirovok dlya podderzhki prinyatiya reshenii [Algorithm of collective choice based on generalized rankings for decision support]. *Modern technologies. System analysis. Modeling*, 2009, no. 3 (23), pp. 57–62.

10. Mitra R., Basak J. Methods of case adaptation: A survey. *International Journal of Intelligent Systems*, 2005, vol. 20, no. 6, pp. 627–645.

11. Kemeny J.G., Snell J.L. Mathematical Models in the Social Sciences. – New York, University of Michigan, 1962, 168 p.

12. Plaza E., Arcos J.L. Constructive Adaptation // LNCS. – 2002. – Vol. 2416. – P. 306–320.

13. Chiclana F., Tapia G.J., Moral M.J., Herrera-Viedma E. A statistical comparative study of different similarity measures of consensus in group decision making. *Information Sciences*, 2013, vol. 221, pp. 110–123.

14. Yurin A.Yu. Metody gruppovogo vybora dlya adaptatsii reshenii, poluchennykh v rezul'tate rassuzhdenii na osnove pretsedentov [Methods of group selection for adaptation of solutions obtained as a result of reasoning based on precedents]. *Artificial intelligence and decision-making*, 2013, no. 3, pp. 78-85.

15. Gilev D.V., Loginovsky O.V. Model' integral'noi otsenki ehffektivnosti upravleniya meditsinskoi organizatsiei na osnove matematicheskogo podkhoda [Model of integral assessment of the effectiveness of management of a medical organization based on a mathematical approach]. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2022, no. 4, pp.108–122.

16. Rameev O.A. Osnovy teorii prinyatiya reshenii v organizatsionnykh sistemakh upravleniya [Fundamentals of the theory of decision–making in organizational management systems]. – Moscow, Hotline – Telecom, 2023, 288 p.

17. Orlov A.I. Srednie velichiny i zakony bol'shikh chisel v prostranstve proizvol'noi prirody [Average values and laws of large numbers in the space of arbitrary nature]. *Scientific journal of KubGAU*, 2013, no. 89(05), pp. 1–31.

18. Pfanzsagl J. Theory of measurement. Berlin, Heidelberg: Spriger-Verlag, 1971, 235 p.

19. Kendall M.G. Rank correlation methods. New York, Oxford University, 1990, 260 p.

20. Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys multiple criteria decision analysis: state of the art surveys / Edited by Jose Figueira, Salvatore Greco, Matthias Ehrgott. Springer, 2005, 1048 p.

21. Keeney R.L., Raiffa H. Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Trade-Offs. New York, Wiley, 1976, 569 p.

22. Druzin S.V., Gorevich B.N. Metodika formirovaniya oblika radiolokatsionnykh stantsii perspektivnoi sistemy vooruzheniya voiskovoi PVO [The methodology of forming the appearance of radar stations of a promising military air defense weapon system]. *Bulletin of the East Kazakhstan Region "Almaz – Antey"*, 2020, no. 2, pp. 6–30.

23. Gorokhov A.Kh., Kashpur N.L. Osnovy radiolokatsii i ehlementy RLS [Fundamentals of radar and radar elements]. Samara, Samara State Technical University, 2014, 247 p.