УДК 519.213

С.Е. Батин, М.Б. Гитман

Пермский национальный исследовательский
политехнический университет, Пермь, Россия

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОВМЕСТНОЙ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Исследуется задача о распределении функции случайных величин. Приведены постановка и алгоритм решения задачи в общем виде, а также численный метод, позволяющий вычислять значения плотности распределения функции от совокупности случайных величин. Для выбранного численного метода проведено сравнение результатов, получаемых с помощью него и аналитического решения, для задачи, допускающей получение такого решения. Разработанная методика применена, для решения задачи о распределении жесткости на кручение однородного упругого цилиндра, имеющего случайный радиус и упругий модуль.

Ключевые слова: плотность распределения, функции случайных величин, численное интегрирование.

S.E. Batin, M.B. Gitman

Perm National Research Polytechnic University,
Perm, Russian Federation

ABOUT ONE METHOD OF DETERMINATION OF DISTRIBUTION OF FUNCTIONS OF RANDOM VARIABLES SET

A problem of distribution of functions of several random variables is considered. Statement and general algorithm of problem solving is shown, as numeric method what allows to evaluate numerical values of sought probability density function. Intercomparison of results carried out from numerical and analytical solutions for the problem, what allows analytical solution. Developed technique is used to solving problem about distribution of rigidity-to-torsion modulus of the cylindrical shaft with random radius and elastic modulus.

Keywords: probability density function, functions of random variables, numerical integration.

Введение

Для решения многих прикладных задач необходимо полное описание всех случайных величин, которые так или иначе входят в модель. При этом часть этих величин является измеримой, притом что другие не могут быть измерены по тем или иным причинам. В таком случае задача определения совместной плотности распределения может быть решена в предположении о том, что для неизмеряемых случайных величин существует зависимость в виде функций от совокупностей случайных величин с известным законом распределения [1].

1. Постановка и общее решение задачи

Представим в общем виде задачу поиска плотности распределения вероятности m-мерного случайного вектора **Y**, который представляет из себя функцию от n-мерного вектора **X**, плотность распределения вероятности которого $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ известна. Запишем эту функцию в виде

$$y_k = \varphi_k\left(x_1, x_2, ..., x_n\right),\ \ k = \overline{1, m}\,, \tag{1}$$

где x_i, y_i – компоненты соответствующих случайных векторов.

Искомую плотность распределения обозначим $g\left(x_1, x_2, ..., x_m\right)$.

Решение такого рода задач записывается в виде [2, 3]

$$\begin{gathered} g(y_1, y_2, ..., y_n) = \\ = f[\psi_1(y_1, y_2, ..., y_n), \psi_2(y_1, y_2, ..., y_n), ..., \psi_n(y_1, y_2, ..., y_n)]\left|J\right|, \end{gathered} \tag{2}$$

где $\psi_i(y_1, y_2, ..., y_n);\ i = \overline{1; n}$ – обратное преобразование, а $\left|J\right|$ – модуль его якобиана.

В случае меньшей размерности вектора функции по сравнению с размерностью вектора аргумента можно воспользоваться следующим приемом: принять дополнительные случайные величины $y_i = x_i$, $i = \overline{m+1, n}$, получить решение: $g'(y_1, y_2, ..., y_n)$, а решение исходной задачи получить интегрированием:

$$g(y_1, y_2, ..., y_n) = \int\limits_{R^{n-m}} g\,'(y_1, y_2, ..., y_n)\, dy_{m+1}, ..., dy_n\,. \tag{3}$$

2. Алгоритм решения задачи

Запишем общую схему решения задачи в виде алгоритма:

1. В случае меньшей размерности вектора **Y** исходная функция дополняется введением дополнительных соотношений вида $y_i = x_i$, $i = \overline{m+1, n}$.

2. Строится обратное преобразование $x_i = \psi_i(y_1, y_2, ..., y_n),\ i = \overline{1, n}$.

3. Аналитически вычисляется якобиан обратного преобразования $J = \dfrac{\partial(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial(y_1, y_2, ..., y_n)}$. Заметим, что в случае, когда якобиан обратного преобразования невозможно вычислить аналитически, появляется необходимость его численного вычисления, однако в таком случае существенно снижается точность получаемых результатов и замедляется скорость счета.

4. Если размерность вектора $\mathbf{Y}$ меньше размерности вектора $\mathbf{X}$, то необходимо вычислить интеграл (3).

3. Выбор метода численного интегрирования

Получаемые в ходе решения интегралы в виде (3) чаще всего не выражаются в элементарных функциях, и для получения численных значений плотности распределения необходимо численное интегрирование. Подынтегральные выражения будут иметь вид (2). Исходя из этого, достаточно просто возможна реализация численного интегрирования методом статистических испытаний. Кроме того, выбранный метод демонстрирует эффективность для многомерных интегралов, с которыми приходится иметь дело в общем случае.

Для интегрирования методом Монте-Карло представим искомый интеграл в виде (4):

$$\int_R f(x)\,dx = \int_R s(x)\rho(x)\,dx, \tag{4}$$

где $\rho(x)$ – плотность распределения некоторой случайной величины.

Таким образом, интеграл (4) может быть приближенно вычислен как сумма [4]

$$\int_R s(x)\rho(x)\,dx = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} s(\xi_i), \tag{5}$$

в которой ξ_i – случайные величины, распределенные с плотностью $\rho(x)$; N – число опорных точек.

Проанализируем эффективность выбранного численного метода. Для этого найдем относительную погрешность для задачи, имеющей аналитическое решение. В качестве такой задачи рассмотрим распределение частного нормально распределенных случайных величин:

$$y = \frac{x_1}{x_2},$$
$$f\left(x_1, x_2\right) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left[-\frac{1}{2\left(1-r^2\right)}\left(\frac{x_1^{\ 2}}{\sigma_1^{\ 2}} - 2r\frac{x_1x_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{x_2^{\ 2}}{\sigma_2^{\ 2}}\right)\right]. \qquad (6)$$

Решение задачи (6) можно представить в виде интеграла

$$g\left(y\right) = \int_R \frac{\left|t\right|}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left[-\frac{1}{2\left(1-r^2\right)}\left(\frac{\left(yt\right)^2}{\sigma_1^{\ 2}} - 2r\frac{yt^2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{t^2}{\sigma_2^{\ 2}}\right)\right]dt, \qquad (7)$$

который может быть вычислен аналитически и будет равен

$$g\left(y\right) = \frac{\sqrt{1-r^2}}{\pi}\frac{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}{1 - 2r\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)y + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2 y^2}. \qquad (8)$$

Сравним полученные численно значения искомой функции плотности распределения со значениями, вычисленными с помощью формулы (8). Результаты сравнения приведены на рис. 1.

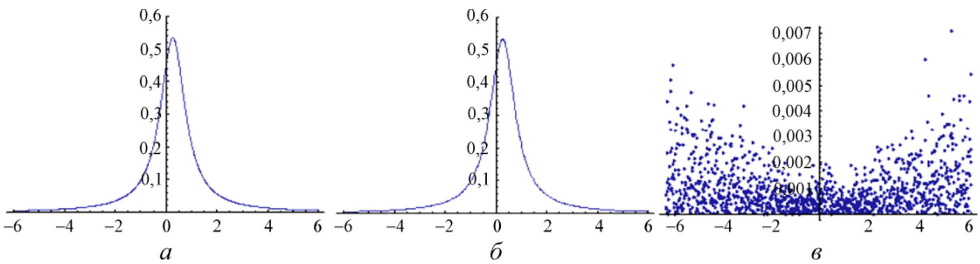

Рис. 1. Плотность распределения частного нормально распределенных случайных величин при $\sigma_1 = 1,3$; $\sigma_2 = 2,0$; $r = 0,4$: *а* – численное решение; *б* – аналитическое решение; *в* – относительная погрешность численного решения

Как видим, точность получаемых результатов довольно высока: относительная погрешность численного решения не превышает 0,01.

В качестве примера реализации предложенного алгоритма рассмотрим задачу о распределении жесткости на кручение однородного изотропного упругого цилиндра, имеющего случайный радиус и упругий модуль.

4. Распределение жесткости на кручение упругого цилиндра при нормальном распределении его радиуса и модуля сдвига

Рассмотрим задачу о кручении изотропного однородного упругого цилиндра моментом M. Решение задачи о кручении стержня известно из курса механики сплошных сред и выражается в виде соотношения

$$M = D\alpha, \tag{9}$$

где α – относительный угол закручивания; D – некоторая константа, называемая жесткостью стержня на кручение, которая зависит от геометрии стержня и его упругих характеристик.

Для цилиндрического стержня радиуса R жесткость на кручение выражается следующим образом [5]:

$$D = \frac{\pi R^4 G}{2}, \tag{10}$$

где G – модуль сдвига материала стержня.

Предположим, что для некоторой выборки стержней их радиусы и модули сдвига являются случайными величинами, распределенными нормально с параметрами $R \approx N(m_R, \sigma_R)$, $G \approx N(m_G, \sigma_G)$, также можно считать данные случайные величины независимыми. Таким образом, возникает задача определения плотности распределения жесткости стержня на кручение.

Решение данной задачи более целесообразно проводить в безразмерном виде. Введем безразмерные радиус, модуль сдвига и жесткость на кручение:

$$a = \frac{R}{m_R};\ u = \frac{G}{m_G};\ d = \frac{2D}{\pi m_R^4 m_G}; \tag{11}$$

также введем обозначения $\sigma_a = \dfrac{\sigma_R}{m_R}$; $\sigma_u = \dfrac{\sigma_G}{m_G}$.

С учетом (10) и (11) исходные данные примут вид

$$d = a^4 u,$$
$$f(a,u) = \frac{1}{2\pi\sigma_a\sigma_u}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{(a-1)^2}{\sigma_a{}^2}+\frac{(u-1)^2}{\sigma_u{}^2}\right)\right]. \tag{12}$$

Плотность распределения жесткости стержня на кручение может быть выражена в виде интеграла

$$g(d) = \int_R \frac{1}{2\pi\sigma_a\sigma_u}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{(a-1)^2}{\sigma_a{}^2}+\frac{\left(\frac{d}{a^4}-1\right)^2}{\sigma_u{}^2}\right)\right]\frac{da}{a^4}. \tag{13}$$

Ниже представлен график полученного распределения для некоторого набора параметров (рис. 2).

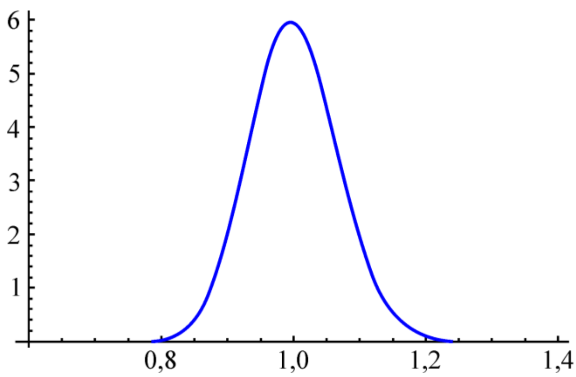

Рис. 2. Распределение безразмерной жесткости стержня на кручение при $\sigma_a = 0,015$, $\sigma_u = 0,03$

Заключение

Предложен способ определения совместной плотности распределения функции от нескольких случайных величин, распределения которых известны. Разработан алгоритм решения задачи и реализован численный расчет, относительная погрешность которого не превышает 1 %. В качестве примера применения разработанной методики рассмотрена задача о распределении жесткости на кручение однородного изотропного упругого цилиндра, имеющего случайный радиус и модуль сдвига.

Список литературы

1. Гитман М.Б. Введение в стохастическую оптимизацию: учеб. пособие. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2014. – 104 с.

2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения: учеб. пособие для втузов. – 2-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2000. – 480 с.

3. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1989. – 656 с.

4. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

5. Temam R., Miranville A. Mathematical modeling in continuum mechanics. – New York: Cambridge University Press, 2005. – 342 p.

References

1. Gitman M.B. Vvedenie v stokhasticheskuiu optimizatsiiu [Introduction to stochastic optimization]. Perm, 2014. 104 p.

2. Venttsel' E.S., Ovcharov L.A. Teoriia veroiatnostei i ee inzhenernye prilozheniia [Probability theory and its engineering applications]. Moscow, 2000. 480 p.

3. Levin B.R. Teoreticheskie osnovy statisticheskoi radiotekhniki [Theoretic principle of statistical radiotechnics]. Moscow, 1989. 656 p.

4. Kalitkin N.N. Chislennye metody [Numerical methods]. Moscow, 1978. 512 p.

5. Temam R., Miranville A. Mathematical modeling in continuum mechanics. New York, 2005. 342 p.

Получено 14.12.2015

Об авторах

Батин Сергей Евгеньевич (Пермь, Россия) – магистрант кафедры «Математическое моделирование систем и процессов», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: sebatin@yandex.ru).

Михаил Борисович Гитман (Пермь, Россия) – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Вычислительная математика и механика», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: gmb@pstu.ru).

About the authors

Sergei E. Batin (Perm, Russian Federation) – Master Student, Department of Mathematical Modeling of Systems and Processes, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: sebatin@yandex.ru).

Mikhail B. Gitman (Perm, Russian Federation) – Doctor of Sciences, Professor, Department of Computational Mathematics and Mechanics, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: gmb@pstu.ru).