

УДК 531/534: [57 + 61]

А.А. Киченко, В.М. Тверье

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

БИОМЕХАНИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АДАПТАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В ТРАБЕКУЛЯРНОЙ КОСТНОЙ ТКАНИ

Приведены определяющие соотношения, позволяющие описать напряженно-деформированное состояние трабекулярной костной ткани с учетом ее структуры, и эволюционные соотношения, описывающие адаптационные процессы, происходящие в кости. Разработан алгоритм решения и на ряде примеров показана эволюция трабекулярной костной ткани при изменении напряженно-деформированного состояния. Результаты показывают различный характер влияния изменения нагрузки на процесс формирования структуры, не противоречащий закону Ю. Вольфа.

Ключевые слова: трабекулярная (губчатая) костная ткань, закон Вольфа, тензор структуры, определяющее соотношение, кинетические уравнения.

A.A. Kichenko, V.M. Tver'e

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

BIOMECHANICAL MODELING OF ADAPTIVE PROCESSES IN THE TRABECULAR BONE

Defining relations allowing to describe the stress-strain state of the trabecular bone in view of its structure, and evolutionary relationships describing the adaptation processes in the bone are given. An algorithm for solving a number of examples and shows the evolution of the trabecular bone in the change of the stress-strain state is developed. The results show the influence of different types of load change on the formation of structures that do not contradict the Y. Wolff's law.

Keywords: trabecular (spongy) bone, Wolff's law, the tensor structure, defining relation, kinetic equations.

Введение

В процессе онтогенеза организма человека на развитие и функционирование его опорно-двигательной системы оказывают влияние различные, постоянно изменяющиеся нагрузки, которые имеют как физиологическую, так и патологическую природу, а также происходят вследствие врачебного вмешательства. Известно, что подобные изменения нагрузки имеют отдаленные во времени последствия и в первую очередь отражаются на организации структуры костной ткани.

Костная ткань живого человека является динамической структурой, в которой непрерывно происходят различные адаптационные процессы. Трабекулярная костная ткань является неоднородным пористым анизотропным материалом, ее механические свойства в значительной мере определяются ее внутренней архитектурой и подчиняются тем же принципам, что и несущие конструкции.

Определить изменения трабекулярной микроструктуры *in vivo* инструментально зачастую не представляется возможным. Таким образом, возникает необходимость в прогнозировании долговременного отклика структуры на внешнее вмешательство методами математического моделирования, т.е. разработке математической модели перестройки (адаптации) трабекулярной костной ткани с учетом взаимовлияния напряженно-деформированного состояния и структурных изменений.

1. Материалы и методы

Известно, что адаптационные процессы, протекающие в организме человека, подчиняются закону Вольфа (*Wolff's law*), который применительно к живой костной ткани формулируется следующим образом: кость приспособливает свою внешнюю форму и внутреннюю структуру к тем механическим силам, которые она должна выдержать [1, 2]. Для конкретизации закона Вольфа необходимо ввести количественную характеристику, способную описать структурные особенности костной ткани. Показано [2], что такой величиной является симметричный, положительно определенный тензор второго ранга – тензор структуры **H** (*fabric tensor*). Данный тензор позволяет сформулировать соотношения, способные описывать упругие свойства материала с учетом его строения и адаптационные изменения костной микроструктуры.

На основе существующих подходов [2, 3] получено определяющее соотношение, позволяющее описать напряженно-деформированное состояние губчатой костной ткани с учетом ее структуры:

$$\boldsymbol{\sigma} = (g_1 + g_2 e)(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{E} + (g_3 + g_4 e) \boldsymbol{\varepsilon} + g_5 (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{K} + \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + g_6 (\text{tr}(\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{E} + (\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{K}). \quad (1)$$

Здесь **K** – девиатор тензора структуры **H**, нормированный таким образом, что $\text{tr } \mathbf{K} = 0$; e – изменение доли твердого объема кости относительно отсчетной величины v_0 ; g_1 – g_6 – константы, имеющие размерность [ГПа].

Закон Вольфа для костной ткани говорит о том, что трабекулярная архитектура губчатой кости в локальной области структурно приспособляется к местному напряженному состоянию костной ткани. При этом структурная адаптация в живой губчатой кости носит направленный характер и трабекулы располагаются закономерно, соответственно тому, какие внешние нагрузки испытывает данная кость [3, 4]. В частности, установлено, что ориентация трабекул в рассматриваемой области губчатой кости совпадает с главными направлениями тензора напряжений в этой же области.

Далее приведены кинетические уравнения, описывающие адаптационные процессы в губчатой костной ткани и представляющие закон Вольфа:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = (h_1 + h_3 e)(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^0) + h_4 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^0) \mathbf{K} + h_2 \left((\operatorname{tr}(\mathbf{K} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^0))) \mathbf{E} - \frac{3}{2} (\mathbf{K} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^0) + (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^0) \cdot \mathbf{K}) \right), \quad (2)$$

$$\dot{e} = (f_1 + f_2 e)(\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} - \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^0) + f_3 (\operatorname{tr}(\mathbf{K} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^0))), \quad (3)$$

где h_1-h_4 и f_1-f_3 – константы, имеющие размерность [сут⁻¹] и определяемые так, чтобы перестройка костной ткани происходила за 160 дней [2, 3].

Для соотношений (1)–(3) осуществлена постановка начально-краевой задачи о перестройке трабекулярной костной ткани [4], разработан алгоритм ее решения и на ряде примеров показана эволюция трабекулярной костной ткани при изменении напряженно-деформированного состояния.

В частном случае перестройка трабекулярной архитектуры губчатой кости может происходить при однократном достаточном изменении нагрузки. Данная ситуация может возникнуть, например, при вживлении в губчатую кость имплантата. Пусть начальная равновесная губчатая микроструктура описывалась тензором \mathbf{K}^0 , а соответствующее ему начальное напряженно-деформированное состояние – как $(\boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\varepsilon}^0)$. Далее происходит однократное изменение условий нагружения, запустившее процессы перестройки в губчатой кости и стремящееся привести трабекулярную архитектуру к новому состоянию фи-

физиологического равновесия с характерной структурой \mathbf{K}^1 и соответствующим напряженно-деформированным состоянием ($\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\varepsilon}^1$).

Описанный адапционный процесс схематично показан на рис. 1, где тензоры напряжений, деформации и структуры представлены в виде эллипсоидов [4]. Рис. 1, *а* отражает положение, существовавшее при $t < 0$ и соответствующее начальному состоянию гомеостаза. Видно, что три эллипсоида, представляющие начальные напряжения $\boldsymbol{\sigma}^0$, деформацию $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ и структуру \mathbf{K}^0 , соосны, т.е. главные направления тензоров $\boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\varepsilon}^0$ и \mathbf{K}^0 совпадают. Рис. 1, *б* отражает ситуацию начала перестройки костной ткани в момент времени $t = 0$, когда произошло изменение условий нагружения, соответственно, имеет место новое напряженное состояние костной ткани $\boldsymbol{\sigma}^1$. Напряженному состоянию $\boldsymbol{\sigma}^1$ соответствует новое деформированное состояние $\boldsymbol{\varepsilon}^{0+}$, при этом эллипсоиды $\boldsymbol{\sigma}^1$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^{0+}$ не соосны. В то же время эллипсоид структуры сохранил свое первоначальное направление \mathbf{K}^0 , поскольку

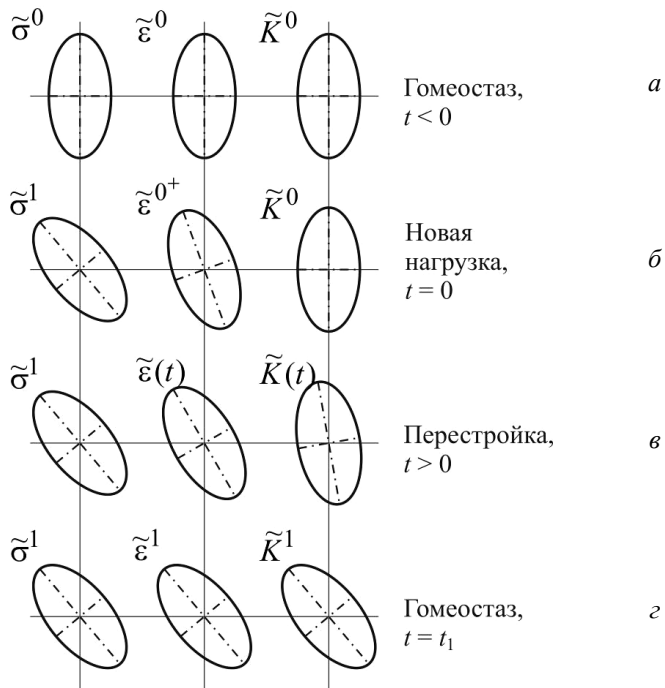


Рис. 1. Схема перестройки трабекулярной костной ткани

адаптационные процессы не могут протекать мгновенно. Рис. 1, в отражает процесс перестройки костной ткани при $t > 0$. Видно, что эллипсоиды σ^1 , $\varepsilon(t)$ и $\mathbf{K}(t)$ не соосны, при этом главные направления тензоров $\varepsilon(t)$ и $\mathbf{K}(t)$ изменяются таким образом, чтобы стать соосными главным направлениям нового напряженного состояния σ^1 . Рис. 1, г отражает новое состояние равновесия, которое было достигнуто по прошествии достаточно большого промежутка времени. Новое гомеостатическое состояние может быть описано тензорами напряжений σ^1 , деформации ε^1 и девиатора тензора структуры \mathbf{K}^1 , причем представляющие их эллипсоиды вновь соосны. Таким образом, произошла адаптация трабекулярной костной ткани к новым условиям нагружения.

2. Результаты

Рассмотрена локальная область костной ткани, длительное время находящаяся в состоянии гомеостаза ($t < 0$). В начальный момент времени ($t = 0$) задается однократное изменение условий нагружения, приводящее к перестройке трабекулярной микроструктуры. Начальные тензоры σ^0 , ε^0 и \mathbf{K}^0 , а также начальная доля твердого объема кости e^0 считаются известными (или могут быть определены). Новое напряженное состояние σ^1 будет определено следующим образом:

$$\sigma^{1P(\sigma^0)} = \mathbf{Q} \cdot \sigma^{1P(\sigma^1)} \cdot \mathbf{Q}^T, \quad (4)$$

где $P(\sigma^0)$ и $P(\sigma^1)$ – системы координат, связанные с главными осями тензоров σ^0 и σ^1 ; \mathbf{Q} – некоторое ортогональное преобразование, переводящее из главных осей тензора σ^1 к главным осям тензора σ^0 .

В качестве примера показана классическая задача [3], подробно разобранный в работе [4]. Рассматривается локальный, сжатый со всех сторон объем губчатой костной ткани. При этом напряженно-деформированное состояние структуры описывается как $(\sigma^0, \varepsilon^0)$, архитектура костной ткани – (\mathbf{K}^0, e^0) . Новое напряженное состояние σ^1 определяется исходя из соотношения (4), при этом угол между главными направлениями тензоров σ^0 и σ^1 в плоскости 1–3 равен τ (рис. 2).

Результаты, полученные по истечении 160 сут, показаны на рис. 3. Видно, что в результате адаптационных процессов новому напряженно-деформированному состоянию соответствует новая костная

микроструктура (\mathbf{K}^1, e^1). При этом $\kappa(t) \rightarrow \tau$, т.е. трабекулы выстроились вдоль линий главных напряжений и главные оси тензоров σ^1 и \mathbf{K}^1 вновь стали соосными.

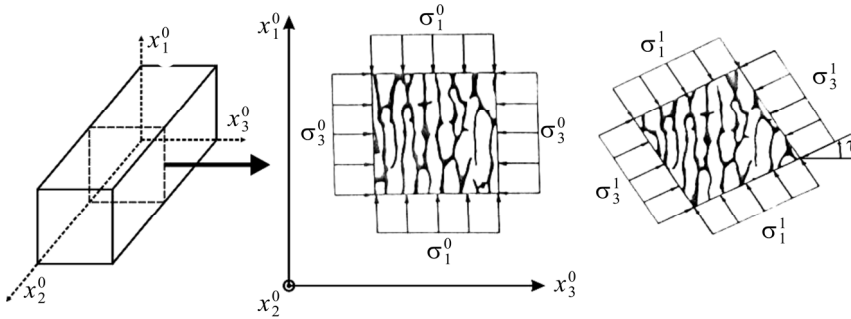


Рис. 2. Иллюстрация процесса перестройки структуры трабекулярной костной ткани из одного состояния физиологического равновесия в другое [4]

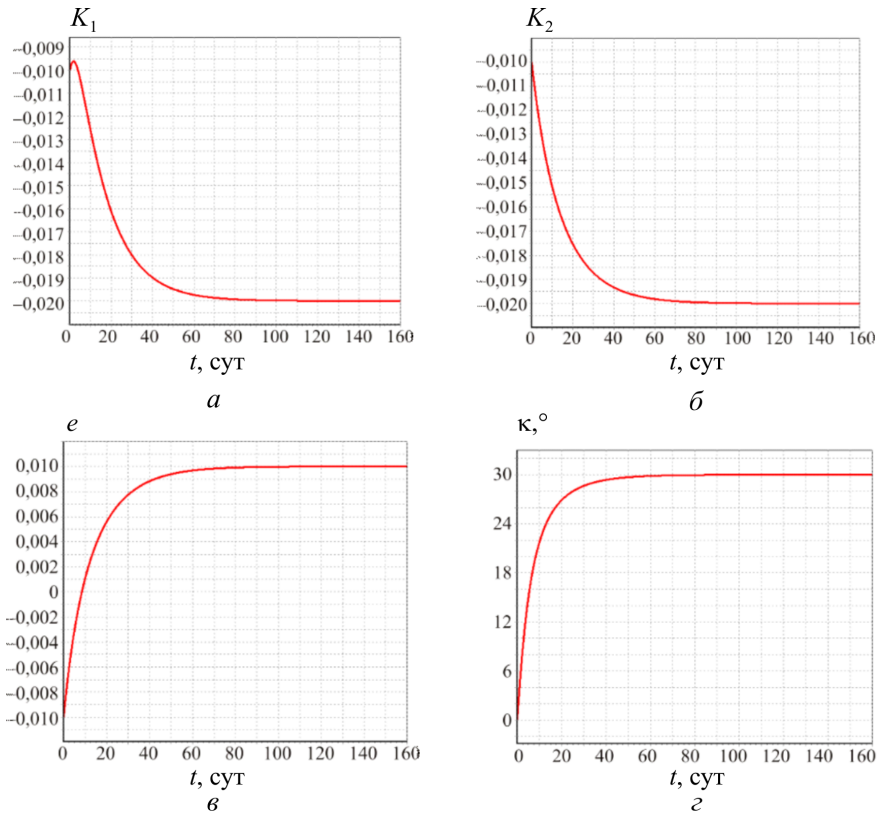


Рис. 3. Изменение структуры (а–в) (компонент девиатора тензора структуры и плотности $e(t)$) и угла $\kappa(t)$ между главными осями тензоров σ^0 и $\mathbf{K}(t)$ (г)

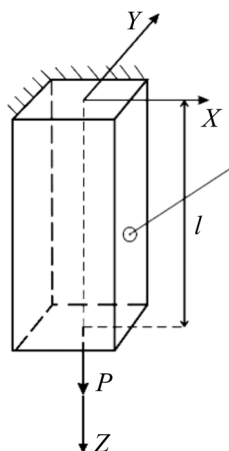


Рис. 4. Растяжения одноосного ортотропного бруса

На классическом примере растяжения одноосного ортотропного бруса было показано влияние различной ориентации структуры материала на его напряженно-деформированное состояние. Брус растягивается осевой силой P (рис. 4). При этом в каждой точке бруса задается структура, соответствующая полученному в работе [5] тензору структуры для трехмерного образца губчатой костной ткани, высеченного из медиального мыщелка бедренной кости крупного рогатого скота.

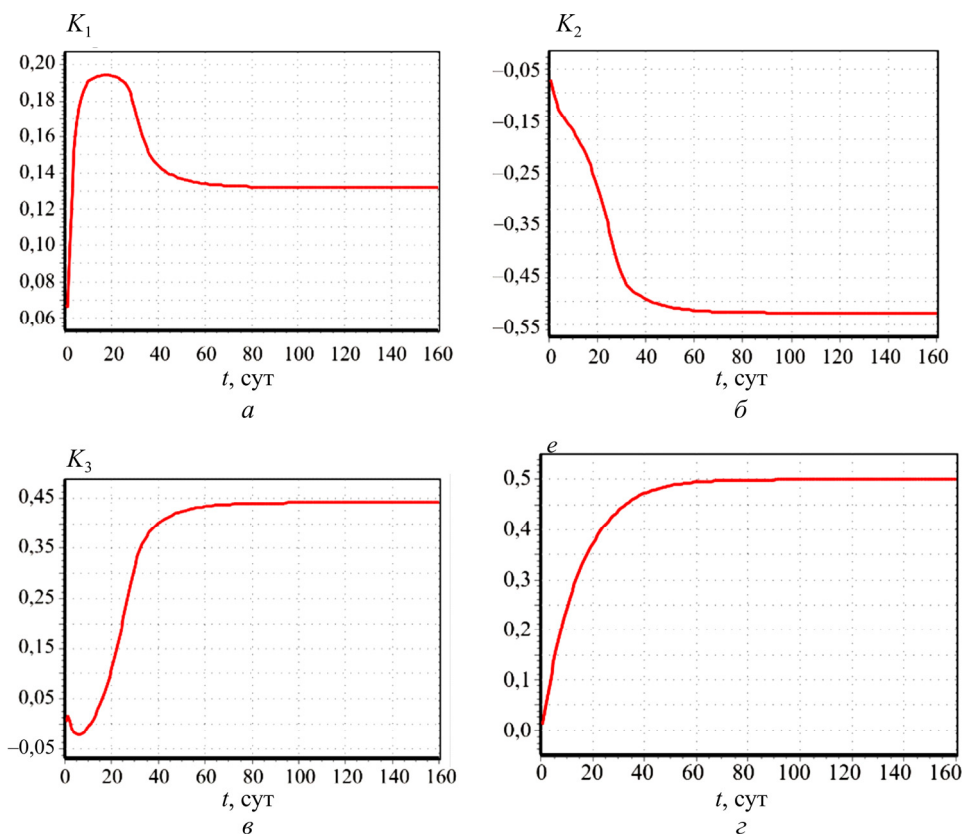


Рис. 5. Изменение структуры (компонент девиатора тензора структуры $K_1(t)$ (а), $K_2(t)$ (б) и $K_3(t)$ (в)) и плотности $e(t)$ трабекулярной микроструктуры (г)

В результате первоначально не соосные тензоры напряжений и структуры стали соосны, а новая костная микроструктура изменилась так, как показано на рис. 5.

Заключение

На основе ранее полученных определяющих и эволюционных соотношений, способных описать перестройку трабекулярной костной ткани, происходящую вследствие изменяющихся условий нагружения, рассмотрен ряд модельных примеров. Результаты показывают различный характер влияния изменения нагрузки на процесс формирования структуры, не противоречащий закону Ю. Вольфа. Серия примеров, рассмотренная авторами и не представленная в данной работе, также показала хорошую работоспособность модели.

В дальнейшем авторы планируют описать напряженно-деформированное состояние зубочелюстной системы человека с учетом структурных особенностей в нижней челюсти. Известно, что тело нижней челюсти имеет ярко выраженную структуру губчатой костной ткани, то же верно и для восходящей ветви челюсти [6]. Осуществить количественное описание формирующейся под воздействием изменяющегося биомеханического давления структуры костной ткани в различных отделах зубочелюстной системы возможно с помощью тензора структуры и соотношений (1)–(3). Решение подобной задачи необходимо для разработки индивидуального лечения различных стоматологических патологий, дефектов и прогнозирования отдаленных последствий такого врачебного вмешательства.

Список литературы

1. Cowin S.C. Bone Mechanics Handbook. – 2nd ed. – New York: CRC Press, 2001. – 1136 p.
2. Экспериментальные методы в биомеханике / под ред. Ю.И. Няшина, Р.М. Подгайца. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2008. – 400 с.
3. Cowin S.C. An evolutionary Wolff's law for trabecular architecture // J. Biomech. Engng. – 1992. – Vol. 114. – P. 129–136.
4. Постановка начально-краевой задачи о перестройке трабекулярной костной ткани / А.А. Киченко, В.М. Тверье, Ю.И. Няшин, М.А. Осипенко, В.А. Лохов // Российский журнал биомеханики. – 2012. – Т. 16, № 4. – С. 36–52.

5. О приложении теории перестройки трабекулярной костной ткани / А.А. Киченко, В.М. Тверье, Ю.И. Няшин, М.А. Осипенко, В.А. Лохов // Российский журнал биомеханики. – 2012. – Т. 16, № 4. – С. 53–72.

6. Биомеханическое описание структуры костных тканей зубочелюстной системы человека / В.М. Тверье, Е.Ю. Симановская, А.Н. Еловикова, Ю.И. Няшин, А.А. Киченко // Российский журнал биомеханики. – 2007. – Т. 11, № 1. – С. 9–24.

References

1. Cowin S.C. Bone Mechanics Handbook. New York: CRC Press, 2001. 1136 p.

2. Niashin Iu.I., Podgaits R.M. Eksperimental'nye metody v biomekhanike [Experimental Methods in Biomechanics]. Perm: Permskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet, 2008. 400 p.

3. Cowin S.C. An evolutionary Wolff's law for trabecular architecture. *Journal of Biomechanical Engineering*, 1992, vol. 114, pp. 129-136.

4. Kichenko A.A., Tver'e V.M., Niashin Iu.I., Osipenko M.A., Lokhov V.A. Postanovka nachal'no-kraevoi zadachi o perestroike trabekuliarnoi kostnoi tkani [Statement of the boundary value problem on the restructuring of the trabecular bone]. *Rossiiskii zhurnal biomekhaniki*, 2012, vol. 16, no. 4, pp. 36-52.

5. Kichenko A.A., Tver'e V.M., Niashin Iu.I., Osipenko M.A., Lokhov V.A. O prilozhenii teorii perestroiki trabekuliarnoi kostnoi tkani [On the application of the theory of the restructuring of the trabecular bone]. *Rossiiskii zhurnal biomekhanikii*, 2012, vol. 16, no. 4, pp. 53-72.

6. Tver'e V.M., Simanovskaia E.Iu., Elovikova A.N., Niashin Iu.I., Kichenko A.A. Biomekhanicheskoe opisanie struktury kostnykh tkanei zucheliustnoi sistemy cheloveka [Biomechanical description of the structure of bone tissue of human dental system]. *Rossiiskii zhurnal biomekhaniki*, 2007, vol. 11, no. 1, pp. 9-24.

Получено 10.11.2015

Об авторах

Киченко Александр Александрович (Пермь, Россия) – старший преподаватель кафедры «Теоретическая механика и биомеханика» Пермского национального исследовательского политехнического уни-

верситета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: kichenko.alex@inbox.ru).

Тверье Виктор Моисеевич (Пермь, Россия) – кандидат технических наук, доцент кафедры «Теоретическая механика и биомеханика» Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: artmil06@yandex.ru).

About the authors

Aleksandr A. Kichenko (Perm, Russian Federation) – Senior Lecturer, Department of Engineering Mechanics and Biomechanics, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: kichenko.alex@inbox.ru).

Viktor M. Tver'e (Perm, Russian Federation) – Ph.D. in Technical Sciences, Associate Professor, Department of Engineering Mechanics and Biomechanics, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: artmil06@yandex.ru).