УДК 517.518.5

И.П. Попов

Курганский государственный университет, Курган, Россия

О НЕКОТОРЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ

Дается определение ограниченной вдоль оси абсцисс комплекснозначной периодической функции. Таковыми являются практически все периодические функции, встречающиеся в технических приложениях. Доказывается, что вопреки соответствию условиям разложимости посредством интеграла Фурье такие функции не подлежат разложению в непрерывный спектр гармоник. Показано, что функция, периодическая на всей вещественной оси, также не представима интегралом Фурье. Доказывается, что ограниченная вдоль оси абсцисс периодическая функция не имеет гармоник в области ее нулевых значений. Показано, что прямоугольная импульсная функция может быть представлена как квазипериодическая и в этой связи не подлежит разложению посредством интеграла Фурье, при этом ее спектр (если он существует) не зависит от величины виртуального периода; это заключение, в частности, распространяется на ступенчатую функцию Хевисайта. Доказывается, что прямоугольная импульсная функция не разлагается на гармоники, не считая нулевой гармоники, равной значению самой прямоугольной импульсной функции; как следствие, не разлагаются на гармоники ступенчатая функция Хевисайта и δ-функция Дирака. Показано, что ограниченная вдоль оси абсцисс гармоническая функция не подлежит разложению в непрерывный спектр гармоник посредством интеграла Фурье.

Ключевые слова: интеграл Фурье, гармоники, период, дискретный спектр, разложение.

I.P. Popov

Kurgan State University, Kurgan, Russian Federation

SOME RESTRICTIONS OF FOURIER INTEGRAL

Given certain restrictions on the number axis complex- periodic function. These are almost all periodic functions encountered in technical applications. It is proved that in spite of appropriate conditions expandability via Fourier integral such functions can not be decomposed into a continuous spectrum of harmonics. It is shown that a periodic function on the real axis can not be represented as a Fourier integral. It is proved that bounded on the axis of a periodic function has no harmonics in its zero values. It is shown that a rectangular pulse function can be represented as a quasi-periodic and therefore not subject to degradation by the Fourier integral, and its spectrum (if it exists) does not depend on the size of the virtual period, this conclusion, in particular, apply to the step Hevisayt function. It is proved that a rectangular pulse function is decomposed into harmonics, not counting the zero harmonic, equal to the value itself rectangular pulse function, which consequently can not be decomposed by harmonic step Hevisayt function and δ-Dirac function. It is shown that bounded on the real axis harmonic function can not be decomposed into a continuous spectrum of harmonics by the Fourier integral.

Keywords: Fourier integral, harmonics, period, discrete spectrum, decomposition.

Считается, что почти любую функцию, не являющуюся периодической на протяжении всей числовой прямой, можно представить интегралом Фурье. Таковыми являются практически все периодические функции, встречающиеся в технических приложениях, поскольку они имеют начало и конец, и поэтому определены лишь на ограниченном интервале, а не на всей числовой прямой [1–10]. При решении вопроса разложимости функции в непрерывный спектр гармоник посредством интеграла Фурье, как правило, решается задача определения классов функций, для которых данное разложение возможно. В соответствии с этим подходом функции должны удовлетворять условиям, аналогичным условиям Дини и Дирихле – Жордана для рядов Фурье. В настоящей работе использован противоположный подход – определяются виды функций, которые не могут быть представлены интегралом Фурье. Как будет показано ниже, подходы не являются равнозначными – некоторые функции, подлежавшие разложению в соответствии с первым подходом, не разлагаются в соответствии со вторым.

Определение. Комплекснозначная функция

$$f(x)=\begin{cases} f\left(x+\dfrac{\zeta-\xi}{n}\right)\equiv f(x), & \text{при } x\in[\xi,\zeta]\subset\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2, \\ 0, & \text{при } x\notin[\xi,\zeta] \end{cases}$$

является ограниченной вдоль оси абсцисс периодической функцией.

Теорема 1. Ограниченная вдоль оси абсцисс периодическая функция $f(x)$ не представима интегралом Фурье.

Доказательство. Пусть

$$\frac{\zeta-\xi}{n}=T \tag{1}$$

и пусть на интервале $[x_1,x_2]\subset[\xi,\zeta]$, где $x_1=\xi+mT$, $x_2=\xi+(m+1)T$, $m\in\mathbb{N}$, $m<n$, $f(x)$ имеет гармоническую составляющую

$$\varphi(x)=c_p e^{ipx}, c_p\in\mathbb{C}, p\in\mathbb{R}.$$

Ее значение на границах интервала:

$$\varphi_1=c_p e^{ipx_1},\ \varphi_{2-0}=c_p e^{ipx_2}.$$

В силу периодичности $f(x)$ ее значения на интервале $[x_2, x_3] \subset [\xi, \zeta]$, где $x_3 = \xi + (m+2)T$, будут такими же, как на предыдущем интервале. Поэтому на втором интервале имеется эта же гармоническая составляющая φ, которая на границах интервала имеет значения:

$$\varphi_{2+0} = c_p e^{ipx_2}, \ \varphi_3 = c_p e^{ipx_3}.$$

При этом $\varphi_1 = \varphi_{2+0}$, $\varphi_{2-0} = \varphi_3$.

Поскольку φ непрерывна, $\varphi_{2-0} = \varphi_{2+0}$. Следовательно, $\varphi_1 = \varphi_{2-0}$. Это означает, что на периоде T укладывается целое число периодов любой произвольной гармоники φ. Отсюда следует, что спектр частот гармоник, на которые может быть разложена $f(x)$, является дискретным, в то время как у интеграла Фурье он непрерывен. Следовательно, $f(x)$ не может быть представлена интегралом Фурье. Теорема доказана.

Следствие. Функция, периодическая на всей вещественной оси, не представима интегралом Фурье.

Известно, что для функции

$$g(x) = \begin{cases} g(x) \neq 0, & \text{при } x \in [\xi, \zeta], \\ 0, & \text{при } x \notin [\xi, \zeta], \end{cases}$$

представимой интегралом Фурье, ее любая гармоника существует всюду в $(-\infty, \infty)$.

Теорема 2. Для ограниченной вдоль оси абсцисс периодической функции $f(x)$ гармоники существуют только на отрезке $[\xi, \zeta]$.

Доказательство. В соответствии с теоремой 1 любая гармоника из интервала $[\xi, \xi + T]$ имеет в нем целое число периодов и, будучи распространена на интервал $[\xi - T, \xi]$, имеет в последнем такое же распределение фаз относительно границ интервала, как и в интервале $[\xi, \xi + T]$. Это вытекает из равенства интервалов. Следовательно, суммы всех гармоник в обоих интервалах будут одинаковыми, и в интервале слева от ξ функция повторит форму функции справа от ξ, что противоречит определению ограниченной вдоль оси абсцисс периодической функции. То же справедливо по отношению к правой границе отрезка $[\xi, \zeta]$. Таким образом, за пределами отрезка $[\xi, \zeta]$ $f(x)$ гармоник не имеет. Теорема доказана.

Теорема 3. Прямоугольная импульсная функция

$$p(x) = \begin{cases} P = \text{const}, & \text{при } x \in [\xi, \zeta], \\ 0, & \text{при } x \notin [\xi, \zeta], \end{cases}$$

не представима интегралом Фурье.

Доказательство 1. Отрезок $[\xi, \zeta]$ может быть разбит на n равных отрезков (виртуальных периодов). При этих обстоятельствах $p(x)$ удовлетворяет определению ограниченной вдоль оси абсцисс периодической функции. В соответствии с теоремой 2 за пределами отрезка $[\xi, \zeta]$ ни одна из гармоник не существует, в то время как для интеграла Фурье гармоники существуют всюду. Теорема доказана.

Доказательство 2. Пусть $p(x)$ представима интегралом Фурье. При разбиении отрезка $[\xi, \zeta]$ на конечное число n равных отрезков (виртуальных периодов) субимпульс $p_i(x)$, соответствующий любому периоду, можно рассматривать как прямоугольную импульсную функцию, отличающуюся от исходной только продолжительностью. Поэтому, так же как и для исходной функции, можно допустить, что он представим интегралом Фурье, все гармоники которого имеют периоды, в n раз меньшие, чем периоды соответствующих гармоник исходной функции $p(x)$. В соответствии с теоремой 1 гармоники субимпульса $p_i(x)$ (если они существуют) образуют только дискретный спектр, следовательно, гармоники исходной импульсной функции (если они существуют) тоже образуют только дискретный спектр, что не совместимо с представлением интегралом Фурье. Теорема доказана.

Замечание. Спектр исходной прямоугольной импульсной функции $p(x)$ (если он существует) не зависит от числа разбиений отрезка $[\xi, \zeta]$. Действительно, период первой гармоники субимпульса $p_i(x)$ (если она существует) определяется (1), а период первой гармоники $p(x)$ (если она существует) в n раз больше.

Следствие. Ступенчатая функция Хевисайда

$$\Upsilon_{-}(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \geq 0, \\ 0, & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

не представима интегралом Фурье.

Ступенчатую функцию можно рассматривать как предельный случай прямоугольной функции при $\zeta \to \infty$.

Во избежание рассмотрения бесконечно больших периодов *n* тоже можно устремить в бесконечность, связав его определенным образом с ζ. Пусть, например,

$$\zeta - \xi = qn + r\ ,\ q, r \in \mathbb{R}\,.$$

$$n = \frac{\zeta - \xi - r}{q}\,.$$

Тогда (виртуальный) период функции

$$T = \lim_{\zeta \to \infty} \frac{\zeta - \xi}{n} = \lim_{\zeta \to \infty} \frac{q\zeta - q\xi}{\zeta - \xi - r} = q\ .$$

Теорема 4. Прямоугольная импульсная функция не разлагается на гармоники, не считая нулевой гармоники, равной значению самой прямоугольной импульсной функции.

Доказывается прямой подстановкой в формулы для коэффициентов гармоник ряда Фурье.

Следствие 1. Ступенчатая функция не разлагается на гармоники.

Следствие 2. δ-Функция Дирака не разлагается на гармоники.

δ-Функция представляет собой предельный случай прямоугольной импульсной функции с единичной площадью при стремлении продолжительности импульса к нулю.

С другой стороны, δ-функция равна производной единичной ступенчатой функции. Если бы δ-функция имела гармоники, то они были бы производными гармоник ступенчатой функции. Но последняя не имеет гармоник или ее гармоники всюду равны нулю. Следовательно, и гармоники δ-функции также всюду равны нулю.

Теорема 5. Ограниченная вдоль оси абсцисс периодическая функция

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ipx}, & \text{при } x \in [\xi, \zeta], A \in \mathbb{C}, \\ 0, & \text{при } x \notin [\xi, \zeta] \end{cases}$$

имеет на $[\xi, \zeta]$ единственную гармонику Ae^{ipx}. Доказывается прямой подстановкой в формулы для коэффициентов гармоник ряда Фурье.

Список литературы

1. Баркгаузен Г. Введение в учение о колебаниях. – М.: Госэнергоиздат, 1934. – 116 с.

2. Ананьев А.А., Вит А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Физматгиз, 1959. – 915 с.

3. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. – М.: Наука, 1971. – 240 с.

4. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1968. – 560 с.

5. Ден-Гартог Дж. Механические колебания: пер. с англ. – М.: Физматгиз, 1960. – 580 с.

6. Попов И.П. Колебательные системы, состоящие только из инертных или только упругих элементов, и возникновение в них свободных гармонических колебаний // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2013. – № 1(21). – С. 95–103.

7. Popov I.P. Free harmonic oscillations in systems with homogeneous elements // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2012. – Vol. 76. – Iss. 4. – P. 393–395.

8. Benson T. Principles of Vibration. – Oxford University Press, 2001. – 367 p.

9. Thompson W.T. Theory of Vibrations. – Nelson Thornes Ltd., 1996. – 295 p.

10. Inman Daniel J. Engineering Vibration. – Prentice Hall, 2001. – 418 p.

References

1. Barkgauzen G. Vvedenie v uchenie o kolebaniiakh [Introduction in the oscillation theory]. Moscow: Gosenergoizdat, 1934, 116 p.

2. Anan'ev A.A., Vit A.A., Haikin S.E. Teoriia kolebanii [Oscillation theory]. Moscow: Fizmatgiz, 1959, 915 p.

3. Panovko Ia.G. Vvedenie v teoriiu mekhanicheskikh kolebanii [Introduction in the mechanical oscillations theory]. Moscow: Nauka, 1971, 240 p.

4. Babakov I.M. Teoriia kolebanii [Oscillation theory]. Moscow: Nauka, 1968, 560 p.

5. Den-Gartog Dzh. Mekhanicheskie kolebaniia [Mechanical oscillations]. Moscow: Fizmatgiz, 1960, 580 p.

6. Popov I.P. Kolebatel’nye sistemy, sostoiashchie tol’ko iz inertnykh ili tol’ko uprugikh elementov, i vozniknovenie v nikh svobodnykh garmonicheskikh kolebanii [Oscillation systems consisting only of inert or only elastic elements and and the emergence of them free of harmonic oscillations]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2013, no. 1(21), pp. 95-103.

7. Popov I.P. Free harmonic oscillations in systems with homogeneous elements. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, vol. 76, iss. 4, pp. 393-395.

8. Benson T. Principles of Vibration. Oxford University Press, 2001. 367 p.

9. Thompson W.T. Theory of Vibrations. Nelson Thornes Ltd., 1996. 295 p.

10. Inman Daniel J. Engineering Vibration. Prentice Hall, 2001. 418 p.

Получено 23.12.2014

Сведения об авторе

Попов Игорь Павлович (Курган, Россия) – старший преподаватель кафедры «Технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты» Курганского государственного университета (640001, г. Курган, ул. Томина, 106, e-mail: ip.popow@yandex.ru).

About the author

Igor P. Popov (Kurgan, Russian Federation) – Senior Lecturer, Department of Mechanical Engineering, Machine Tools and Instruments, Kurgan State University (106, Tomin st., Kurgan, 640001, Russian Federation, e-mail: ip.popow@yandex.ru).