УДК 517.929

И.М. Плаксина

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОЦЕНКИ НОРМ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рассматривается метод, позволяющий получить эффективные условия разрешимости для класса дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений, сингулярных по независимой переменной. Предлагаемый метод основан на применении теста Шура к интегральным операторам, являющимся обобщением оператора Чезаро. Также получены оценки норм некоторых обобщений оператора Чезаро.

Ключевые слова: оператор Чезаро, сингулярные уравнения, функционально-дифференциальные уравнения.

I.M. Plaksina

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

ON A METHOD OF SINGULAR INTEGRAL OPERATORS NORMS ESTIMATING

The paper discusses a method which permits obtain effective conditions of the solvability for one class of singular at the independent variable differential and functional differential equations. The proposed method is based on the application of the Shur test to the integral operators which are generalizations of Cesaro operator. Also the generalizations of Cesaro operator norms estimates are obtained.

Keywords: Cesaro operator, singular equations, functional differential equations.

Введение

При исследовании процессов, протекающих в ядре атома гелия [1], и других, перечисленных, например, в работе [2], возникают дифференциальные уравнения, сингулярные по независимой переменной.

При исследовании условий разрешимости дифференциальных уравнений актуальным является вопрос об оценке нормы некоторых вспомогательных интегральных операторов [3]. Для уравнений, сингулярных по независимой переменной в точке $t = 0$, в качестве интегральных операторов часто рассматривается оператор Чезаро и его обобщения.

Основные свойства оператора Чезаро рассмотрены в работе [3, с. 177]. Спектральные свойства оператора Чезаро, перечисленные в обзорной статье [4], приведены в работе [5]. Среди работ, в которых оператор Чезаро применялся при исследовании условий разрешимости дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений, отметим статьи [5–11].

При оценке или вычислении нормы сингулярных интегральных операторов, таких как оператор Чезаро, непосредственное применение классических методов оказывается затруднительным. Поэтому разработана специальная методика – так называемый «M_{ε}-метод» оценки нормы оператора Чезаро [4].

Предлагаемая работа посвящена другому методу получения оценок нормы интегрального оператора – методу Шура. Он существенно проще метода, применяемого в работе [4] для получения оценок нормы оператора Чезаро. С помощью предлагаемого метода будут построены оценки нормы некоторых обобщений оператора Чезаро. При этом полученные оценки являются точными и совпадают со значениями спектральных радиусов соответствующих операторов.

1. Тест Шура

Пусть L^p – пространство суммируемых со степенью p, $1< p<\infty$, вещественных скалярных функций, определенных на положительной полупрямой $[0,\infty)$, $q = \dfrac{p}{p-1}$ – сопряженный к p индекс.

Предлагаемый метод основан на утверждении, известном для случая $p = 2$ как тест Шура [12, с. 33], применимый в следующей формулировке:

Пусть существуют измеримые функции u, v, *строго положительные на измеримых множествах T и S соответственно.*

Далее пусть существуют положительные числа α, β, *такие что почти для всех* $t \in T$, $s \in S$ *выполняются неравенства*

$$\left[\int_S K(t,s)v(s)ds\right]^{p-1} \le \alpha u(t), \tag{1}$$

$$\int_T K(t,s)u(t)dt \le \beta\left[v(s)\right]^{p-1} \tag{2}$$

соответственно.

Тогда оператор $K{:}L^p(S)\to L^p(T)$, *определяемый равенством* $(Kz)(t)=\int_S K(t,s)z(s)ds$, *ограничен и* $\|K\|^p_{L^p(S)\to L^p(T)} \le \alpha\beta.$

Здесь функция $K(t,s)$ измерима на множестве $T\times S$, неотрицательна при почти всех $(t,s)\in T\times S$ и $K(t,\cdot)z(\cdot)\in L^1(S)$ при почти всех $t\in T$.

Для удобства чтения приведем доказательство, повторяющее схему доказательства теоремы 5.2 из книги [12, с. 33].

Доказательство.

Оценим сверху норму оператора K на произвольном элементе $z\in L^p(S)$:

$$\|Kz\|^p_{L^p(T)} = \int_T\left[\int_S K(t,s)z(s)ds\right]^p dt =$$

$$=\int_T\left[\int_S\left[K(t,s)\right]^{1/q}\left[v(s)\right]^{1/q}\cdot\left[K(t,s)\right]^{1/p}\left[v(s)\right]^{-1/q}z(s)ds\right]^p dt.$$

Применим неравенство Гельдера:

$$\|Kz\|^p_{L^p(T)} \le \int_T\left(\int_S K(t,s)v(s)ds\right)^{p/q}\cdot\left(\int_S K(t,s)\left[v(s)\right]^{-p/q}\left[z(s)\right]^p ds\right)dt.$$

Воспользуемся тем, что $\dfrac{p}{q}=p-1$:

$$\|Kz\|^p_{L^p(T)} \le \int_T\left(\int_S K(t,s)v(s)ds\right)^{p-1}\cdot\left(\int_S K(t,s)\left[v(s)\right]^{-p+1}\left[z(s)\right]^p ds\right)dt \le$$

$$\le \alpha u(t)\int_T\cdot\left(\int_S K(t,s)\left[v(s)\right]^{-p+1}\left[z(s)\right]^p ds\right)dt.$$

Воспользуемся теоремой Тонелли [12, с. 65], позволяющей изменить порядок интегрирования:

$$\|Kz\|^p_{L^p(T)} \le \alpha \int_S \int_T K(t,s)u(t)dt \cdot [v(s)]^{-p+1} [z(s)]^p \, ds \le$$
$$\le \alpha \int_S \beta [v(s)]^{p-1} \cdot [v(s)]^{-p+1} [z(s)]^p \, ds = \alpha\beta \|z\|^p_{L^p(S)}.$$

Поэтому $\|K\|^p_{L^p(S)\to L^p(T)} \le \alpha\beta.$

2. Оценки норм некоторых сингулярных интегральных операторов

Тест Шура порождает полуэффективный метод оценки нормы интегрального оператора, так как не содержит алгоритм нахождения функций u и v. Искусство применения теста Шура состоит в удачном выборе таких функций. В приведенных ниже примерах удалось получить точную оценку, которая совпадает с нормой оператора.

Определим на пространстве L^p оператор A_0 равенством $(A_0 z)(t)=\frac{1}{t}\int_0^t z(s)ds$. Оператор A_0 называется оператором Чезаро (оператором Харди), применяется при изучении условий разрешимости задачи Коши для дифференциальных или функционально-дифференциальных уравнений, левая часть которых содержит оператор δ или оператор δ_0, определенные равенствами $(\delta x)(t) = x^{(n)}(t) + \frac{k}{t} x^{(n-1)}(t)$ и $(\delta_0 x)(t) = \dot{x}(t) + \frac{k}{t} x(t)$ соответственно.

Рассмотрим также на пространстве L^p следующие обобщения оператора Чезаро:

1. Оператор A_1, определяемый равенством $(A_1 z)(t)=\frac{1}{t}\int_0^{\rho t} z(s)ds,$ $\rho > 0$. Оператор A_1 применяется при изучении условий разрешимости задачи Коши для уравнений, содержащих оператор δ_1, определяемый равенством $(\delta_1 x)(t) = \dot{x}(t) + \frac{k}{t} x(\rho t).$

2. Оператор A_2, определяемый равенством $(A_2z)(t)=\frac{1}{t^{\gamma+1}}\int\limits_0^t s^{\gamma}z(s)ds$, $\gamma>-\frac{1}{q}$. Оператор A_2 применяется при изучении условий разрешимости задачи Коши для уравнений, содержащих оператор δ_2, определяемый равенством $(\delta_2 x)(t)=\frac{1}{t^{\gamma}}\frac{d}{dt}\left(t^{\gamma+1}x(t)\right)$, и при изучении условий разрешимости в весовых пространствах уравнений, содержащих оператор δ_0.

3. Оператор A_3, определяемый равенством $(A_3z)(t)=\frac{1}{t^{\gamma+1}}\int\limits_0^{\rho t} s^{\gamma}z(s)ds$, $\gamma>-\frac{1}{q}$, $\rho>0$, являющийся обобщением оператора A_2.

4. Оператор A_4, определяемый равенством $(A_4z)(t)=$ $=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{t^n}s^{\gamma}z(s)ds$. Оператор A_4 применяется при изучении условий разрешимости задачи Коши для уравнений, содержащих оператор δ_4, определяемый равенством $(\delta_4 x)(t)=x^{(n)}(t)+\frac{k}{t^n}x(t)$.

Определим константы a_i, $i=\overline{0,4}$, соответственно равенствами $a_0=q$, $a_1=q\rho^{\frac{1}{q}}$, $a_2=\frac{q}{\gamma q+1}$, $a_3=\frac{q}{\gamma q+1}\rho^{\frac{\gamma q+1}{q}}$, $a_4=\sum\limits_{m=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-m-1}}{m!(n-m-1)!}\frac{q}{q(n-m-1)+1}$.

Теорема. Операторы A_i являются ограниченными в пространстве L^p, причем $\|A_i\|_{L^p\to L^p}\le a_i$, $i=\overline{0,4}$.

Доказательство для случая $i=0$ приведено, например, в статье [4] и называется неравенством Харди.

В случае $i=\overline{1,3}$ доказательство состоит в применении теста Шура с выбором функций $u(t)=t^{-1/q}$, $v(s)=s^{-1/p}$.

В случае $i=4$ доказательство следует из представления $\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{t^n}z(s)ds=\sum\limits_{m=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-m-1}}{m!(n-m-1)!}\frac{1}{t^{n-m}}\int\limits_0^t s^{n-m-1}z(s)ds$ и применения теста Шура к оператору A_2.

Отметим, что оценки нормы операторов A_i при $i=\overline{0,4}$ являются точными значениями норм и совпадают со значениями спектральных радиусов соответствующих операторов.

Оценка нормы оператора A_4 при $p=2,\ n=2$ совпадает с оценкой нормы, приведенной в работе [11].

Список литературы

1. Куфнер А., Фучик С. Нелинейные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1988. – 304 с.

2. Кигурадзе И.Т., Шехтер Б.Д., Сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики: Новые достижения. – 1987. – № 30. – С. 105–201.

3. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002. – 384 с.

4. Muntean I. The spectrum of the Cesaro operator // Mathematica. Revue d'analyse numerique et de theorie de l'approximation. – 1980. – Vol. 22 (45), № 1. – P. 97–105.

5. Плаксина И.М. Об одной модельной сингулярной задаче // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2010. – № 1 (1). – С. 19–23.

6. Абдуллаев А.Р. О разрешимости задачи Коши для сингулярного уравнения второго порядка в критическом случае // Труды института прикладной математики им. И.Н. Векуа. – 1990. – № 37. – С. 5–12.

7. Абдуллаев А.Р., Плехова Э.В. О спектре оператора Чезаро // Научно-технический вестник Поволжья. – 2011. – № 4. – С. 33–37.

8. Азбелев Н.В., Алвеш М.Ж., Бравый Е.И. О сингулярной краевой задаче для линейного дифференциального уравнения второго порядка // Известия вузов. Математика. – 1999. – № 2. – С. 3–11.

9. Кунгурцева А.В. Об одном классе краевых задач для сингулярных уравнений // Известия вузов. Математика. – 1995. – № 12. – С. 30–36.

10. Плаксина И.М. Об одном сингулярном линейном функционально-дифференциальном уравнении // Известия вузов. Математика. – 2012. – № 2. – С. 92–96.

11. Плехова Э.В. Разрешимость задачи Коши для сингулярного дифференциального уравнения // Вестник Пермского государственного технического университета. Прикладная математика и механика. – 2011. – № 9. – С. 177–182.

12. Халмош П., Сандер В. Ограниченные интегральные операторы в пространствах L2. – М.: Наука, 1985. – 159 с.

13. Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов. – М.: Мир, 1983. – 432 с.

References

1. Kufner A., Fuchik S. Nelineinye differentsial'nye uravneniia [Nonlinear differential equations]. Moscow: Nauka, 1988. 304 p.

2. Kiguradze I.T., Shehter B.D. Singuliarnye kraevye zadachi dlia obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii [Singular boundary-value problems for ordinary differential equations]. *Itogi nauki i tekhniki. Seriia "Sovremennye problemy matematiki: Novye dostizheniia"*, 1987, no. 30, pp. 105-201.

3. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. Elementy sovremennoi teorii funktsional‘no-differentsial'nykh uravnenii [Elements of the Contemporary Theory of Functional Differential Equations. Methods and Applications]. Moscow: Institut kompiuternykh issledovanii, 2002. 384 p.

4. Muntean I. The spectrum of the Cesaro operator. *Mathematica. Revue d'analyse numerique et de theorie de l'approximation*, 1980, vol. 22 (45), no. 1, pp. 97-105.

5. Plaksina I.M. Ob odnoi model'noi singuliarnoi zadache [On one model singular boundary-value problem]. *Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2010, no. 1 (1), pp. 19-23.

6. Abdullaev A.R. O razreshimosti zadachi Koshi dlia singuliarnogo uravneniia vtorogo poriadka v kriticheskom sluchae [About solvability of Cauchy problem for second order singular equation in critical case]. *Trudy Instituta prikladnoi matematiki imeni I.N. Vekua*, 1990, no. 37, pp. 5-12.

7. Abdullaev A.R., Plekhova E.V. O spektre operatora Chezaro [About spectrum of Cesaro operator]. *Nauchno-tekhnicheskii vestnik Povolzhia*, 2011, no. 4, pp. 33-37.

8. Azbelev N.V., Alvesh M.Zh., Bravyi E.I. O singuliarnoi kraevoi zadache dlia lineinogo differentsial‘nogo uravneniia vtorogo poriadka [On singular boundary-value problem for second order linear differential equation]. *Izvestiia vuzov. Matematika*, 1999, no. 2, pp. 3-11.

9. Kungurtseva A.V. Ob odnom klasse kraevyh zadach dlia singuliarnykh uravnenii [On one class of boundary-value problems for singular equations]. *Izvestiia vuzov. Matematika*, 1995, no. 12, pp. 30-36.

10. Plaksina I.M. Ob odnom singuliarnom lineinom funktsional′no-differentsial′nom uravnenii [On one singular linear functional-differential equation]. *Izvestiia vuzov. Matematika*, 2012, no. 2, pp. 92-96.

11. Plekhova E.V. Razreshimost′ zadachi Koshi dlia singuliarnogo differentsial′nogo uravneniia [Solvability of Cauchy problem for singular differential equation]. *Vestnik Permskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Prikladnaia matematika i mekhanika*, 2011, no. 9, pp. 177-182.

12. Halmosh P., Sander V. Ogranichennye integral’nye operatory v prostranstvakh L2 [Bounded integral operators at the spaces L2]. Moscow: Nauka, 1985. 159 p.

13. Hatson V., Pim Dzh. Prilozheniia funktsional′nogo analiza i teorii operatorov [Applications of functional analysis and operators theory]. Moscow: Mir, 1983. 432 p.

Получен 18.11.2015

Об авторе

Плаксина Ирина Михайловна (Пермь, Россия) – старший преподаватель кафедры «Автоматизация технологических процессов» Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: impl@list.pstu.ru).

About the author

Irina M. Plaksina (Perm, Russian Federation) – Senior Lecturer, Department of Automation of Technological Processes, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: impl@list.pstu.ru).