

УДК 531/534: [57 + 61]

Е.В. Ивонина

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ КАРО В ТРУБКЕ С СУЖАЮЩИМИСЯ СТЕНКАМИ

Рассматривается течение патологической желчи как жидкости Каро в ампуле фатерова сопочка, моделируемого в виде трубки с сужающимися стенками. Найдены аналитические решения для продольной скорости и расхода в зависимости от перепада давления. Получены значения перепада давления, соответствующие условиям возникновения рефлюкса (обратного тока жидкости).

Ключевые слова: билиарная система, холедох, перистальтика, рефлюкс, градиент давления, жидкость Каро, неньютоновская жидкость.

E.V. Ivonina

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

FLOW OF THE CARREAU'S FLUID IN THE TUBE WITH NARROWING WALLS

The pathological bile flow as the Carreau's fluid in the major duodenal papilla duct as the tube with narrowing walls is considered. The analytical solutions for axial velocity and flow rate depending on pressure drop are obtained. The values of pressures corresponding to the reflux (opposite flow to normal) occurring conditions are computed.

Keywords: biliary system, common bile duct, peristaltic, reflux, pressure gradient, Carreau's fluid, non-Newtonian fluid.

Введение

Перистальтика (от греч. *peristaltikós* – обхватывающий и сжимающий) – это волнообразное сокращение стенок полых органов (пищевода, желудка, кишечника, мочеточников и т.д.), способствующее продвижению их содержимого. В последнее время перистальтика привлекает большое внимание исследователей из-за важных физиологических процессов, таких как движение химуса в кишечнике, перемещение яйцеклетки в маточной трубе, транспорт сперматозоидов, транспорт желчи в желчных протоках, циркуляция крови в мелких кровеносных сосудах.

Первые теоретические и экспериментальные исследования перистальтики были проведены Летхэмом в 1966 г. [1].

В дальнейшем появилось множество работ по перистальтике химических растворов, суспензии, а также био-жидкостей (кровь, моча, желчь и т.д.).

В работе [2] было изучено течение крови в мелких капиллярах и кровеносных сосудах как течение двухслойной жидкости с центральным слоем, моделируемым жидкостью Кассона, и периферийным слоем как ньютоновской жидкости в трубке с переменным сечением при нулевом числе Рейнольдса и длинноволновой аппроксимации. В дальнейшем исследуемая модель была усложнена при рассмотрении пульсирующего течения крови в сосуде со стенозом [3]. Были получены зависимости безразмерного гидравлического сопротивления от размера стеноза при различных значениях гематокрита для моделей с течением одной и двух жидкостей. Похожая модель, но с учетом периодического ускорения тела, рассмотрена в работе [4].

В работе [5] было изучено течение мочи в мочеточнике для исследования рефлюкса и эффекта запираания. Было показано, что рефлюкс возникает в верхних мочевых путях, при частичном перекрытии волной.

Статья [6] посвящена рассмотрению перистальтики неньютоновской жидкости в расширяющейся трубке (степенная и жидкость Бингама) при различных волновых формах: синусоидальная, треугольная, трапециевидная и квадратная волны. В статье обсуждается влияние типа жидкости (степенная жидкость и жидкость Бингама) на результаты расчетов, а также рассматривается зависимость амплитуды и формы перистальтических волн. Исследованы условия возникновения рефлюкса при различных волновых формах и продемонстрировано, что рефлюкс имеет сильную зависимость от показателя степенной жидкости (n), градиента давления и формы перистальтической волны.

Непосредственно исследованию перистальтики течения желчи в общем желчном протоке как несжимаемой ньютоновской био-жидкости посвящена работа [7]. Несмотря на то что известно, что патологическая желчь – неньютоновская жидкость [8], авторы статьи рассмотрели течение ньютоновской жидкости в пористом канале, чтобы учесть влияние наличия/отсутствия камней на холединамику. Авторы рассматривают течение жидкости в продольном и поперечном направлениях. Было теоретически найдено условие рефлюкса, которое непосредственно связано с критическим значением градиента давления. Построены

зависимости профиля скорости, градиентов давления при различных значениях числа Рейнольдса, пористости, коэффициента Дарси и амплитуды. Часть результатов сравнивалось с результатами работы [9].

Область биомеханики течения желчи в билиарной системе в последнее время привлекает большой интерес исследователей [10–15]. Патологическое течение желчи вызывает нежелательные напряжения в системе и окружающих тканях, следует отметить, что неблагоприятные поля напряжений могут пагубно отражаться на функционировании организма человека [16–18].

Большинство работ связано с применением методов вычислительной гидродинамики [19–22], в частности, алгоритма взаимодействия жидкость – твердое тело для учета влияния стенок протоков на характер течения [23–25].

В статье [19] показано, что патологическая желчь является тиксотропной неньютоновской жидкостью, и найдены параметры модели Каро.

В данной работе рассматривается течение патологической желчи как жидкости Каро в протоке с сужающимися стенками.

Статья состоит из следующих разделов. В разделе 1 содержатся некоторые аспекты анатомии и физиологии течения желчи в билиарной системе и ее элементах. Рассмотрена проблема холедохопанкреатического рефлюкса и указана его связь с возникновением патологий поджелудочной железы. В разделе 2 приведена математическая постановка и решение задачи. Найдены аналитические решения для продольной скорости и расхода в зависимости от перепада давления. В разделе 3 представлены результаты решения: зависимости градиента давления от расхода, времени и безразмерной амплитуды для синусоидальной волны, а также представлены профили скоростей при различных значениях градиента давлений. Найдены значения градиента давлений, соответствующие условиям возникновения рефлюкса в ампуле Фатерова сосочка как трубки с сужающимися стенками.

1. Анатомия и физиология течения желчи в ампуле Фатерова сосочка

Желчевыделительная система (билиарная система) предназначена для выведения в двенадцатиперстную кишку секрета печени – желчи, содержащей множество продуктов метаболизма, которые предназначены для выделения во внешнюю среду.

Билиарная система включает в себя желчный пузырь, желчный тракт (пузырный проток, печеночные протоки и общий желчный проток [холедох]), а также систему сфинктеров (рис. 1) [26].

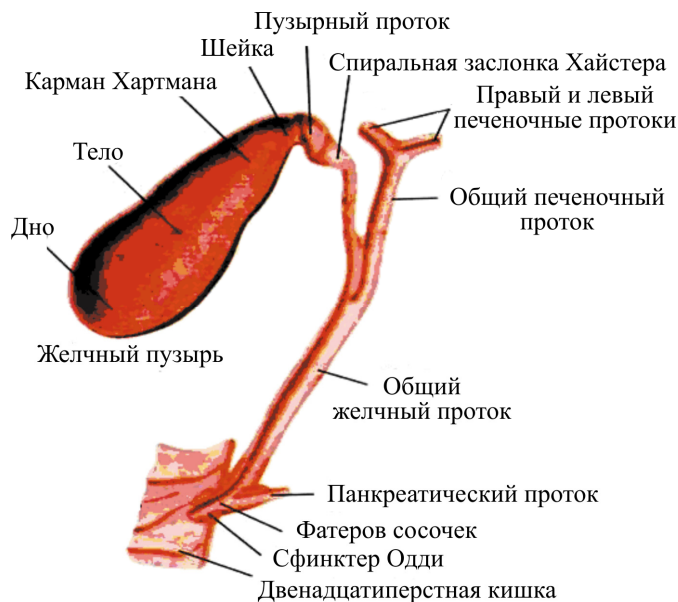


Рис. 1. Билиарная система

Правый и левый печеночные протоки выходят из печени и соединяются в воротах, образуя общий печеночный проток. Пузырный проток служит продолжением шейки желчного пузыря. Общий желчный проток образуется путем слияния общего печеночного и пузырного протоков [27].

Дистальный сегмент общего желчного протока входит в поджелудочную железу. Общий желчный проток открывается в двенадцатиперстную кишку в области фатерова сосочка, отверстие которого окружено сфинктером [28].

Известно несколько вариантов соединения общего желчного протока с протоком поджелудочной железы в области фатерова сосочка (рис. 2).

Сфинктер регулирует поступление желчи в кишечник и препятствует забрасыванию дуоденального содержимого в желчные протоки. В зоне сфинктера наблюдаются два типа моторной активности: базальное давление и фазовая, периодическая сократительная активность. Базальное давление отвечает за регуляцию оттока секрета из желчных и панкреатических протоков [29].

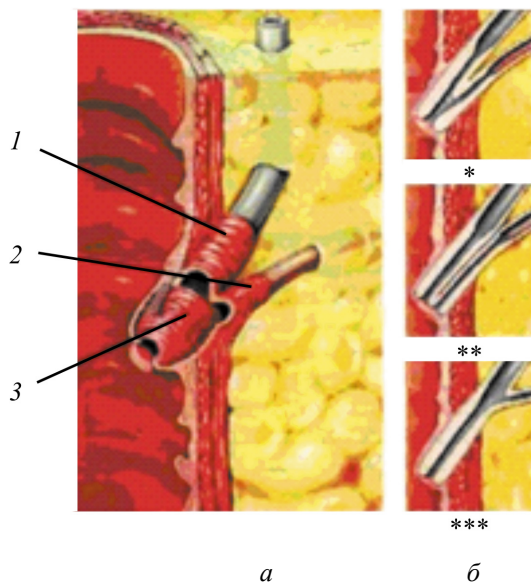


Рис. 2. Анатомические элементы сфинктера Одди:
a – общая анатомия (*1* – сфинктер общего желчного протока, *2* – сфинктер панкреатического протока, *3* – сфинктер ампулы фатерова сосочка); *б* – варианты строения ампулы сосочка
(* – бифуркация в ампуле фатерова сосочка,
** – параллельное расположение протоков,
*** – бифуркация перед ампулой)

При нарушении сократительной способности сфинктера Одди, например вследствие изменения базального давления, может нарушаться регуляция оттока желчи и панкреатического сока из протоков, проявляющиеся в возникновении холедохопанкреатических рефлюксов (т.е. патологических забросов желчи в поджелудочную железу, а не в двенадцатиперстную кишку). Именно холедохопанкреатический рефлюкс является причиной патогенеза и развития хронического панкреатита (воспаление поджелудочной железы) [30].

Параметры модели: $b_0 = 3$ мм, $L = 5$ мм, $k = 0,5$.

Изучение и моделирование условий возникновения рефлюксов жидкостей в каналах с различной геометрией для помощи врачам при лечении данных патологий является серьезной задачей биомеханики био-жидкостей [31]. В данной статье рассматривается течение желчи как жидкости Каро в ампуле фатерова сосочка, моделируемого в виде трубки с сужающимися стенками, с целью определения количест-

венных критериев, характеризующих такое патологическое состояние, как холедохопанкреатический рефлюкс.

2. Математическая формулировка проблемы

Рассматривается перистальтическое движение желчи как неньютоновской жидкости в ампуле фатерова соска, представляющей собой трубку длиной L с расходящимися стенками. Длина волны сопоставима с длиной канала ($L \approx \lambda$), поэтому волновое число ($2\pi a/\lambda$) очень маленькое, число Рейнольдса также мало. Рассматривается синусоидальная форма волны, бегущей по стенкам. Геометрия стенок может быть описана как

$$H'(x', t') = b_0 - kx' + g \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x' - ct') \right], \quad (1)$$

где b_0 – радиус трубы на входе; k – коэффициент наклона стенок; c – скорость волны; x' – продольная координата; g – амплитуда перистальтической волны. Схематично геометрия задачи представлена на рис. 3.

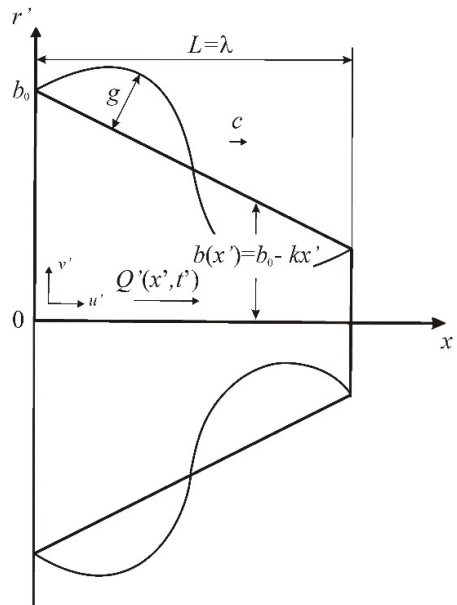


Рис. 3. Схема геометрии течения в осесимметричной трубе с переменным поперечным сечением (проток фатерова сосочка)

Уравнение Навье–Стокса для течения жидкости имеет вид

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) = -\nabla p + \bar{\nabla} \cdot \vec{\tau}, \quad (2)$$

где ρ – плотность жидкости; \vec{V} – вектор скорости; p – давление; $\vec{\tau}$ – тензор касательных напряжений. Учитываем течение в продольном и поперечном направлениях со скоростями u' и v' соответственно.

В проекциях на оси r' и x' в цилиндрической системе координат уравнение (2) может быть записано как

$$\rho \left(\frac{\partial u'}{\partial t} + v' \frac{\partial u'}{\partial r'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} (r' \tau_{r',x'}) + \frac{\partial \tau_{x',x'}}{\partial x'}, \quad (3)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v'}{\partial t} + v' \frac{\partial v'}{\partial r'} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial r'} + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} (r' \tau_{r',r'}) + \frac{\partial \tau_{r',x'}}{\partial x'}, \quad (4)$$

где p' , x' , r' – давление, осевая и радиальная координаты соответственно, а $\tau_{r',x'} = \mu \dot{\gamma}$ – напряжение сдвига вдоль направления x' по нормали к r' , $\dot{\gamma} = \frac{\partial u'}{\partial r'}$ – скорость сдвига.

В данной работе рассматривается перистальтическое движение неньютоновской жидкости, описываемое уравнением Каро [25]:

$$\mu = \mu_{\infty} + (\mu_0 - \mu_{\infty}) (1 + (a^2 \cdot \dot{\gamma}^2))^{\frac{m-1}{2}}, \quad (5)$$

где μ_0 – вязкость при нулевом сдвиге; μ_{∞} – вязкость при бесконечной скорости сдвига; a и m – константы.

Запишем переменные в безразмерной форме:

$$\begin{aligned} r &= \frac{r'}{b_0}, & u &= \frac{u'}{c}, & v &= \frac{\lambda v'}{c b_0}, & x &= \frac{x'}{c}, & t &= \frac{c t'}{\lambda}, \\ p &= \frac{p'}{\rho c^2}, & \tau_{rx} &= \frac{\lambda \tau_{r',x'}}{\rho c^2 b_0}, & h &= \frac{H'}{b_0}, & \varphi &= \frac{g}{b_0}. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрев перистальтическое течение в подвижной системе отсчета и отбросив инерциальные слагаемые, запишем уравнения (3) и (4) в виде

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau), \quad (7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0. \quad (8)$$

Подставив (5) в (7), получим:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left[\mu_{\infty} \dot{\gamma} + (\mu_0 - \mu_{\infty}) (1 + (a^2 \cdot \dot{\gamma}^2))^{\frac{m-1}{2}} \dot{\gamma} \right] \right). \quad (9)$$

Разложим $1 + (a^2 \cdot \dot{\gamma}^2)^{\frac{m-1}{2}}$ в ряд Маклорена:

$$\begin{aligned} 1 + (a^2 \cdot \dot{\gamma}^2)^{\frac{m-1}{2}} &= 1 + \frac{m-1}{2} (a \cdot \dot{\gamma})^2 + \frac{\left(\frac{m-1}{2}\right)\left(\frac{m-3}{2}\right)}{2!} (a \cdot \dot{\gamma})^4 + \dots \\ &+ \frac{\left(\frac{m-1}{2}\right) \dots \left(\frac{m-1}{2} - n + 1\right)}{n!} (a \cdot \dot{\gamma})^{2n}. \end{aligned} \quad (10)$$

Рассмотрим первые три члена ряда и подставим (10) в (9). Тогда

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_0 r \dot{\gamma} + (\mu_0 - \mu_{\infty}) r \frac{m-1}{2} a^2 \cdot \dot{\gamma}^3 \left[1 + \left(\frac{\sqrt{m-3}}{2} a \cdot \dot{\gamma} \right)^2 \right] \right). \quad (11)$$

Для упрощения отбросим слагаемое порядка $\dot{\gamma}^5$. Тогда окончательная постановка задачи будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r [\mu_0 \dot{\gamma} + s \dot{\gamma}^3]), \\ \frac{\partial u}{\partial r} &= 0 \text{ при } r = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$u = 0 \text{ при } r = h = 1 - \frac{\lambda k x}{b_0} + \varphi \sin(2\pi(x-t)),$$

где $s = \frac{m-1}{2} (\mu_0 - \mu_{\infty}) a^2$.

Поскольку s мало, найдем решение уравнения u^* в виде

$$u^* = u_0 + su_1, \quad (13)$$

где u_0 – решение частного уравнения при $s = 0$, su_1 – «добавка», учитывающая нелинейный характер дифференциального уравнения.

Тогда полное решение имеет вид

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{(r^2 - h^2)}{4\mu_0} \frac{\partial p}{\partial x} + s \left[\frac{(r^4 - h^4)}{32(\mu_0)^4} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^3 \right] = \\ &= \frac{(r^2 - h^2)}{4\mu_0} \frac{\partial p}{\partial x} \left(1 + s \left[\frac{(r^4 - h^4)}{8(\mu_0)^3} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \right] \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Расход жидкости через трубу записывается в виде

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^h 2\pi u^* r \, dr = \\ &= 2\pi \frac{\partial p}{\partial x} r^2 \left(\frac{1}{192(\mu_0)^4} \left(12 r^2 \mu_0^3 - 24 h^2 \mu_0^3 + \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 [(r^4 - 3h^4)] \right) \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Градиент давления ΔP_L вдоль длины L в безразмерной форме может быть найден в виде

$$\Delta P_L = \int_0^{L/\lambda} \left(\frac{dp}{dx} \right) dx. \quad (16)$$

Выразим $\frac{dp}{dx}$ из (15). Поскольку уравнение (15) является кубическим относительно $\frac{dp}{dx}$, рассмотрим его как

$$a_1 \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + b_1 \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^3 - c_1 \cdot Q = 0, \quad (17)$$

где $a_1 = \frac{(r^2 - 2h^2)}{16(\mu_0)}$, $b_1 = \frac{(r^4 - 3h^4)}{192(\mu_0)^4}$, $c_1 = \frac{1}{2\pi r^2}$. Поскольку при $r \neq \sqrt[4]{3}h$

уравнение (17) имеет три корня, но только один из них является действительным, решение (17) имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}\sqrt{4a_1^3b_1^3 + 27b_1^4c_1^2Q^2 + 9b_1^2c_1Q}}}{\sqrt[3]{18}b_1} - \frac{\sqrt[3]{\frac{2}{3}}a_1}{\sqrt[3]{\sqrt{3}\sqrt{4a_1^3b_1^3 + 27b_1^4c_1^2Q^2 + 9b_1^2c_1Q}}}, & \text{при } r \neq \sqrt[4]{3}h, \\ \frac{c_1Q}{a_1}, & \text{при } r = \sqrt[4]{3}h. \end{cases} \quad (18)$$

Расходы в подвижной системе отсчета $Q(x, t)$ и в волновом базисе $q(t)$ связаны выражением

$$\frac{Q(x, t)}{\pi} = \frac{q(t)}{\pi} + h^2. \quad (19)$$

Средний расход $\bar{Q}(x, t)$ в безразмерном виде находится как

$$\frac{\bar{Q}(x, t)}{\pi} = \frac{\bar{q}(t)}{\pi} + \frac{1}{T} \int_0^T h^2 dt. \quad (20)$$

Подставив (20) в (19) и учитывая, что $h = 1 - \frac{\lambda kx}{b_0} + \varphi \sin(2\pi(x-t))$, получим

$$\frac{Q(x, t)}{\pi} = \frac{\bar{Q}}{\pi} + 2\varphi \left(1 - \frac{\lambda kx}{b_0}\right) \sin(2\pi(x-t)) + \varphi^2 \sin^2(2\pi(x-t)). \quad (21)$$

3. Результаты и обсуждение

На рис. 4–7 представлены результаты расчетов для патологической желчи как жидкости Каро, параметры которой взяты из работы [19]. На рис. 4 представлены зависимости безразмерного среднего расхода жидкости от перепада давления при различных значениях φ . Следует отметить, что согласно работам [32, 33] физиологическим течениям соответствует диапазон φ от 0,5 до 0,8. Из рис. 4 видно, что при увеличении амплитуды волны перепад давления существенно возрастает, особенно когда φ превышает значение 0,7. При малых значениях φ разница между перепадом давления незначительная. Также можно отметить, что при $\bar{Q} = 0$, значение ΔP_L максимально и при дальнейшем увеличении расхода градиент давления снижается.

Более того, можно отметить, что при больших величинах объемный расход жидкости может принимать отрицательные значения, что соответствует возникновению обратного тока жидкости (рефлюкс). Таким обра-

зом, величины, при которых $\bar{Q} = 0$, можно назвать критериями возникновения рефлюкса, т.е. рефлюкс возникает, если $\Delta P_L > \Delta P_{L \text{ крит}}$.

Параметры модели Каро [19] следующие: $a = 0,033$, $\mu_\infty = 4,5$ мПа·с, $\mu_0 = 62,5$ мПа·с, $m = 0,56$.

На рис. 5 показаны профили скоростей в канале при различных значениях ΔP_L . Следует отметить, что профиль течения – параболический. Из рисунка видно, что величина u^* при увеличении значения ΔP_L возрастает.

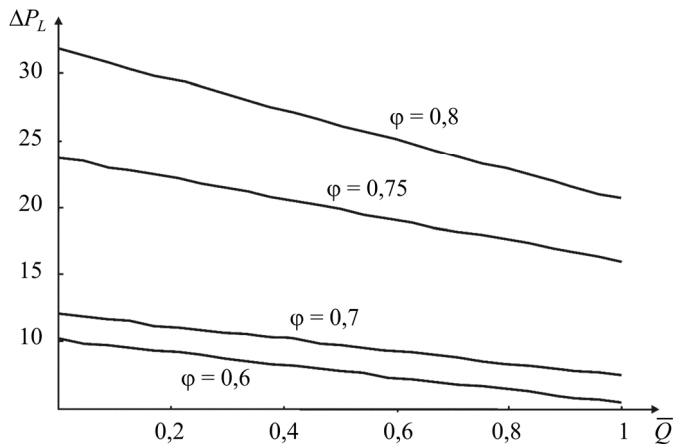


Рис. 4. Зависимость ΔP_L от \bar{Q} для синусоидальной волны

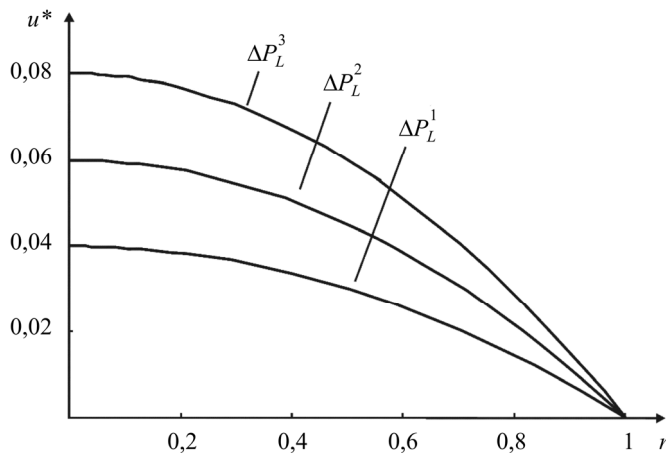


Рис. 5. Профиль скорости при $\phi = 0,5$, $s = 0,49$, $\mu_0 = 62,5$ мПа·с
при $P_L^1 = 10$, $P_L^2 = 15$, $P_L^3 = 20$

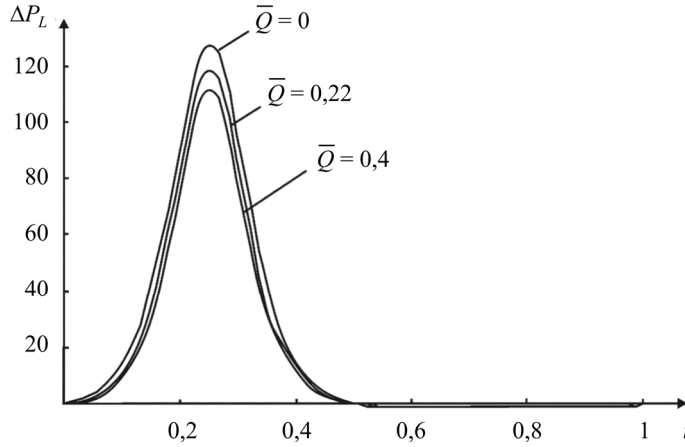


Рис. 6. Зависимость ΔP_L от t для синусоидальной волны ($\varphi = 0,6$)

Зависимость ΔP_L от t для синусоидальной волны при различных значениях \bar{Q} показана на рис. 6. Из графика видно, что перепад давления достигает своего максимального значения при $t = 0,27$. В этот момент времени на входе в трубку возникает схлопывание сосуда, т.е. максимальная окклюзия происходит на входе в трубу, где площадь поперечного сечения является минимальной и, следовательно, ΔP_L получается максимальным. Впоследствии перепад давления убывает к нулю.

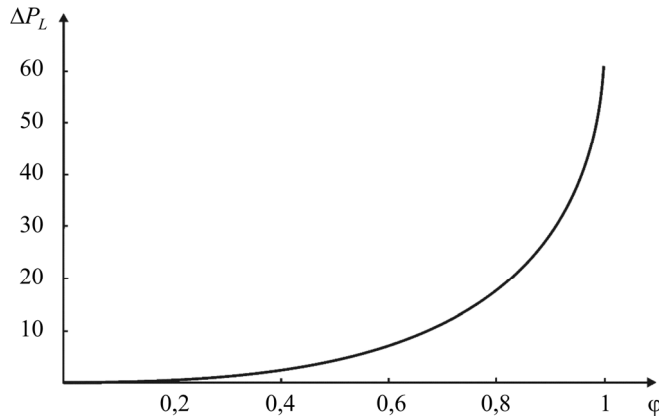


Рис. 7. Зависимость ΔP_L от φ для синусоидальной волны

На рис. 7 представлена зависимость ΔP_L от φ для синусоидальной волны. При повышении значения $\varphi = 0,8$ ΔP_L начинает резко возрастать,

таким образом, данный результат подтверждает, что при физиологических течениях желчи наблюдается небольшой перепад давления, что соответствует выбранному диапазону φ от 0,5 до 0,8.

Выводы

В статье рассмотрено течение патологической желчи как жидкости Каро в ампуле фатерова сосочка, моделируемого в виде трубки с сужающимися стенками. Получены аналитические решения для продольной скорости и расхода в зависимости от перепада давления. Получены значения градиента давления, соответствующие условиям возникновения рефлюкса. При увеличении амплитуды волны перепад давления увеличивается, особенно когда φ превышает 0,7. Более того, было показано, что величину перепада давления, при котором $\bar{Q} = 0$, можно назвать критерием возникновения рефлюкса. Профиль скорости течения в канале имеет параболическую форму, и значение продольной скорости увеличивается с ростом ΔP_L . Найдены зависимости перепада давления от времени и показано, что при увеличении среднего расхода величина ΔP_L уменьшается.

Список литературы

1. Latham T.W. Fluid motion in a peristaltic pump. MS. Thesis / Massachusetts Institute of Technology. – Cambridge, MA, 1966.
2. Srivastava L.M., Srivastava V.P. Peristaltic transport of blood: cassin model-II // Journal of Biomechanics. – 1984. – Vol. 17, no. 11. – P. 821–829.
3. Srivastava V.P. Two-phase model of blood flow through stenosed tubes in the presence of a peripheral layer: applications // J. Biomechanics. – 1996. – Vol. 29, no. 10. – P. 1377–1382.
4. Sankar D.S., Lee U. Nonlinear mathematical analysis for blood flow in a constricted artery under periodic body acceleration // Commun Nonlinear Sci Numer Simulat. – 2011. – Vol. 16. – P. 4390–4402.
5. Jaffrin M.Y., Shapiro A.H. Peristaltic pumping // Annual Review of Fluid Mechanics. – 1971. – Vol. 3. – P. 13–35.
6. Hariharan P., Seshadri V., Banerjee R.K. Peristaltic transport of non-Newtonian fluid in a diverging tube with different wave forms // Mathematical and Computer Modelling. – 2008. – Vol. 48. – P. 998–1017.

7. Maiti S., Misra J.C. Peristaltic flow of a fluid in a porous channel: a study having relevance to flow of bile within ducts in a pathological state // *International Journal of Engineering Science (IJES)*. – Vol. 49, no. 9. – P. 950–966.

8. Bile viscosity in patients with biliary drainage / P.P. Coene, L.O. Coene, A.K. Groen, P.H.P. Davids, M. Hardeman, G.N.T. Tytgat, K. Huibregtse // *Scand. J. Gastroenterol. Suppl.* – 1994. – Vol. 29. – P. 757–763.

9. Fung Y.C, Yih C.S. Peristaltic transport // *J. Appl Mech.* – 1968. – P. 669–675.

10. Agarwal S., Sinha A.K., Singh S.P. A theoretical analysis of the effect of the non-1. Newtonian bile flow characteristics in the diseased cystic duct // *J. of Appl. Math and Mech.* – 2012. – Vol. 8. – P. 92–103.

11. Al-Atabi M.T., Chin S.B., Luo X.Y. Flow structure in circular tubes with segmental baffles // *Journal of Flow Visualization and Image Processing (JFVIP)*. – 2005. – Vol. 12. – P. 301–311.

12. Al-Atabi M.T., Chin S.B., Luo X.Y. Visualization experiment of flow structures inside two-dimensional human biliary system models // *Journal of Mechanics in Medicine and Biology (JMMB)*. – 2006. – Vol. 6. – P. 249–260.

13. Al-Atabi M.T., Chin S.B., Luo X.Y. Cystic duct visual-based evaluation of gallstones formation risk factors // *Journal of Engineering Science and Technology (JESTEC)*. – 2006. – Vol. 1. – P. 1–9.

14. Al-Atabi M.T., Chin S.B., Luo X.Y. Experimental investigation of the flow of bile in patient specific cystic duct models // *ASME Journal of Biomechanical Engineering.* – 2010. – Vol. 132. – P. 247–254.

15. On the mechanical behavior of the human biliary system / X.Y. Luo, W.G. Li, N. Bird, S.B. Chin, N.A. Hill, A.G. Johnson // *World J Gastroenterol.* – 2007. – Vol. 13. – P. 1384–1392.

16. Федоров А.Е., Лохов В.А. О применении теории вязкоупругости в эстетической хирургии // *Российский журнал биомеханики.* – 2003. – Т. 7, № 4. – С. 34–46.

17. Лохов В.А., Кучумов А.Г. Создание заданных усилий в фиксаторах, изготовленных из сплавов с эффектом памяти формы // *Российский журнал биомеханики.* – 2006. – Т. 10, № 3. – С. 41–52.

18. Лохов В.А., Долганова О.Ю., Няшин Ю.И. Биомеханическое моделирование эффекта сближения фрагментов твердого неба при ортопедическом лечении // *Российский журнал биомеханики.* – 2012. – Т. 16, № 1. – С. 38–45.

19. Non-newtonian flow of pathological bile in the biliary system: experimental investigation and CFD simulations / A.G. Kuchumov, V.A. Gilev, V.A. Popov, V.A. Samartsev, V.A. Gavrilov // *Korea Australia Rheology Journal*. – 2014. – Vol. 26, no. 1. – P. 81–90.

20. The flow of bile in the human cystic duct / R.C. Ooi, X.Y. Luo, S.B. Chin, A.G. Johnson, N.C. Bird // *Journal of Biomechanics*. – 2004. – Vol. 37. – P. 1913–1922.

21. Modelling of the pathological bile flow in the duct with a calculus / A.G. Kuchumov, Y.I. Nyashin, V.A. Samarcev, V.A. Gavrilov // *Acta of Bioengineering and Biomechanics*. – 2013. – Vol. 15, no. 4. – P. 9–17.

22. Computational analysis of the flow of bile in human cystic duct / M. Al-Atabi, R.C. Ooi, X.Y. Luo, S.B. Chin, N.C. Bird // *Medical Engineering & Physics*. – 2012. – Vol. 34. – P. 1177–1183.

23. Investigation of the flow in a compliant idealised human cystic duct / M.T. Al-Atabi, S.B. Chin, X.Y. Luo, S.B.M. Beck // *Journal of Biomechanical Science and Engineering*. – 2008. – Vol. 3. – P. 411–418.

24. One-dimensional models of the human biliary system / W.G. Li, X.Y. Luo, A.G. Johnson, N.A. Hill, N. Bird, S.B. Chin // *ASME J Biomech Eng*. – 2007. – Vol. 129. – P. 164–173.

25. Non-Newtonian bile flow in elastic cystic duct – one and three dimensional modeling / W.G. Li, X.Y. Luo, S.B. Chin, N.A. Hill, A.G. Johnson, N.C. Bird // *Annals of Biomedical Engineering*. – 2008. – Vol. 36. – P. 1893–908.

26. Билиарная система. Анатомо-физиологические особенности [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.gastroscan.ru/literature/authors/3073>.

27. Желчный пузырь и внепеченочная билиарная система [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.med.tehlit.ru/kn3/str29.htm>.

28. INFA. WS – Медицинские справочники [Электронный ресурс]. – URL: <http://infa.ws>medicine/sprav/gastro/034.php>.

29. Экспериментальное исследование реологии патологической желчи / А.Г. Кучумов, В.Г. Гилев, В.А. Попов, В.А. Самарцев, В.А. Гаврилов // *Российский журнал биомеханики*. – 2011. – Т. 15, № 3 (53). – С. 52–60.

30. Попов В.А., Кучумов А.Г. Экспериментальное исследование реологии желчи // *Вестник Пермского университета. Серия: Физика*. – 2011. – Вып. № 3 (18). – С. 92–96.

31. Биомеханический подход к моделированию билиарной системы как шаг в направлении к построению виртуальной модели физиологии человека / А.Г. Кучумов, Ю.И. Няшин, В.А. Самарцев, В.А. Гаврилов, М. Менар // Российский журнал биомеханики. – Т. 15, № 2 (52). – С. 32–48.

32. Srivastava L.M., Srivastava V.P. Peristaltic transport of a non-Newtonian fluid // (Application to the vas deferens at small intestine), *Ann.BioMedical Eng.* – 1985. – Vol. 13. – P. 137–153.

33. Seshadri V., Hasan Z., Gupta B. Peristaltic pumping in nonuniform distensible tubes with different wave forms // *J. Biophys Et Med Nucl.* – 1984. – Vol. 8. – P. 9–14.

References

1. Latham T.W. Fluid motion in a peristaltic pump. M.S. Thesis. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 1966.

2. Srivastava L.M, Srivastava V.P. Peristaltic transport of blood: Casson model-II. *Journal of Biomechanics*, 1984, vol. 17, iss. 11, pp. 821-829.

3. Srivastava V.P. Two-phase model of blood flow through stenosed tubes in the presence of a peripheral layer: applications. *Journal of Biomechanics*, 1996, vol. 29, iss. 10, pp. 1377-1382.

4. Sankar D.S, Lee U. Nonlinear mathematical analysis for blood flow in a constricted artery under periodic body acceleration. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, vol. 16, iss. 11, pp. 4390-4402.

5. Jaffrin M.Y, Shapiro A.H. Peristaltic pumping. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1972, vol. 3, pp. 13-36.

6. Hariharan P, Seshadri V, Banerjee R.K. Peristaltic transport of non-Newtonian fluid in a diverging tube with different wave forms. *Mathematical and Computer Modelling*, 2008, vol. 48, iss. 7-8, pp. 998-1017.

7. Maiti S, Misra J.C. Peristaltic flow of a fluid in a porous channel: a study having relevance to flow of bile within ducts in a pathological state. *International Journal of Engineering Science*, 2011, vol. 49, iss. 9, pp. 950-966.

8. Coene P.P, Groen A.K., Davids P.H., Hardeman M., Tytgat G.N., Huibregtse K. Bile viscosity in patients with biliary drainage. Effect of cotrimoxazole and N-acetylcysteine and role in stent clogging. *Scandinavian Journal of Gastroenterology*, 1994, vol. 29, iss. 8, pp. 757-763.

9. Fung Y.C, Yih C.S. Peristaltic transport. *Journal of Applied Mechanics*, 1968, vol. 35, iss. 4, pp. 669-675.

10. Agarwal S., Sinha A.K., Singh S.P. A theoretical analysis of the effect of the non-Newtonian bile flow characteristics in the diseased cystic duct. *International Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, vol. 8, iss.16, pp. 92-103.

11. Al-Atabi M., Chin S.B., Luo X.Y. Flow structure in circular tubes with segmental baffles. *Journal of Flow Visualization and Image Processing*, 2005, vol. 12, iss. 3, pp. 301-311.

12. Al-Atabi M., Chin S.B., Luo X.Y. Visualization experiment of flow structures inside two-dimensional human biliary system models. *Journal of Mechanics in Medicine and Biology*, 2006, iss. 6, pp. 249-260.

13. Al-Atabi M.T., Chin S.B., Luo X.Y. Cystic duct visual-based evaluation of gallstones formation risk factors. *Journal of Engineering Science and Technology*, 2006, vol. 1, iss. 1, pp. 1-9.

14. Al-Atabi M., Chin S.B., Luo X.Y. Experimental investigation of the flow of bile in patient specific cystic duct models. *Journal of Biomechanical Engineering*, 2010, vol. 132, iss. 4, pp. 247-254.

15. Luo X., Li W., Bird N., Chin S.B., Hill N.A., Johnson A.G. On the mechanical behavior of the human biliary system. *World Journal of Gastroenterology*, 2007, vol. 13, iss. 9, pp. 1384-1392.

16. Fedorov A.E., Lokhov V.A. O primeneni teorii viazkouprugosti v estatcheskoi khirurgii [About application of the theory of viscoelasticity in aesthetic surgery]. *Rossiiskii zhurnal biomekhaniki*, 2003, vol. 7, no. 4, pp. 34-46.

17. Lokhov V.A. Kuchumov A.G. Sozdanie zadannykh usilii v fiksatorkh, izgotovlennykh iz splavov s efektom pamiati formy [Creation of desired loads in fixators made from shape memory alloy]. *Rossiiskii zhurnal biomekhaniki*, 2006, vol. 10, no. 3, pp. 41-52.

18. Lokhov V.A., Dolganova O.J., Nyashin Y.I. Biomekhanicheskoe modelirovanie efekta sblizheniia fragmentov tverdogo neba pri ortopedicheskom lechenii [Biomechanical modelling of the hard palate fragments approaching at ortopaedic treatment]. *Rossiiskii zhurnal biomekhaniki*, 2012, vol. 16, no. 1, pp. 38-45.

19. Kuchumov A.G, Gilev V.A., Popov V.A., Samartsev V.A., Gavrilov V.A. Non-newtonian flow of pathological bile in the biliary system: experimental investigation and CFD simulations. *Korea-Australia Rheology Journal*, 2014, vol. 26, no. 1, pp. 81-90.

20. Ooi R.C., Luo X.Y., Chin S.B., Johnson A.G., Bird N.C. The flow of bile in the human cystic duct. *Journal of Biomechanics*, 2004, vol. 37, iss. 12, pp. 1913-1922.

21. Kuchumov A.G., Nyashin Y.I., Samarcev V.A., Gavrilov V.A. Modelling of the pathological bile flow in the duct with a calculus. *Acta of Bioengineering and Biomechanics*, 2013, vol. 15, iss. 4, pp. 9-17.

22. Al-Atabi M., Ooi R.C., Luo X.Y., Chin S.B., Bird N.C. Computational analysis of the flow of bile in human cystic duct. *Medical Engineering & Physics*, 2012, vol. 34, iss. 8, pp. 1177-1183.

23. Al-Atabi M., Chin S.B., Luo X., Beck S. Investigation of the flow in a compliant idealised human cystic duct. *Journal of Biomechanical Science and Engineering*, 2008, vol. 03, no. 3, special iss. pp. 411-418.

24. Li W.G., Luo X.Y., Johnson A.G., Hill N.A., Bird N., Chin S.B. One-dimensional models of the human biliary system. *Journal of Biomechanical Engineering*, 2007, vol. 129, iss. 2, pp. 164-173.

25. Li W.G., Luo X.Y., Chin S.B., Hill N.A., Johnson A.G., Bird N.C. Non-Newtonian bile flow in elastic cystic duct: one- and three-dimensional modeling. *Annals of Biomedical Engineering*, 2008, vol. 36, iss. 11, pp. 1893-908.

26. Biliarnaia sistema. Anatomico-fiziologicheskie osobennosti [Biliary system. Anatomical and physiological characteristics]. Available at: <http://www.gastroscan.ru/literature/authors/3073>.

27. Zhelchnyj puzyr' i vnepechenochnaja biliarnaja sistema [The gallbladder and extrahepatic biliary system]. Available at: <http://www.med.tehlit.ru/kn3/str29.htm>.

28. INFA. WS – Meditsinskie spravochniki [INFA. WS – Medical Reference], available at: <http://infa.ws/medicine/sprav/gastro/034.php>.

29. Kuchumov A.G., Gilev V.G., Popov V.A., Samartsev V.A., Gavrilov V.A. Jeksperimental'noe issledovanie reologii patologicheskoi zhelchi [Experimental investigation of the pathologic bile rheology]. *Rossiiskii zhurnal biomekhaniki*. 2011, vol.15, no. 3, pp. 52-60.

30. Popov V.A., Kuchumov A.G. Eksperimental'noe issledovanie reologii zhelchi [Experimental investigation of the bile rheology]. *Vestnik Permskogo universiteta. Seriya "Fizika"*, 2011, vol. 18, no. 3, pp. 92-96.

31. Kuchumov A.G., Niashin Iu.I., Samartsev V.A., Gavrilov V.A., Mesnard M. Biomechanicheskii podkhod k modelirovaniu biliarnoi sistemy kak shag v napravlenii k postroeniiu virtual'noi modeli fiziologii cheloveka

[Biomechanical approach to biliary system modelling as a step towards “Virtual physiological human” project]. *Rossiiskii zhurnal biomekhaniki*, 2011, vol. 15, no. 2, pp. 32-48.

32. Srivastava L.M., Srivastava V.P. Peristaltic transport of a non-Newtonian fluid: Application to the vas deferens at small intestine. *Annals Biomedical Engineering*, 1985, vol. 13, iss. 2, pp. 137-153.

33. Hasan Z., Gupta B.B., Seshadri V. Peristaltic pumping in nonuniform distensible tubes with different wave forms. *Journal de Biophysique et Medecine Nucleaire*, 1984, vol. 8, iss. 1, pp. 9-14.

Об авторе

Ивонина Елена Вазировна (Пермь, Россия) – студентка Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: ivoninaE.V@mail.ru).

About the author

Elena V. Ivonina (Perm, Russian Federation) – Student, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: ivoninaE.V@mail.ru).