УДК 531

Г.Л. Колмогоров, Е.О. Зиброва

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Предложена методика определения критической нагрузки, приводящей к потере устойчивости анизотропных прямоугольных шарнирно опертых пластин. В качестве примера приводится задача устойчивости прямоугольной анизотропной пластинки при сжатии силами в срединной поверхности в одном направлении.

Ключевые слова: анизотропная пластинка, свободное опирание по контуру, устойчивость, критическая сила.

G.L. Kolmogorov, E.O. Zibrova

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

QUESTIONS OF THE STABILITY OF ANISOTROPIC PLATES

The technique of determination of the critical load, which leads to loss of stability of anisotropic rectangular hingedly supported plates is proposed. As an example, the problem of stability of anisotropic rectangular plates under compression forces in the middle surface in one direction is given.

Keywords: anisotropic plate, free support for contour, stability, critical force.

В современном машиностроении широкое применение находят композиционные анизотропные материалы в форме пластинки, в частности ортотропные пластинки, обладающие тремя плоскостями симметрии упругих свойств. При определенных условиях эксплуатация машиностроительных конструкций (судостроение, авиастроение, космическая техника) сопровождается появлением сжимающих напряжений в срединной поверхности пластин, входящих в состав конструкций, которые могут привести к потере устойчивости и их несущей способности.

Положим, что материал пластинки в отношении своих упругих свойств обладает тремя плоскостями симметрии. Если эти плоскости принять в качестве координатных плоскостей, то соотношения между компонентами напряжения и деформации для случая плоского распределения в координатах x–y можно будет представить следующими уравнениями [1]:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= E'_x\varepsilon_x + E''\varepsilon_y; \\ \sigma_y &= E'_y\varepsilon_y + E''\varepsilon_x; \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Из уравнений (1) следует, что для характеристики упругих свойств ортотропного материала в случае плоского напряженного состояния необходимо знать четыре упругие постоянные материала: E'_x, E'_y, E'', G.

В вышеприведенных уравнениях E'_x является аналогом модуля упругости в направлении x, E'_y – аналог модуля упругости в направлении y, упругая постоянная связывает направления x и y, G – модуль сдвига ортотропного материала.

Для пластинки, изготовленной из подобного материала, предполагаем, что перпендикулярные к срединной поверхности пластинки, линейные элементы остаются нормальными к поверхности пластинки после ее изгиба. На этом основании мы можем записать для компонентов деформации:

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2},\ \varepsilon_y = -z\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2},\ \gamma_{xy} = 2z\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y},$$

где ω – функция прогиба.

Соответствующие компоненты напряжения определяются из уравнений (1) [1, 2]:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -z(E'_x\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + E''\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}); \\ \sigma_y &= -z(E'_y\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} + E''\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}); \\ \tau_{xy} &= 2Gz\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial e}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

С учетом соотношений (2) определяются изгибающие и крутящие моменты:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz = -\left(D_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right); \\ M_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz = -\left(D_y \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right); \\ M_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz = 2 D_{xy} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

где $D_x = \dfrac{E'_x h^3}{12}$, $D_y = \dfrac{E'_y h^3}{12}$, $D_1 = \dfrac{E'' h^3}{12}$, $D_{xy} = \dfrac{G h^3}{12}$ – жесткость при изгибе в соответствующих направлениях; h – толщина пластинки.

Устойчивость пластинки определяется силами, действующими в плоскости срединной поверхности, что соответствует сложному нагружению пластин, когда кроме поперечных сил действуют силы в плоскости срединной поверхности. Данному виду нагружения для изотропных пластин соответствует уравнение [1]

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{1}{D}\left(p + N_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right), \quad (4)$$

где $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ – цилиндрическая жесткость; E, μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона изотропного материала.

По аналогии с изотропными пластинками дифференциальное уравнение сложного изгиба анизотропной пластинки запишется в следующем виде [1]:

$$D_x \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = p + N_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}, \quad (5)$$

где $H = D_1 + 2D_{xy}$.

В уравнениях (4) и (5) N_x, N_y, N_{xy} – усилия, действующие в срединной поверхности пластинки; p – поперечная нагрузка.

Для решения дифференциального уравнения (5) в случае свободного опирания пластинки по контуру применим решение, аналогичное решению Навье с использованием двойных тригонометрических рядов. При этом задаем

$$p(x,y)=\sum_{m}^{\infty}\sum_{n}^{\infty}a_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},\tag{6}$$

а функцию прогибов

$$\omega(x,y)=\sum_{m}^{\infty}\sum_{n}^{\infty}b_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.\tag{7}$$

Функция прогибов (7) удовлетворяет граничным условиям свободного опирания пластинки по контуру.

После подстановки рядов (6) и (7) в исходное дифференциальное уравнение (5), полагая $N_{xy}=0,$ получим

$$b_{mn}\left[D_x\frac{m^4\pi^4}{a^4}+2H\frac{m^2\pi^2}{a^2}\frac{n^2\pi^2}{b^2}+D_y\frac{n^4\pi^4}{b^4}+N_x\frac{m^2\pi^2}{a^2}+N_y\frac{n^2\pi^2}{b^2}\right]=a_{mn}.\tag{8}$$

Из выражения (8) следует

$$b_{mn}=\frac{a_{mn}}{D_x\frac{m^4\pi^4}{a^4}+2H\frac{m^2\pi^2}{a^2}\frac{n^2\pi^2}{b^2}+D_y\frac{n^4\pi^4}{b^4}+N_x\frac{m^2\pi^2}{a^2}+N_y\frac{n^2\pi^2}{b^2}}.\tag{9}$$

При отсутствии поперечной нагрузки коэффициент $a_{mn}=0.$ Потере устойчивости будет соответствовать равенство нулю знаменателя выражения (9).

$$D_x\frac{m^4\pi^4}{a^4}+2H\frac{m^2\pi^2}{a^2}\frac{n^2\pi^2}{b^2}+D_y\frac{n^4\pi^4}{b^4}+N_x\frac{m^2\pi^2}{a^2}+N_y\frac{n^2\pi^2}{b^2}=0.\tag{10}$$

Уравнение (10) может быть использовано для различных видов нагрузки:

1. Сжатие пластинки только усилиями N_x.
2. Сжатие пластинки усилиями N_x и N_y.
3. Сжатие пластинки усилием N_x и растяжение усилием N_y.

В качестве примера рассмотрим потерю устойчивости анизотропной пластинки, свободно опертой по контуру под действием только усилий N_x (рисунок), положив $N_y = 0$.

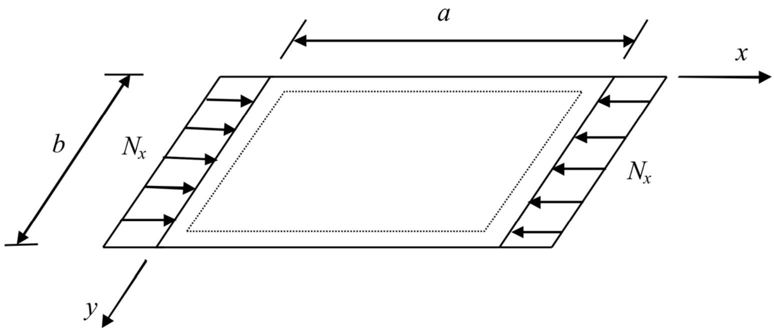

Рис. Расчетная схема пластинки

Выражение (10) при этом примет вид

$$D_x \frac{m^4\pi^4}{a^4} + 2H \frac{m^2\pi^2}{a^2} \frac{n^2\pi^2}{b^2} + D_y \frac{n^4\pi^4}{b^4} - N_x \frac{m^2\pi^2}{a^2} = 0. \tag{11}$$

Из выражения (11) определяется критическое значение усилия N_x:

$$N_{\text{кр}} = D_x \frac{m^2\pi^2}{a^2} + 2H \frac{\pi^2 n^2}{b^2} + D_y \frac{n^4\pi^2 a^2}{b^4 m^2}. \tag{12}$$

В уравнении (12) *m* и *n* соответствуют количеству полуволн синусоид при потере устойчивости в направлениях *x* и *y* соответственно.

Нас интересует минимальное значение критической нагрузки; из соотношения (12) следует, что минимальное значение критической силы будет получено при деформации пластинки по одной полуволне синусоиды в направлении *y*, т.е. *n* = 1. При этом

$$N_{\text{кр}} = D_x \frac{m^2\pi^2}{a^2} + 2H \frac{\pi^2}{b^2} + D_y \frac{\pi^2 a^2}{b^4 m^2}\,. \tag{13}$$

Минимальное значение критического усилия определяется из условия [3]

$$\frac{\partial N_{\text{кр}}}{\partial m} = 0. \tag{14}$$

Продифференцируем соотношение (13) по m, получим

$$\frac{\partial N_{кр}}{\partial m} = \frac{2\pi^2 D_y a^4 - 2\pi^2 D_x b^4 m^4}{a^2 b^2 m^3}. \tag{15}$$

Полученное выражение приравняем нулю:

$$\frac{2\pi^2 D_y a^4 - 2\pi^2 D_x b^4 m^4}{a^2 b^2 m^3} = 0. \tag{16}$$

Из выражения (16) после преобразования определим m, соответствующее минимальному значению критической нагрузки:

$$m = \frac{D_y^{\frac{1}{4}} a}{D_x^{\frac{1}{4}} b}. \tag{17}$$

После подстановки значения m (17) в соотношение (13) получим значение минимальной критической нагрузки:

$$N_{\text{кр}} = \frac{2\pi^2 (H + \sqrt{D_x D_y})}{b^2}. \tag{18}$$

Как частный случай перехода к изотропной пластинке при $D_x = D_y = H = D,$ где D – цилиндрическая жесткость изотропной пластинки, имеем

$$N_{\text{кр}}^{\min} = \frac{\pi^2 D}{b^2} 4{,}0, \tag{19}$$

что согласуется с критической нагрузкой для изотропной пластинки при сжатии в одном направлении [2].

Таким образом, в работе предложена методика расчета на устойчивость анизотропных (ортотропных) пластин при действии усилий в плоскости срединной поверхности.

Список литературы

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки: пер. с англ. – 2-е изд., стер. – М.: Наука, 1966. – 635 с.

2. Саргсян А.Е. Строительная механика. Механика инженерных конструкции: учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 2008. – 462 с.

3. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. – СПб.: Наука, 1986. – 608 с.

Reference

1. Timoshenko S.P., Voinovskii-Krieger S. Plastinki i obolochki [Plates and shells]. Moscow: Nauka, 1966. 635 p.

2. Sargsyan A.E. Stroitel'naia mekhanika. Mekhanika inzhenernykh konstruktsii [Structural mechanics. Mechanic engineering design]. Moscow: Vysshaia shkola, 2008. 462 p.

3. Bronstein I.N., Semendiaev K.A. Spravochnik po matematike dlia inzhenerov i uchashchikhsia vuzov [Handbook of mathematics for engineers and students of universities]. Saint-Petersburg: Nauka, 1986. 608 p.

Получено 10.11.2015

Об авторах

Колмогоров Герман Леонидович (Пермь, Россия) – доктор технических наук, профессор кафедры «Динамика и прочность машин» Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: dpm@pstu.ru).

Зиброва Елена Олеговна (Пермь, Россия) – студентка Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: tarasovalenochka@rambler.ru).

About the authors

German L. Kolmogorov (Perm, Russian Federation) – Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Dynamics and Strength of Machines, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: dpm@pstu.ru).

Elena O. Zibrova (Perm, Russian Federation) – Student, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: tarasovalenochka@rambler.ru).