

УДК 531

О.Ю. Сметанников, Л.Р. Шаяхметова

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь, Россия

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ В ШЛИЦЕВОМ ЭВОЛЬВЕНТНОМ СОЕДИНЕНИИ

Рассмотрено решение задачи о контактном взаимодействии в шлицевом эвольвентном соединении. Приведена математическая постановка задачи о взаимодействии двух упругих тел. Исследована сходимость численного решения. Представлены основные полученные результаты решения в виде полей интенсивности напряжений и зависимости площади пятна контакта и контактного давления от величины внешнего нагружения.

Ключевые слова: шлицевое эвольвентное соединение, численное решение, контактная задача, прочность.

O.Iu. Smetannikov, L.R. Shaikhmetova

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

NUMERICAL SOLUTION PROBLEM OF THE CONTACT INTERACTION IN THE INVOLUTE SPLINED CONNECTION

The solution problem of the contact interaction in the involute splined connection is considered. The mathematical formulation of the problem of interaction of two elastic bodies is represented. The convergence of the numerical solution is investigated. The main results of the solution are presented in the form of the stress intensity fields and depending of contact area and contact pressure on external load value.

Keywords: involute splined connection, numerical solution, contact problem, strength.

Введение

В современном машиностроении широко применяются шлицевые соединения; их можно встретить в различных областях, таких как газоперекачивающая и нефтедобывающая промышленность, оборонно-промышленный комплекс.

К достоинствам шлицевых соединений можно отнести способность точно центрировать соединяемые детали, большую несущую способность вследствие большой суммарной площади контакта, взаимозаменяемость (нет необходимости в ручной пригонке). Главным недостатком является сложная технология изготовления, а следовательно, и более высокая стоимость.

Опыт эксплуатации различных агрегатов показывает, что часть отказов в работе обусловлена поломкой валов в шлицевом соединении. Разрушение происходит либо по усталостному механизму при переменной нагрузке, либо по механизму пластического деформирования при превышении критического значения напряжения.

В настоящее время расчет работоспособности шлицевого соединения при проектировании производится инженерными методами [1, 2 и др.]. В ряде случаев необходимо подтверждение работоспособности соединения в условиях критического нагружения, поэтому в подобных случаях инженерные методы не применимы. В данной работе расчет прочности шлицевых соединений валов проводится на основе численного решения уравнений механики деформированного твердого тела.

1. Общая математическая постановка задачи

В общем случае математическая постановка задачи о контактном взаимодействии двух упругих тел включает в себя:

уравнения равновесия [3]:

$$\operatorname{div} \hat{\sigma} = 0, \quad \bar{x} \in V, \quad (1)$$

геометрические соотношения:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\nabla \bar{u} + (\nabla \bar{u})^T \right), \quad \bar{x} \in V, \quad (2)$$

физические соотношения:

$$\hat{\sigma} = \lambda I_1(\hat{\varepsilon}) \hat{I} + 2\mu \hat{\varepsilon}, \quad \bar{x} \in V, \quad (3)$$

где λ и μ – параметры Ламе; $\hat{\sigma}$ – тензор напряжений; $\hat{\varepsilon}$ – тензор деформаций; \bar{u} – вектор перемещений; \bar{x} – радиус-вектор произвольной точки; $I_1(\hat{\varepsilon})$ – первый инвариант тензора деформаций; \hat{I} – единичный тензор; V_1 – область 1-го тела; V_2 – область 2-го тела, соответственно $V = V_1 \cup V_2$.

Система уравнений (1)–(3) дополнена условиями взаимодействия на поверхности контакта S_K , рассмотрен случай полного сцепления:

$$\vec{u}_c^1 = \vec{u}_c^2, \hat{\sigma}_n^1 = \hat{\sigma}_n^2, \hat{\sigma}_{n\tau_1}^1 = \hat{\sigma}_{n\tau_1}^2, \hat{\sigma}_{n\tau_2}^1 = \hat{\sigma}_{n\tau_2}^2, \quad (4)$$

где τ_1, τ_2 – условные обозначения координатных осей, лежащих в плоскости, касательной к поверхности контакта; \vec{u}_c^1, \vec{u}_c^2 – перемещения точек, вошедших в контакт, с момента сцепления; $\hat{\sigma}_n$ – напряжение по нормали к контактной границе; $\hat{\sigma}_{n\tau_1}, \hat{\sigma}_{n\tau_2}$ – касательные напряжения на контактной границе.

2. Проверка сходимости численного решения задачи о контактном взаимодействии двух упругих тел

В качестве тестовой задачи для исследования сходимости численного решения рассмотрена задача о вдавливании упругого шара на упругую плоскость.

Данная задача имеет аналитическое решение [4]. Численное решение рассматривается в осесимметричной постановке. В качестве материала шара и упругого пространства выбрана сталь. На рис. 1 приведена зависимость контактного давления от радиуса пятна контакта, полученная аналитически и численно.

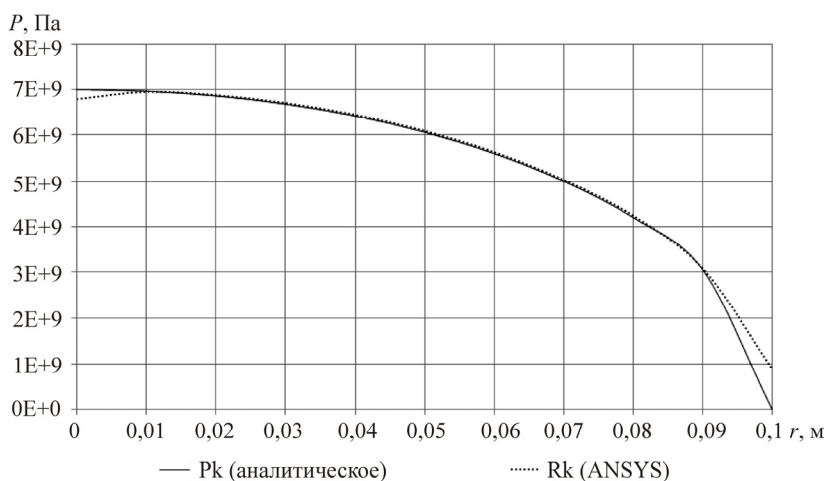


Рис. 1. Зависимость контактного давления от радиуса пятна контакта

При сравнении результатов численного и аналитического решения наблюдается сходимость контактного давления. При общем числе узловых неизвестных около 80 тыс. и 25 элементах в зоне контакта погрешность контактного давления не превышает 3 %. При дальнейшем измельчении сетки величина зоны контакта будет уточняться, а распределение контактного давления будет стремиться к аналитическому решению. Таким образом, в рамках тестовой задачи показана сходимость численного алгоритма решения задачи контактного взаимодействия.

3. Исследование возможности рассмотрения сегмента периодичности

Для экономии вычислительных и временных ресурсов рассмотрена возможность перехода к сегменту периодичности соединения, состоящего из одного зуба и впадины. Для подтверждения данного перехода была проанализирована упругая задача в рамках гипотез о плоскодеформированном состоянии. Определялись два расчетных случая. В первом случае смоделировано полное сечение шлицевого соединения, во втором случае рассмотрен сегмент периодичности.

Система уравнений (1)–(4) дополняется начальными условиями:

$$\begin{aligned} \bar{u}_\varphi &= \bar{u}_0, \quad \bar{x} \in S_\Gamma, \\ \bar{u}_\varphi &= 0, \quad \bar{x} \in S_{\Gamma_1}, \end{aligned} \quad (5)$$

где \bar{u}_φ – угловые перемещения на внутреннем диаметре вала; \bar{u}_0 – начальные перемещения, заданные таким образом, чтобы обеспечился крутящий момент M , равный 4 кН·м. Внешний диаметр муфты закрепляется в направлении \bar{u}_φ .

В модели с сегментом периодичности начальные условия дополняются условиями периодичности.

Оценка сходимости решений проводится по интенсивности напряжений по Мизесу. Результаты расчета в виде распределения интенсивности напряжений вдоль образующей шлица представлены на рис. 2.

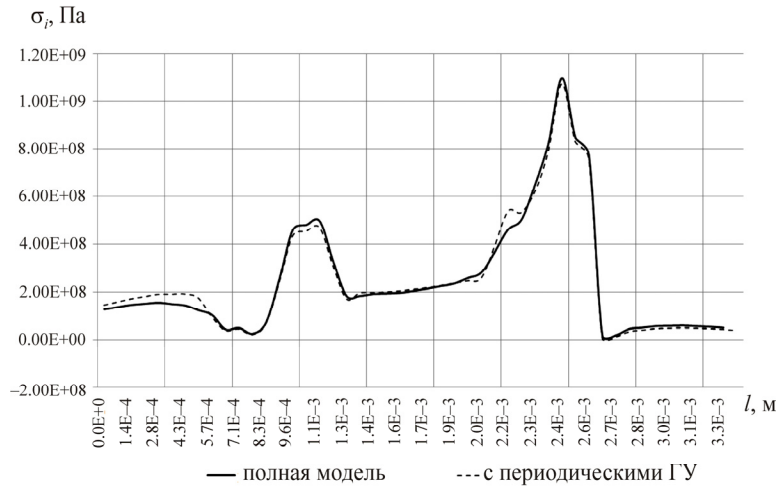


Рис. 2. Распределение интенсивности напряжений в поперечном направлении шлица (l – криволинейная координата поверхности зуба, см. рис. 5)

Из анализа результатов видно, что рассмотрение сегмента периодичности дает полную сходимость решения (отклонения лежат в пределах 3 %) с моделью с полным сечением.

Таким образом, для рационализации временных и вычислительных затрат при численном определении НДС рекомендуется рассматривать сегмент периодичности.

4. Численное исследование НДС соединения

В итоге общая постановка задачи определения НДС шлицевого эвольвентного соединения включает соотношения (1)–(4), кроме того, дополняется граничными условиями на торце вала S_1 и торце муфты S_2 :

$$\int_{S_1} p_y dS_1 = F_y, \quad \bar{x} \in S_1,$$

$$\vec{u}_z = 0, \quad \bar{x} \in S_1,$$

$$\vec{u} = 0, \quad \bar{x} \in S_2,$$
(6)

где S_1 – поверхность, к которой прикладывается сила; F_y – приложенные сдвигающие усилия.

$$F_y = \frac{M}{N_c n R_m},$$
(7)

где M – крутящий момент; N_c – количество узлов на торцевой поверхности; n – число зубьев; R_m – средний радиус.

На рис. 3 представлена расчетная схема рассматриваемого шлицевого соединения.

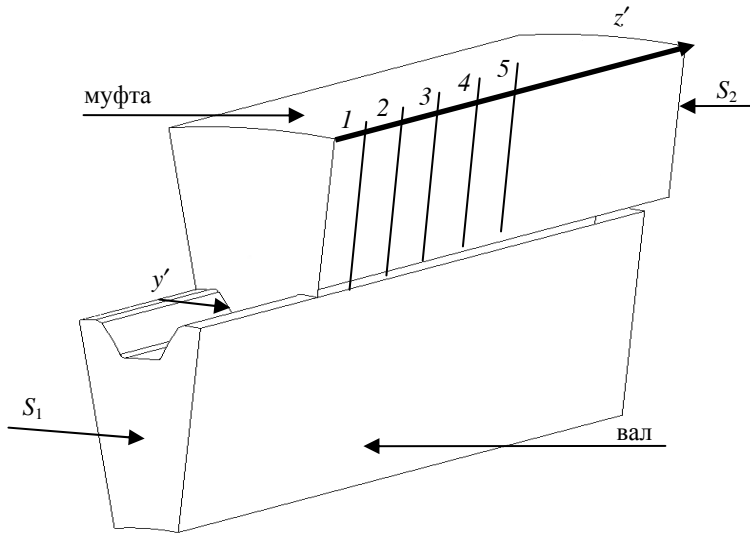


Рис. 3. Модель с граничными условиями

Для построения КЭ-аналога использовался трехмерный 20-узловой элемент Solid 186. Контактная пара реализована с использованием элементов Targe 170 и Conta 174. Результаты расчета в виде полей интенсивностей напряжений по Мизесу и распределения контактного давления представлены на рис. 4.

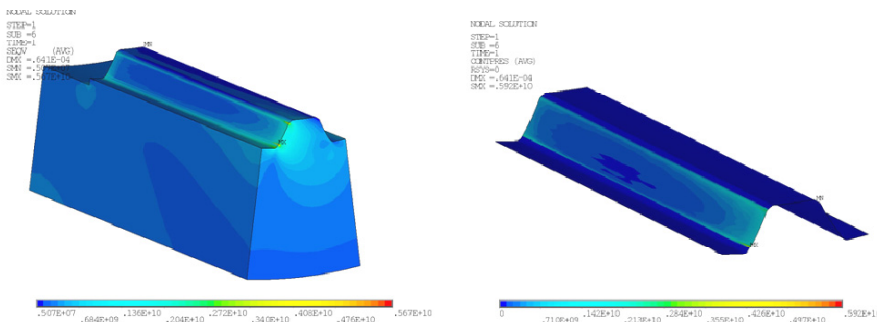


Рис. 4. Результаты численного решения задачи о контактном взаимодействии: *а* – интенсивность напряжений в зубе муфты; *б* – контактное давление на поверхности зуба муфты

Из анализа результатов очевидно, что усилие от крутящего момента вала передается на муфту по поверхности, образованной путем экструдирования эвольвенты по длине зуба (далее – поверхность эвольвенты). Контактное давление на поверхности эвольвенты распределено по полиномиальной зависимости, коррелирующей с координатами образующей; на остальной поверхности зуба контактного давления нет. При этом максимальные значения давления сосредоточены в крайних точках эвольвенты, а в основной части значения равномерно убывают к середине, где достигают минимального значения.

На рис. 5 представлена зависимость площади пятна контакта от крутящего момента, а также зависимость контактного давления в разных точках взаимодействующих поверхностей.

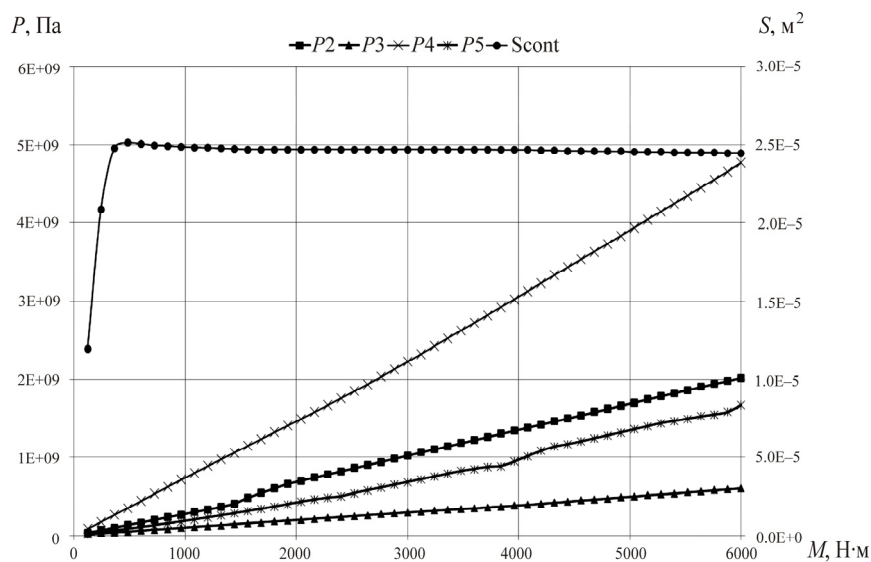


Рис. 5. Зависимость контактного давления и площади контактного пятна от крутящего момента

Видно, что начиная с $M = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}$ площадь пятна контакта не изменяется. Давление линейно возрастает, незначительные участки нелинейности можно объяснить погрешностью численного расчета. Отсюда следует, что характер распределения нагрузки не изменяется и полученные результаты линейно зависят от уровня внешнего нагружения. Поэтому для экономии времени, полагаясь на результа-

ты расчета при одном моменте, можно путем линейной интерполяции получить решение задачи для любого крутящего момента из интервала 500–6000 Нм.

Выводы

В результате исследования произведена математическая постановка задачи о контактном взаимодействии двух упругих тел, определены граничные условия. Осуществлена проверка сходимости принятых гипотез с аналитическим решением на примере тестовой задачи. Исследована возможность перехода к рассмотрению сегмента периодичности (зуб и впадина) вместо полного сечения соединения. Кроме того, анализ результатов расчета показал, что результаты решения контактной задачи можно линейно интерполировать, тем самым уйти от необходимости решения отдельных контактных задач при различных уровнях нагрузки.

Библиографический список

1. Рощин Г.И. Детали машин и основы конструирования: учебник для вузов. – М.: Дрофа, 2006. – 415 с.
2. Орлов П.И. Основы конструирования: справ.-метод. пособие: в 3 кн. Кн. 2. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1977. – 574 с.
3. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
4. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 509 с.

References

1. Roshchin G.I. Detali mashin i osnovy konstruirovaniia [Machine parts and design principles]. Moscow: Drofa, 2006. 415 p.
2. Orlov P.I. Osnovy konstruirovaniia [Design principles]. Moscow: Mashinostroenie, 1977. 574 p.
3. Timoshenko S.P., Gud'er Dzh. Teoriia uprugosti [Theory of Elasticity]. Moscow: Nauka, 1979. 560 p.
4. Dzhonson K. Mekhanika kontaktnogo vzaimodeistviia [Mechanics of contact interaction]. Moscow: Mir, 1989. 509 p.

Об авторах

Сметанников Олег Юрьевич – доктор технических наук, доцент кафедры вычислительной математики и механики Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: sou2009@mail.ru).

Шаяхметова Ляйсан Рамилевна – инженер, аспирант кафедры вычислительной математики и механики Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: lyaysans@list.ru).

About the authors

Oleg Iu. Smetannikov (Perm, Russian Federation) – Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Computational Mathematics and Mechanics, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: sou2009@mail.ru).

Liaisan R. Shaiakhmetova (Perm, Russian Federation) – Post-graduate student, Department of Computational Mathematics and Mechanics, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: lyaysans@list.ru).