

А.А. Роговой, О.С. Столбова

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ФЕРРОМАГНИТНЫХ СПЛАВАХ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

В рамках конечных деформаций построена модель поведения ферромагнитных материалов, испытывающих аустенитно-мартенситный фазовый переход в процессе деформирования в температурных и магнитных полях. Сформулирована вариационная постановка связанной магнитоупругой краевой задачи. Полученные соотношения использованы для численного решения задачи методом конечных элементов.

Ключевые слова: конечные деформации, ферромагнитные материалы, память формы.

A.A. Rogovoi, O.S. Stolbova

Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch
of the Russian Academy of Sciences, Perm, Russian Federation

MODELING OF THERMOMECHANICAL PROCESSES IN FERROMAGNETIC SHAPE MEMORY ALLOYS UNDER FINITE DEFORMATIONS

Within the framework of finite deformations the model of ferromagnetic materials behavior during forward and reverse martensitic transformation in the process of deformation in the temperature and magnetic fields has been obtained. The variational formulation of the coupled magnetoelastic boundary value problem is carried out. The obtained relations have been used for the numerical solution of the problem by finite element method.

Keywords: finite deformations, ferromagnetic materials, shape memory.

Ферромагнитные сплавы с памятью формы являются функциональными материалами. Под функциональными, или интеллектуальными, обычно понимаются такие материалы, которые изменяют свою форму и/или размеры при воздействии внешних полей: температурного, магнитного, электрического. Известны два различных физических механизма эффекта больших (до 10 %) деформаций, ин-

дуцированных магнитным полем, которые наблюдаются в ферромагнетиках. Первый связан с перестройкой структурных доменов в мартенситной фазе и наблюдается только в монокристаллах [1]. Второй возникает при фазовом (мартенситном) превращении в магнитном поле и проявляется как в моно-, так и в поликристаллах [2], которые являются более дешевыми и технологичными.

Большой интерес представляют Mn-содержащие сплавы Гейслера Ni-Mn-Ga, в которых наблюдается редкое сочетание ферромагнитных свойств и структурного (мартенситного) фазового перехода из кубической высокотемпературной фазы (аустенит) в тетрагональную низкотемпературную фазу (мартенсит) [3]. Мартенситный переход в Ni-Mn-Ga имеет термоупругий характер, возникает за счет смещения температуры мартенситного превращения под действием магнитного поля и сопровождается одно- и двусторонним эффектом памяти формы (ЭПФ). Управляемый магнитным полем ЭПФ способен восстанавливать любой вид деформации – сжатие, растяжение, изгиб, кручение и т.д. [2].

В работе [4] приведены теоретические соотношения, описывающие влияние магнитного поля на мартенситные переходы в сплавах гейслеровского типа. В статье [5] с помощью термодинамического подхода построена модель, позволяющая описывать эффект памяти формы в ферромагнетиках. Однако в обоих случаях соотношения записываются в рамках малых деформаций.

Настоящая работа посвящена описанию эффекта памяти формы в ферромагнитных сплавах, испытывающих большие деформации, с помощью подхода, позволяющего строить модели, описывающие поведение сложных сред при конечных деформациях и структурных изменениях в материалах, и удовлетворяющих принципам термодинамики и объективности [6–8]. Рассматриваются только фазовые превращения в поликристаллах, вызванные смещением температуры мартенситного перехода под действием магнитного поля.

1. Основные соотношения

Для описания поведения среды при конечных деформациях вводятся, согласно [9, 10], начальная недеформированная k_0 и текущая деформированная k конфигурации. Радиус-вектор в начальной конфи-

гурации \mathbf{r} , в текущей – $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{U}$, где \mathbf{U} – вектор перемещений из начальной конфигурации в текущую. Записывается фундаментальная кинематическая величина – градиент места $\mathbf{F} = \mathbf{g} + (\nabla \mathbf{U})^T$, где \mathbf{g} – метрический тензор, ∇ – оператор Гамильтона в начальной конфигурации; вводится мера деформации Коши-Грина $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$.

Из эквивалентных форм определяющих соотношений для простого материала, удовлетворяющих принципу объективности [10], используем форму

$$\mathbf{T} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{C}_E, \theta, q) \cdot \mathbf{F}^T. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{T} – тензор истинных напряжений, $\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{C}_E, q)$ – функция отклика материала (тензор второго ранга), $\mathbf{C}_E = \mathbf{F}_E^T \cdot \mathbf{F}_E$ – мера Коши-Грина упругих деформаций, \mathbf{F}_E – упругий градиент места, $J = I_3(\mathbf{F})$ – третий инвариант \mathbf{F} (якобиан, определяющий относительное изменение объема), θ – температура, q – скалярный параметр процесса (доля мартенситной фазы в объеме материала; изменяется от 0, когда материал находится полностью в аустенитном состоянии, до 1 – в мартенситном).

В магнитном поле при отсутствии токов вектор напряженности магнитного поля можно представить в виде градиента скалярной функции: $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \tilde{\nabla} \psi$, где \mathbf{H}_0 – приложенное внешнее поле, $\tilde{\nabla}$ – оператор Гамильтона в текущей конфигурации. Векторы магнитной индукции \mathbf{B} , напряженности магнитного поля \mathbf{H} и намагниченности \mathbf{M} связаны соотношением $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$, где μ_0 – магнитная постоянная. Из условия соленоидальности магнитного поля $\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$. Общий вид закона намагничивания для изотропного по магнитным свойствам материала может быть записан в виде $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$, где $\chi = \chi(\theta, H)$ – магнитная восприимчивость, $H = |\mathbf{H}|$.

При действии магнитного поля уравнение равновесия имеет вид $\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{T} + \mu_0 \mathbf{M} \cdot \tilde{\nabla} \mathbf{H} = 0$, на поверхности тела возникают силы $\mathbf{Q} = 1/2 \mu_0 M_N^2 \mathbf{N}$, где $M_N = \mathbf{M} \cdot \mathbf{N}$, \mathbf{N} – внешняя единичная нормаль к поверхности тела в текущей конфигурации.

Пусть тело, ограниченное поверхностью S , занимает в пространстве область $V^{(i)}$, а $V^{(e)}$ – окружающее пространство. Вариационная постановка краевой задачи в форме Лагранжа в текущей конфигурации имеет следующий известный вид:

$$\int_S \mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{U} dS + \int_{V^{(i)}} \rho \mathbf{K} \cdot \delta \mathbf{U} dV = \int_{V^{(i)}} \mathbf{T} \cdot \tilde{\nabla} \delta \mathbf{U} dV, \quad (2)$$

где $\mathbf{Q} = 1/2 \mu_0 M_N^2 \mathbf{N}$ – вектор сил, заданных в текущей конфигурации на поверхности S , ограничивающей объем $V^{(i)}$; ρ – плотность массы в актуальной конфигурации; $\mathbf{K} = \mu_0 / \rho \mathbf{M} \cdot \tilde{\nabla} \mathbf{H}$ – вектор массовых сил; δ – символ вариации. Для задачи магнитостатики вариационное уравнение запишется следующим образом [11]:

$$\int_{V^{(i)}} \chi \mathbf{H}_0 \cdot \tilde{\nabla} \delta \psi dV = \int_{V^{(i)}} [1 + \chi] \tilde{\nabla} \psi \cdot \tilde{\nabla} \delta \psi dV + \int_{V^{(e)}} \tilde{\nabla} \psi \cdot \tilde{\nabla} \delta \psi dV. \quad (3)$$

Поскольку поверхность S и объем $V^{(i)}$ в текущей конфигурации неизвестны до решения задачи, уравнения (2)–(3) приводятся к какой-либо известной конфигурации, и, в частности, в начальной они будут иметь следующий вид:

$$\int_{S_0} J \sqrt{\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{U} dS_0 + \int_{V_0^{(i)}} \rho_0 \mathbf{K} \cdot \delta \mathbf{U} dV_0 = \frac{1}{2} \int_{V_0^{(i)}} \mathbf{P}_{II} \cdot \delta \mathbf{C} dV_0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \int_{V_0^{(i)}} J \chi \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla \delta \psi dV_0 = \\ & = \int_{V_0^{(i)}} J [1 + \chi] \mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla \delta \psi dV_0 + \int_{V_0^{(e)}} J \mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla \psi \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla \delta \psi dV_0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь \mathbf{n} – внешняя единичная нормаль к поверхности тела в начальной конфигурации; $\mathbf{P}_{II} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T}$ – тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа второго рода.

Согласно [6], кроме начальной и текущей конфигураций вводится промежуточная κ^* , близкая к текущей. Эта близость формализуется введением малого параметра ε . Все величины в промежуточной конфигурации помечаются «*». Градиент места относительно

конфигурации κ_* запишется в виде $\mathbf{F} = (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{h}) \cdot \mathbf{F}_*$, где $\mathbf{h} = (\nabla_* \mathbf{u})^T$, ∇_* – оператор Гамильтона в промежуточной конфигурации, \mathbf{u} – вектор перемещений из конфигурации κ_* в κ . Вводится тензор малых деформаций относительно промежуточной конфигурации $\mathbf{e} = (\mathbf{h} + \mathbf{h}^T) / 2$. При этом справедливо равенство $\mathbf{e} = \mathbf{e}_E + \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_P$, где \mathbf{e}_E , \mathbf{e}_θ и \mathbf{e}_P – тензоры малых упругих, температурных и фазовых (неупругих) деформаций относительно промежуточной конфигурации. Кинематические тензоры определяются выражениями [7, 8]:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{F}_E \cdot \mathbf{F}_P \cdot \mathbf{F}_\theta, \quad \mathbf{F}_E = [\mathbf{g} + \varepsilon (\mathbf{e}_E + \mathbf{d}_E)] \cdot \mathbf{F}_{E*} = (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{h}_E) \cdot \mathbf{F}_{E*}, \\ \mathbf{F}_P &= [\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{F}_{E*}^{-1} \cdot (\mathbf{e}_P + \mathbf{d}_P) \cdot \mathbf{F}_{E*}] \cdot \mathbf{F}_{P*} = (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{F}_{E*}^{-1} \cdot \mathbf{h}_P \cdot \mathbf{F}_{E*}) \cdot \mathbf{F}_{P*}, \\ \mathbf{F}_\theta &= [\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{F}_{P*}^{-1} \cdot \mathbf{F}_{E*}^{-1} \cdot (\mathbf{e}_\theta + \mathbf{d}_\theta) \cdot \mathbf{F}_{E*} \cdot \mathbf{F}_{P*}] \cdot \mathbf{F}_{\theta*} = \\ &= (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{F}_{P*}^{-1} \cdot \mathbf{F}_{E*}^{-1} \cdot \mathbf{h}_\theta \cdot \mathbf{F}_{E*} \cdot \mathbf{F}_{P*}) \cdot \mathbf{F}_{\theta*}.\end{aligned}$$

Здесь \mathbf{F}_P – неупругий градиент места, связанный с фазовыми деформациями; \mathbf{F}_θ – градиент места, связанный с температурными деформациями; \mathbf{h}_E , \mathbf{h}_P , \mathbf{h}_θ , \mathbf{d}_E , \mathbf{d}_P , \mathbf{d}_θ – градиенты вектора малых упругих, фазовых и температурных перемещений, тензоры малых упругих, фазовых и температурных поворотов относительно промежуточной конфигурации.

Соотношение (1) представляется, с точностью до линейных по ε слагаемых, в виде [7]

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= [1 - \varepsilon I_1(\mathbf{e})] \mathbf{T}_* + \varepsilon \mathbf{h} \cdot \mathbf{T}_* + \varepsilon \mathbf{T}_* \cdot \mathbf{h}^T + \\ &+ \varepsilon \theta \left. \frac{\partial \mathbf{T}(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_*} + \varepsilon q' \left. \frac{\partial \mathbf{T}(q)}{\partial q} \right|_{q=q_*} + \varepsilon \mathbf{L}_*^{\text{IV}} \cdot \mathbf{e}_E,\end{aligned}$$

где $I_1(\mathbf{e})$ – первый инвариант \mathbf{e} ; θ – малое приращение температуры ($\theta = \theta_* + \varepsilon \theta$); q' – малое приращение q ($q = q_* + \varepsilon q'$); \mathbf{L}_*^{IV} – тензор четвертого ранга, определяющий отклик материала на малые упругие деформации относительно промежуточной конфигурации и имеющий вид (см. [8])

$$\mathbf{L}_*^{\text{IV}} = 4J_*^{-1} \mathbf{F}_* \cdot \left(\mathbf{F}_* \overset{3}{\circ} \left. \frac{\partial^2 W(\mathbf{C}_E, \theta_*, q_*)}{\partial \mathbf{C}_E^2} \right|_{\mathbf{C}_E = \mathbf{C}_{E*}} \overset{2}{*} \mathbf{F}_*^T \right) \cdot \mathbf{F}_*^T,$$

где W – упругий потенциал. Для тензора малых температурных деформаций примем закон линейного температурного расширения $\mathbf{e}_\theta = \beta_\theta \theta \mathbf{g}$, где β_θ – коэффициент линейного теплового расширения.

Поскольку фазовые деформации возникают в процессе мартенситного перехода, воспользуемся моделью, предложенной в работах А.А. Мовчана [12] и адаптированной к конечным деформациям в [13]. Диаграмма фазового перехода может быть аппроксимирована следующими соотношениями:

$$q(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \leq 0; \\ 0,5(1 - \cos(\pi\xi)), & 0 < \xi < 1; \\ 1, & \xi \geq 1. \end{cases}$$

$$\xi = \frac{M_s^\sigma - \theta}{M_s - M_f}, \quad M_f^\sigma \leq \theta \leq M_s^\sigma \quad (dq > 0);$$

$$\xi = 1 + \frac{A_s^\sigma - \theta}{A_f - A_s}, \quad A_s^\sigma \leq \theta \leq A_f^\sigma \quad (dq < 0).$$

Здесь M_s, M_f, A_s, A_f – температуры начала и завершения прямого и обратного мартенситных превращений в свободном от напряжений материале, $M_s^\sigma = M_s + k\sigma_i$, $M_f^\sigma = M_f + k\sigma_i$, $A_s^\sigma = A_s + k\sigma_i$, $A_f^\sigma = A_f + k\sigma_i$, k – материальная константа, $\sigma_i = \sqrt{(3/2)(\mathbf{S} \cdot \mathbf{S})}$ – интенсивность напряжений, $\mathbf{S} = \mathbf{T} - (1/3)I_1(\mathbf{T})$ – девиатор тензора истинных напряжений. В работе [3] показано, что температуры прямого и обратного мартенситных переходов с увеличением магнитного поля приближенно линейно возрастают, поэтому будем считать, что

$$M_s(H) = M_s(H=0) + k_H H, \quad M_f(H) = M_f(H=0) + k_H H,$$

$$A_s(H) = A_s(H=0) + k_H H.$$

Приращение фазовых деформаций относительно промежуточной конфигурации определяется следующим образом [13]:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{ph} &= (\beta \mathbf{g} + c_0 \mathbf{S}_* + a_0 \tilde{\mathbf{E}}_{ph*}) q', \quad q' > 0; \\ \mathbf{e}_{ph} &= \left(\frac{a_0 \tilde{\mathbf{E}}_{ph}^{(0)}}{\exp(a_0 q_0) - 1} + a_0 \tilde{\mathbf{E}}_{ph*} \right) q', \quad q' < 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где β , c_0 , a_0 – параметры материала, $\tilde{\mathbf{E}}_{ph}$ – текущая фазовая деформация, q_0 , $\tilde{\mathbf{E}}_{ph}^{(0)}$ – значения параметра мартенситной фазы и фазовой деформации в начальной точке процесса обратного превращения. Согласно [8] для определения \mathbf{d}_{ph} используется соотношение

$$\mathbf{K}_* \cdot \mathbf{d}_{ph} + \mathbf{d}_{ph} \cdot \mathbf{K}_* = \mathbf{K}_* \cdot \mathbf{e}_{ph} - \mathbf{e}_{ph} \cdot \mathbf{K}_*, \quad \mathbf{K}_* = \mathbf{F}_* \cdot \mathbf{F}_{E*}^T,$$

позволяющее выразить \mathbf{d}_{ph} через \mathbf{e}_{ph} . Поскольку \mathbf{e}_0 определяется законом линейного температурного расширения, $\mathbf{d}_0 = 0$.

Для описания упругого поведения материала воспользуемся упрощенным законом Синьборини [10]

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{II} &= \sqrt{I_3(\mathbf{C}_E)} \left[(k_1 + k_2) \mathbf{C}_E^{-1} - 2k_2 \mathbf{C}_E^{-2} \right], \\ k_1 &= \Lambda \left[3 - I_1(\mathbf{C}_E^{-1}) \right] / 2 + (\Lambda + G) \left[3 - I_1(\mathbf{C}_E^{-1}) \right]^2 / 8, \\ k_2 &= G - (\Lambda + G) \left[3 - I_1(\mathbf{C}_E^{-1}) \right] / 2. \end{aligned}$$

Здесь Λ и G – параметры материала, имеющие смысл параметра Ламе и модуля сдвига линейной теории упругости. Упругие модули материала изменяются в процессе прямого и обратного мартенситного превращения в соответствии с соотношениями [14]: $1/E(q) = q/E_M + (1-q)/E_A$, $1/G(q) = q/G_M + (1-q)/G_A$, где E_M, G_M, E_A, G_A – значения модуля Юнга и модуля сдвига для материала в мартенситном и аустенитном состояниях соответственно.

2. Решение краевой задачи

В работе [2] представлен эксперимент, в котором в образце из сплава Ni-Mn-Fe-Ga осуществляется магнитное управление эффектом памяти формы в результате структурного фазового перехода мартенсит – аустенит, вызванного магнитным полем при постоянной температуре. В результате предварительно деформированный образец восстанавливает свою форму (выпрямляется). Для верификации представленных выше соотношений рассмотрим следующую краевую задачу, соответствующую этому эксперименту. Образец в форме стержня прямоугольного сечения $1 \times 0,5$ см и длиной 10 см закреплен с левого торца. В начальный момент времени стержень нахо-

дится при комнатной температуре (ниже температуры M_f) с фазовыми деформациями, возникшими в образце в процессе прямого температурного мартенситного перехода из точки a в точку b (рис. 1) при заданном сдвиговом усилии $P = 1$ МПа на правом торце (изгиб), отсутствии магнитного поля и последующей разгрузке. Затем происходит включение поля $H_0 = 80 \cdot 10^5$ А/м, направленного вдоль оси стержня (путь $b \rightarrow c$), и нагрев образца до температуры $A_s(H = 0) < \theta_0 < A_f(H = H_0)$ (путь $c \rightarrow d$). После этого поле выключается, и в системе происходит фазовый переход в аустенитное состояние при постоянной температуре $\theta_0 = 315$ К (путь $d \rightarrow a$).

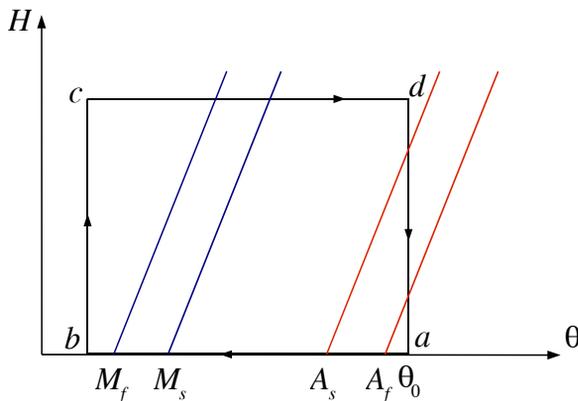


Рис. 1. Зависимость температур фазового перехода от поля

Согласно [2, 15] для сплава Ni-Mn-Fe-Ga $M_s = 313$ К, $M_f = 306$ К, $A_s = 309$ К, $A_f = 314$ К, $k_H = 5,6 \cdot 10^5$ К·м/А. Параметры материала для соотношения (6) идентифицированы по приведенным в [2, 15] зависимостям деформации от температуры; в результате $\beta = 3,2 \cdot 10^{-5}$, $c_0 = 0,365 \cdot 10^{-3}$ МПа $^{-1}$, $a_0 = 5,9$. Будем считать, что $k = 0$, $\beta_0 = 0$, $E = 90$ ГПа и этот модуль не изменяется в процессе мартенситного превращения, $\nu = 0,3$. Намагниченность определяется по формуле Фрелиха: $\mathbf{M} = M_s \mathbf{H} / (a_s + H)$, где $M_s = 40 \cdot 10^3$ А/м – намагниченность насыщения, $a_s = 80 \cdot 10^3$ А/м – постоянная материала.

Численная реализация уравнений (4)–(5), записанных в приращениях, осуществлялась методом конечных элементов в пакете FEniCS. На каждом шаге задается приращение температуры или магнитного поля, в результате решения находятся приращения перемещений. Считается, что распределение температуры однородно по образцу. В качестве внешнего объема $V^{(e)}$ выбран параллелепипед с размерами $100 \times 10 \times 5$ см.

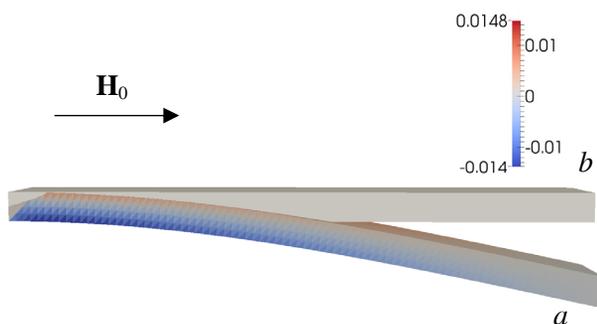


Рис. 2. Конфигурации образца и распределение фазовых деформаций

На рис. 2 представлены конфигурации образца с осевыми остаточными фазовыми деформациями, накопленными после прямого фазового перехода (*a*) и после восстановления формы при выключении магнитного поля (*b*) при постоянной температуре, что хорошо согласуется с экспериментом.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-01-00080).

Библиографический список

1. Large magnetic-field-induced strains in Ni_2MnGa single crystals / K. Ullakko, J.K. Huang, C. Kantner [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 1996. – Vol. 69, no. 13. – P. 1966–1968.
2. Shape memory effect due to magnetic field induced thermoelastic martensitic transformation in polycrystalline Ni-Mn-Fe-Ga alloy / A.A. Cherechukin, I.E. Dikstein, I.E. Ermakov [et al.] // Phys. Lett. A. – 2001. – Vol. 291, no. 2–3. – P. 175–183.

3. Ферромагнетики с памятью формы / А.Н. Васильев [и др.] // Успехи физических наук. – 2003. – Т. 173, № 6. – С. 577–607.

4. Малыгин Г.А. Теория эффектов магнитной памяти формы и псевдоупругой деформации в сплавах Ni-Mn-Ga // Физика твердого тела. – 2009. – Т. 51, № 8. – С. 1599–1603.

5. Kiefer B., Lagouda D.C. Phenomenological modeling of ferromagnetic shape memory alloys // Proc. SPIE Smart Structures and Materials: Active Materials: Behavior and Mechanics. – San Diego, CA, July 21, 2004.

6. Rogovoy A.A. Formalized approach to construction of the state equations for complex media under finite deformations // Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2012. – Vol. 24, no. 2. – P. 81–114.

7. Роговой А.А. Определяющие соотношения для конечных упруго-неупругих деформаций // Прикладная математика и техническая физика. – 2005. – Т. 46, № 5. – С. 138–149.

8. Роговой А.А. Кинематика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // Прикладная математика и техническая физика. – 2008. – Т. 49, № 1. – С. 165–172.

9. Трудселл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Мир, 1975. – 585 с.

10. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.

11. Райхер Ю.Л., Столбов О.В., Степанов Г.В. Деформация круговой мембраны из ферроэласти в однородном магнитном поле // Журнал теоретической физики. – 2008. – Т. 78, № 9. – С. 69–76.

12. Мовчан А.А., Шелымагин П.В., Казарина С.А. Определяющие уравнения для двухэтапных термоупругих фазовых превращений // Прикладная математика и техническая физика. – 2001. – Т. 42, № 5. – С. 152–160.

13. Роговой А.А., Столбова О.С. Моделирование упруго-неупругих процессов при конечных деформациях в сплавах с памятью формы // Прикладная математика и техническая физика. – 2013. – Т. 54, № 2. – С. 148–162.

14. Мовчан А.А. Учет переменности упругих модулей и влияния напряжений на фазовый состав в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. Механика твердых тел. – 1998. – № 1. – С. 79–90.

15. Training of the Ni–Mn–Fe–Ga ferromagnetic shape-memory alloys due cycling in high magnetic field / А.А. Cherechukin,

V.V. Khovailo, R.V. Kuposov [et al.] // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. – 2003. – Vol. 258–259. – P. 523–525.

References

1. Ullakko K., Huang J.K., Kantner C. [et al.] Large magnetic-field-induced strains in Ni₂MnGa single crystals // *Appl. Phys. Lett.*, 1996, vol. 69, no. 13, pp. 1966-1968.

2. Cherechukin A.A., Dikstein I.E., Ermakov I.E. [et al.] Shape memory effect due to magnetic field induced thermoelastic martensitic transformation in polycrystalline Ni-Mn-Fe-Ga alloy // *Phys. Lett. A.*, 2001, vol. 291, no. 2-3, pp. 175-183.

3. Ferromagnetiki s pamiat'iu formy [Shape memory ferromagnets] / A.N. Vasil'ev [et al.] // *Uspekhi fizicheskikh nauk*, 2003, vol. 173, no. 6, pp. 577-607.

4. Malygin G.A. Theory of magnetic shape memory effect and pseudoelastic deformation in Ni-Mn-Ga alloys. *Physics of the Solid State*, 2009, vol. 51, no. 8, pp. 1694-1699.

5. Kiefer B., Lagouda D.C. Phenomenological modeling of ferromagnetic shape memory alloys. *Proc. SPIE Smart Structures and Materials: Active Materials: Behavior and Mechanics*. San Diego, CA, July 21, 2004.

6. Rogovoy A.A. Formalized approach to construction of the state equations for complex media under finite deformations. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 2012, vol. 24, no. 2, pp. 81-114.

7. Rogovoi A.A. Constitutive relations for finite elastic–inelastic deformation. *Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2005, vol. 46, no. 5, pp. 730-739.

8. Rogovoi A.A. Kinematics of finite-strain elastic–inelastic deformation. *Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2008, vol. 49, no. 1, pp. 136-141.

9. Trusdell C. A. A First course in rational continuum mechanics. J. Hopkins Univ., Baltimore, 1972.

10. Lur'e A.I. Nelineinaya teoriya uprugosti [Nonlinear elasticity theory]. Moscow: Nauka, 1980. 512 p.

11. Raikher Yu.L., Stolbov O.V., Stepanov G.V. Deformatsiia krugovoi membrany iz ferroelasta v odnorodnom magnitnom pole [Deformation of a circular ferroelastic membrane in a uniform magnetic field]. *Technical physics. The Russian journal of applied physics*, 2008, vol. 53, no. 9, pp. 1169-1176.

12. Movchan A.A., Shelymagin P.V., Kazarina S.A. Constitutive equations for two-step thermoelastic phase transformations. *Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2001, vol. 42, no 5, pp. 152-160.

13. Rogovoi A.A., Stolbova O.S. Modeling elastic-inelastic processes in shape memory alloys at finite deformations. *Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2013, vol. 54, no. 2, pp. 295-307.

14. Movchan A.A. Uchet peremennosti uprugikh modulei i vliianiia napriazhenii na fazovyi sostav v splavakh s pamiat'iu formy [Account of the elastic moduli variability and the effect of stress on the phase compositions of shape memory alloys]. *Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdykh tel*, 1998, no. 1, pp. 79-90.

15. Cherechukin A.A., Khovailo V.V., Kopusov R.V. [et al.] Training of the Ni–Mn–Fe–Ga ferromagnetic shape-memory alloys due cycling in high magnetic field. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2003, vol. 258-259, pp. 523-525.

Об авторах

Роговой Анатолий Алексеевич (Пермь, Россия) – доктор физико-математических наук, профессор, зав. лабораторией нелинейной механики деформируемого твердого тела Института механики сплошных сред УрО РАН (614013, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1, e-mail: rogovoy@icmm.ru).

Столбова Ольга Серафимовна (Пермь, Россия) – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории нелинейной механики деформируемого твердого тела Института механики сплошных сред УрО РАН (614013, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1, e-mail: sos@icmm.ru).

About the authors

Anatolii A. Rogovoi (Perm, Russian Federation) – Doctor of Technical Sciences, Professor, Institute of Continuous Media Mechanics of Ural Branch of Russian Academy of Sciences (1, Academician Korolev st., Perm, 614013, Russian Federation, e-mail: rogovoy@icmm.ru).

Olga S. Stolbova (Perm, Russian Federation) – Ph.D. in Physical and Mathematical Sciences, Research Fellow, Institute of Continuous Media Mechanics of Ural Branch of Russian Academy of Sciences (1, Academician Korolev st., Perm, 614013, Russian Federation, e-mail: sos@icmm.ru).