УДК 519.927

Э.В. Плехова

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Описаны некоторые свойства однопараметрического семейства сингулярных интегральных операторов, которые являются обобщением сингулярного оператора Чезаро. Получены оценки снизу для коэффициента сюръективности оператора, являющегося суммой тождественного оператора и обобщенного оператора Чезаро. Показана коммутативность операторов данного класса. Описана область изменения коэффициентов линейной комбинации обобщенных операторов Чезаро, при которых соответствующий оператор является сюръективным.

Ключевые слова: сингулярный интегральный оператор, оператор Чезаро, коэффициент сюръективности, разрешимость всюду.

E.V. Plekhova

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

ABOUT SOME PROPERTIES OF ONE CLASS SINGULAR OPERATORS

Some properties of the one-parameter class of singular integral operators were described. The operators are a generalization of a singular Cesaro operator. Lower estimates are obtained for the coefficient surjectivity operator which is the sum of the unit operator and the generalized Cesaro operator. A commutative of the operators of this class was shown. We described the range of the coefficients of the linear combination of generalized operators of Cesaro, at which the corresponding operator is surjective.

Keywords: singular integral operator, Cesaro operator, surjectivity coefficient, solvability everywhere.

Исследуемые в данной статье свойства сингулярных интегральных операторов $A_\alpha : L_2 \to L_2$ определяются равенством

$$(A_\alpha x)(t)\frac{1}{t^{\alpha+1}}\int\limits_0^t s^\alpha x(s)\,ds\,, \tag{1}$$

где L_2 – пространство измеримых, суммируемых по Лебегу с квадратом функций $x:[0;1]\to J$, α – действительный параметр.

При исследовании краевых задач для таких дифференциальных уравнений, как уравнения Эйлера, Ванье-Штарка, Шредингера, возникает необходимость изучать различные свойства «главной части» соответствующего линейного уравнения [1]. Для перечисленных типов уравнений главная часть имеет вид суммы тождественного оператора и линейной комбинации операторов вида (1), т.е. оператор вида

$$A_{\alpha,\beta} = I + kA_{\alpha} + mA_{\beta}. \tag{2}$$

Как известно [1], многие вопросы, связанные с краевыми задачами, определяются свойствами главной части соответствующего линейного оператора. В этой связи актуальным является вопрос об исследовании свойств операторов (1) и (2).

В настоящей работе получены некоторые свойства операторов (1). На основе этих положений доказаны новые утверждения для операторов вида (2). В частности, описана область изменения параметров k, m, при которых оператор вида (2) является сюръективным.

Операторы вида (1) будем называть обобщенными операторами Чезаро. Это название обусловлено тем фактом, что частный случай оператора (1), а именно – оператор

$$\left(A_0 x\right)(t)\frac{1}{t}\int_0^t x(s)\,ds,$$

известен в зарубежной литературе как оператор Чезаро [2]. Отметим, что в отечественной литературе он носит название оператор Харди-Литлвуда [3, 4].

В работе [3] показана ограниченность оператора Чезаро A_0 как оператора, действующего в пространстве измеримых, суммируемых со степенью $p\ (p>1)$ функций, а также описан спектр оператора A_0.

Далее будем рассматривать пространство L_2 как гильбертово пространство комплекснозначных функций $x:[0;1]\to \mathrm{J}$, со скалярным произведением

$$(x, y) = \int_0^1 x(t)\,\overline{y}(t)\,dt.$$

Сопряженный с A_α оператор имеет вид

$$\left(A_\alpha^{*}\omega\right)(t) = t^{\alpha}\int_t^1 \frac{x(s)}{s^{\alpha+1}}ds. \tag{3}$$

Известно [5], что если $\alpha \in (-1/2; \infty)$, то оператор $A_\alpha : L_2 \to L_2$ ограничен.

Теорема 1. Пусть $\alpha \in (-1/2; \infty)$. Для произвольного элемента $x \in L_2$ справедливы соотношения:

$$\operatorname{Re}(x, A_\alpha x) \geq \frac{2\alpha+1}{2}\|A_\alpha x\|^2,$$

$$\operatorname{Re}\left(x, A_\alpha^{*}x\right) \geq \frac{2\alpha+1}{2}\left\|A_\alpha^{*}x\right\|^2.$$

Доказательство. Для произвольного элемента $x \in L_2$ имеем:

$$I \overset{\text{об}}{=} \operatorname{Re}(x, A_\alpha x) = \int_0^1 \frac{x_1(t)}{t^{\alpha+1}}\int_0^t x_1(s)s^{\alpha}dsdt + \int_0^1 \frac{x_2(t)}{t^{\alpha+1}}\int_0^t x_2(s)s^{\alpha}dsdt,$$

где $x_1(t) = \operatorname{Re} x(t)$, $x_2(t) = \operatorname{Im} x(t)$.

Преобразуем интегралы в правой части, используя формулу интегрирования по частям. При этом в условной записи подстановки границ воспользуемся тем фактом, что $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t^{\alpha+1/2}}\int_0^t s^{\alpha}x(s)ds = 0.$

$$I = \frac{1}{2}t^{-2\alpha-1}\left(\int_0^t x_1(s)s^{\alpha}ds\right)^2\Bigg|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1(2\alpha+1)t^{-2\alpha-1}\left(\int_0^t x_1(s)s^{\alpha}ds\right)^2 dt +$$

$$+\frac{1}{2}t^{-2\alpha-1}\left(\int_0^t x_2(s)s^{\alpha}ds\right)^2\Bigg|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1(2\alpha+1)t^{-2\alpha-1}\left(\int_0^t x_2(s)s^{\alpha}ds\right)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 x_1(s)s^{\alpha}ds\right)^2 + \frac{2\alpha+1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{t^{\alpha+1}}\int_0^t x_1(s)s^{\alpha}ds\right)^2 dt + + \frac{1}{2}\left(\int_0^1 x_2(s)s^{\alpha}ds\right)^2 +$$

$$+\frac{2\alpha+1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{t^{\alpha+1}}\int_0^t x_2(s)s^\alpha ds\right)^2 dt \ge \frac{2\alpha+1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{t^{\alpha+1}}\int_0^t x_1(s)s^\alpha ds\right)^2 dt+$$

$$+\frac{2\alpha+1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{t^{\alpha+1}}\int_0^t x_2(s)s^\alpha ds\right)^2 dt.$$

Поскольку $\|A_\alpha x\|^2=\|A_\alpha x_1\|^2+\|A_\alpha x_2\|^2$, то $I\ge\frac{2\alpha+1}{2}\|A_\alpha x\|^2$.

Доказательство второго соотношения повторяет доказательство первого, с тем лишь отличием, что при подстановке пределов интегрирования соответствующие слагаемые равны нулю.

Из утверждения теоремы 1 следует, что если рассматривать оператор A_α на пространстве действительнозначных функций, то операторы A_α и A_α^* являются положительными.

Теорема 2. Пусть $\alpha\in(-1/2;\infty)$. Для произвольного элемента $x\in L_2$ справедливы соотношения:

$$\left\|\frac{1}{2\alpha+1}x-A_\alpha^*x\right\|=\frac{1}{2\alpha+1}\|x\|^2,$$

$$\left\|\frac{1}{2\alpha+1}x-A_\alpha x\right\|\le\frac{1}{2\alpha+1}\|x\|^2.$$

Доказательство. Для произвольного элемента $x\in L_2$, с учетом утверждения теоремы 1, имеем:

$$\left\|\frac{1}{2\alpha+1}x-A_\alpha^*x\right\|^2=\frac{1}{(2\alpha+1)^2}\|x\|^2-\frac{2}{2\alpha+1}\operatorname{Re}\left(x,A_\alpha^*x\right)+\left\|A_\alpha^*x\right\|^2=$$

$$=\frac{1}{(2\alpha+1)^2}\|x\|^2-\frac{2}{2\alpha+1}\frac{2\alpha+1}{2}\left\|A_\alpha^*x\right\|^2+\left\|A_\alpha^*x\right\|^2=\frac{1}{(2\alpha+1)^2}\|x\|^2.$$

Второе соотношение доказывается аналогично.

Теорема 3. Пусть $\alpha\in(-1/2;\infty)$. Для произвольных $x\in L_2$ и $\lambda\in \mathrm{J}$ справедливы соотношения:

$$\left\|\bar{\lambda}x - A_\alpha{}^* x\right\| \geq \left\|\lambda - \frac{1}{2\alpha+1}\right| - \frac{1}{2\alpha+1}\left|\|x\|,$$

$$\|\lambda x - A_\alpha x\| \geq \left|\lambda - \frac{1}{2\alpha+1}\right| - \frac{1}{2\alpha+1}\|x\|.$$

Доказательство. С учетом утверждения теоремы 2 имеем:

$$\left\|\bar{\lambda}x - A_\alpha{}^* x\right\| \geq \left\|\left\|\left(\bar{\lambda} - \frac{1}{2\alpha+1}\right)x\right\| - \left\|\frac{1}{2\alpha+1}x - A_\alpha{}^* x\right\|\right\| = \left\|\lambda - \frac{1}{2\alpha+1}\right| - \frac{1}{2\alpha+1}\left|\|x\|.$$

Доказательство второго утверждения повторяет доказательство первого.

Соотношения, полученные в теореме 3, позволяют построить оценки для коэффициента сюръективности и модуля инъективности оператора $\lambda I - A_\alpha$. Напомним [6], что коэффициент сюръективности $q(L)$ линейного ограниченного оператора $L : X \to Y$, где X, Y – банаховы пространства, определяется равенством

$$q(L) = \inf_{\omega \neq \theta} \frac{\|L^* \omega\|}{\|\omega\|},$$

где $L^* : Y^* \to X^*$ – сопряженный оператор.

Коэффициент сюръективности $q(L)$ имеет очень важное значение при описании свойств линейного оператора, а именно: его положительность обеспечивает сюръективность оператора. Под модулем инъективности будем понимать число $m(L)$, определенное равенством

$$m(L) = \inf_{x \neq \theta} \frac{\|Lx\|}{\|x\|}.$$

Если $m(L) > 0$, ядро оператора L тривиально.

Непосредственно из теоремы 3 следуют утверждения.

Следствие 1. Справедливы неравенства:

$$q(\lambda I - A_\alpha) \geq \left| \left| \lambda - \frac{1}{2\alpha+1} \right| - \frac{1}{2\alpha+1} \right|,$$

$$m(\lambda I - A_\alpha) \geq \left| \lambda - \frac{1}{2\alpha+1} \right| - \frac{1}{2\alpha+1}.$$

Следствие 2. Пусть $\alpha \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ и m_α – комплексный параметр такой, что $\operatorname{Re} m_\alpha \neq \frac{2\alpha+1}{2}$. Тогда оператор $I - m_\alpha A_\alpha$ сюръективен и справедлива оценка

$$q(I - m_\alpha A_\alpha) \geq \frac{\left| \left| m_\alpha - (2\alpha+1) \right| - |m_\alpha| \right|}{2\alpha+1}.$$

Теорема 4. Пусть $\alpha, \beta, \gamma \in (-1/2; \infty)$ и различны. Тогда для любого $x \in L_2$ справедливы соотношения:

1) $A_\alpha^* x - A_\beta^* x = (\beta - \alpha) A_\alpha^* A_\beta^* x$;

2) $A_\alpha^* A_\beta^* = A_\beta^* A_\alpha^*$;

3) $A_\alpha^* x - A_\beta^* x = \left((\gamma - \alpha) A_\alpha^* + (\beta - \gamma) A_\beta^*\right) A_\gamma^* x.$

Доказательство. Покажем справедливость первого утверждения.

$$A_\alpha^* A_\beta^* x = t^\alpha \int_t^1 s^{\beta-\alpha-1} \int_s^1 \frac{x(\tau)}{\tau^{\beta+1}} d\tau ds = t^\alpha \left(\frac{s^{\beta-\alpha}}{\beta-\alpha} \int_s^1 \frac{x(\tau)\, d\tau}{\tau^{\beta+1}} \Bigg|_t^1 + \int_t^1 \frac{x(s)\, ds}{(\beta-\alpha) s^{\alpha+1}} \right) =$$

$$= t^\alpha \left(-\frac{t^{\beta-\alpha}}{\beta-\alpha} \int_t^1 \frac{x(\tau)\, d\tau}{\tau^{\beta+1}} + \int_t^1 \frac{x(s)\, ds}{(\beta-\alpha) s^{\alpha+1}} \right) = \frac{1}{\beta-\alpha} \left(A_\alpha^* x - A_\beta^* x \right).$$

Отсюда непосредственно следует коммутативность операторов A_α^* и A_β^*.

Используем соотношения 1 и 2 для доказательства третьего соотношения.

Имеем:

$$A_\alpha^* x - A_\gamma^* x = (\gamma - \alpha) A_\alpha^* A_\gamma^* x, \; A_\gamma^* x - A_\beta^* x = (\beta - \lambda) A_\beta^* A_\gamma^* x.$$

Складывая полученные два равенства, с учетом коммутативности операторов A_α^* и A_β^*, получаем соотношение 3.

Теорема доказана.

Свойства операторов, описанные в теореме 4, имеют различные приложения. Применим теорему 4 для доказательства условий сюръективности оператора $A_{\alpha,\beta} = I + kA_\alpha + mA_\beta$. Для этого нам понадобится вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Пусть X, Y, Z – банаховы пространства и $L_1 : X \to Y$, $L_2 : Y \to Z$ – линейные ограниченные операторы, тогда для коэффициента сюръективности оператора $L_2 L_1$ справедлива оценка $q(L_2 L_1) \ge q(L_2) q(L_1)$.

Доказательство. Для произвольных $\omega \in Z^*, \xi \in Y^*$ справедливы неравенства

$$\left\| L_1^* \xi \right\| \ge q(L_1) \|\xi\|, \quad \left\| L_2^* \omega \right\| \ge q(L_2) \|\omega\|.$$

Тогда для любого $\omega \in Z^*$ имеем

$$\left\| (L_2 L_1)^* \omega \right\| = \left\| L_1^* L_2^* \omega \right\| \ge q(L_1) \left\| L_2^* \omega \right\| \ge q(L_1) q(L_2) \|\omega\|.$$

Таким образом, для произвольного ненулевого $\omega \in Z^*$ справедливо неравенство

$$\frac{\left\| (L_2 L_1)^* \omega \right\|}{\|\omega\|} \ge q(L_1) q(L_2).$$

Переходя в полученном неравенстве к точной нижней грани по всем ненулевым $\omega \in Z^*$, получим требуемое.

Теорема 5. Пусть $\alpha, \beta > -\dfrac{1}{2}$ и $k, m \in \mathrm{J}$ таковы, что выполнено неравенство

$$\mathrm{Re}\left(-k - m \pm \sqrt{(k + m - \beta + \alpha)^2 + 4m(\beta - \alpha)} \right) \ne \alpha + \beta + 1. \qquad (4)$$

Тогда оператор $A_{\alpha,\beta}$ сюръективен.

Кроме того, справедлива оценка

$$q\left(A_{\alpha,\beta}\right) \geq \frac{\left\| m_\alpha - (2\alpha+1) \right| - \left| m_\alpha \right\| \left\| m_\beta - (2\beta+1) \right| - \left| m_\beta \right\|}{(2\alpha+1)(2\beta+1)}, \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned} m_\alpha &= \frac{-k-m-\beta+\alpha-\sqrt{(k+m-\beta+\alpha)^2-4m(\beta-\alpha)}}{2}, \\ m_\beta &= \frac{-k-m+\beta-\alpha+\sqrt{(k+m-\beta+\alpha)^2-4m(\beta-\alpha)}}{2}, \end{aligned} \tag{6}$$

здесь $\sqrt{z}$ – главное значение корня.

Доказательство. Для оператора $A_{\alpha,\beta}$ справедливо представление

$$A_{\alpha,\beta} = \left(I - m_\alpha A_\alpha\right)\left(I - m_\beta A_\beta\right), \tag{7}$$

где пара чисел m_α, m_β – решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{m_\alpha m_\beta}{\beta-\alpha} - m_\alpha = k, \\ -\dfrac{m_\alpha m_\beta}{\beta-\alpha} - m_\beta = m. \end{cases}$$

Действительно,

$$A_{\alpha,\beta} = I + kA_\alpha + mA_\beta = I + \left(\frac{m_\alpha m_\beta}{\beta-\alpha} - m_\alpha\right)A_\alpha + \left(-\frac{m_\alpha m_\beta}{\beta-\alpha} - m_\beta\right)A_\beta =$$

$$= I - m_\alpha A_\alpha - m_\beta A_\beta + \frac{m_\alpha m_\beta}{\beta-\alpha}\left(A_\alpha - A_\beta\right) = I - m_\alpha A_\alpha - m_\beta A_\beta + \frac{m_\alpha m_\beta}{\beta-\alpha}(\beta-\alpha) A_\alpha A_\beta =$$

$$= I - m_\alpha A_\alpha - m_\beta A_\beta + m_\alpha m_\beta A_\alpha A_\beta = \left(I - m_\alpha A_\alpha\right)\left(I - m_\beta A_\beta\right).$$

Представление (7) и утверждение леммы 1 позволяет получить оценку

$$q\left(A_{\alpha,\beta}\right) \geq q\left(I - m_\alpha A_\alpha\right) q\left(I - m_\beta A_\beta\right). \qquad (8)$$

При этом условия (4) гарантируют выполнение неравенств $\operatorname{Re} m_\alpha \neq \frac{2\alpha+1}{2}$ и $\operatorname{Re} m_\beta \neq \frac{2\beta+1}{2}$. Иными словами, в условиях теоремы правая часть неравенства (8) строго положительна. Следовательно, $q\left(A_{\alpha,\beta}\right) > 0$, т.е. $A_{\alpha,\beta}$ сюръективен. Использование оценок для $q\left(I - m_\alpha A_\alpha\right)$ и $q\left(I - m_\beta A_\beta\right)$, полученных в следствии 2, позволяет построить оценку (5) для $q\left(A_{\alpha,\beta}\right)$. Теорема доказана.

Отметим, что в силу того что частные случаи оператора $A_{\alpha,\beta}$ представляют собой главные части уравнений Эйлера и Ваннье-Штарка, оценки коэффициента сюръективности могут быть использованы при формулировке условий разрешимости краевых задач для отмеченных ранее уравнений.

Список литературы

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. – М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002. – 384 с.

2. Muntean I. The spectrum of the Cesaro operator // Matematica. Revue d’analyse numerique et de theory de l’approsimation. – 1980. – № 22 (45). – P. 97–105.

3. Голубов Б.И. О двоичных аналогах операторов Харди и Литлвуда // Сибирский математический журнал. – 1990. – Т. 40, № 6. – С. 1244–1252.

4. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. – М.: Гл. ред. физ.-мат. лит. изд-ва «Наука», 1978. – 400 с.

5. Абдуллаев А.Р., Плехова Э.В. О спектре оператора Чезаро // Научно-технический вестник Поволжья. – 2011. – № 4. – С. 33–37.

6. Пич А. Операторные идеалы. – М.: Мир, 1982. – 536 с.

References

1. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. Elementy sovremennoi teoreii funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii. Metody i prilozheniia [Elements of the actual theory of the functional differential equations. Methods and applications]. Moscow: Institut komp'iuternykh issledovanii, 2002. 384 p.

2. Muntean I. The spectrum of the Cesaro operator. *Matematica. Revue d'analyse numerique et de theory de l'approsimation*, 1980, no. 22 (45), pp. 97-105.

3. Golubov B.I. O dvoichnykh analogakh operatorov Khardi i Litlvuda [On the binary analogs of the Hardy and Hardly-Littiewood operators]. *Sibirskii matematicheskii zhurnal*, 1990, vol. 40, no. 6, pp. 1244-1252.

4. Krein S.G., Petunin Iu.I., Semenov E.M. Interpoliatsiia lineinykh operatorov [Interpolation of linear operators]. Moscow: Nauka, 1978. 400 p.

5. Abdullaev A.R., Plekhova E.V. Abdullaev A.R. O spektre operatora Chezaro [On a spectrum of Cesaro operator]. *Nauchno-tekhnicheskii vestnik Povolzh'ia*, 2011, no. 4, pp. 33-37.

6. Pich A. Operatornye idealy [Operator ideals]. Moscow: Mir, 1982. 536 p.

Получено 17.11.2015

Об авторе

Плехова Эльвира Валентиновна (Пермь, Россия) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика» Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: elvira. plekhova@mail.ru).

About the author

Elvira V. Plekhova (Perm, Russian Federation) – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of High Mathematics, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: elvira.plekhova@mail.ru).