Постаногова, И. Ю. Об асимптотических свойствах функции Коши автономного функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа с распределенным запаздыванием / И. Ю. Постаногова // Прикладная математика и вопросы управления. – 2024. – № 1. – С. 8–28. – DOI 10.15593/2499-9873/2024.1.01

Библиографическое описание согласно ГОСТ Р 7.0.100–2018
Постаногова, И. Ю. Об асимптотических свойствах функции Коши автономного функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа с распределенным запаздыванием / И. Ю. Постаногова. – Текст : непосредственный // Прикладная математика и вопросы управления / Applied Mathematics and Control Sciences. – 2024. – № 1. – С. 8–28. – DOI 10.15593/2499-9873/2024.1.04

пермский политех

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ВОПРОСЫ УПРАВЛЕНИЯ
№ 1, 2024
https://ered.pstu.ru/index.php/amcs

Научная статья
DOI: 10.15593/2499-9873/2024.1.01
УДК 517.929

Об асимптотических свойствах функции Коши автономного функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа с распределенным запаздыванием

И.Ю. Постаногова[1,2]

[1]Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Российская Федерация
[2]Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 27 января 2024
Одобрена: 01 февраля 2024
Принята к публикации: 05 февраля 2024

Финансирование
Исследование не имело спонсорской поддержки.
Конфликт интересов
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.
Вклад автора
100 %.

Ключевые слова:
функционально-дифференциальное уравнение, уравнение нейтрального типа, фундаментальное решение, функция Коши, формула представления решения, устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость, экспоненциальная устойчивость.

АННОТАЦИЯ

Исследована устойчивость по начальной функции линейного автономного функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа. Анализируется устойчивость по Ляпунову, асимптотическая и сильная асимптотическая, а также экспоненциальная устойчивость уравнения и их взаимосвязь. Определения всех типов устойчивости формулируются в терминах функции Коши – функции, позволяющей в явном виде записать общее решение уравнения. Основное внимание уделено исследованию устойчивости по начальной функции из пространств суммируемых функций. Используется известное представление решения функционально-дифференциального уравнения с помощью интегрального оператора, ядром которого является функция Коши.

Вопросы устойчивости исследуются для уравнения с кратным запаздыванием при производной и распределенным запаздыванием при неизвестной функции. Показано, что для такого уравнения сохраняются все свойства, ранее доказанные для уравнения с кратным запаздыванием при неизвестной функции. А именно показано, что сильная асимптотическая устойчивость рассматриваемого уравнения с начальной функцией из пространства L_1 эквивалента экспоненциальной оценки функции Коши, кроме того, из любого из этих свойств следует экспоненциальная устойчивость по начальной функции в любом из пространств L_p при $1 \leq p \leq \infty$. При этом, как и для уравнения с кратными запаздываниями, сильная асимптотическая устойчивость в пространстве L_p для некоторого $p > 1$ может не быть равносильной экспоненциальной устойчивости.

© **Постаногова Ирина Юрьевна** – ассистент Института компьютерных наук и технологий ПГНИУ; аспирант кафедры «Вычислительная математика, механика и биомеханика» ПНИПУ, e-mail: ipostanogova@psu.ru, ORCID: 0009-0003-7014-2426

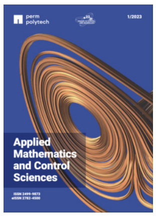
Perm Polytech Style: Postanogova I.Yu. On asymptotic properties of the Cauchy function for autonomous functional differential equation of neutral type with distributed delay. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2024, no. 1, pp. 8–28. DOI: 10.15593/2499-9873/2024.1.01

MDPI and ACS Style: Postanogova, I.Yu. On asymptotic properties of the Cauchy function for autonomous functional differential equation of neutral type with distributed delay. *Appl. Math. Control Sci.* **2024, 1**, 8–28. https://doi.org/10.15593/2499-9873/2024.1.01

Chicago/Turabian Style: Postanogova Irina Yu. 2024. "On asymptotic properties of the Cauchy function for autonomous functional differential equation of neutral type with distributed delay". *Appl. Math. Control Sci.* no. 1: 8–28. https://doi.org/10.15593/2499-9873/2024.1.01

perm polytech

APPLIED MATHEMATICS AND CONTROL SCIENCES
№ 1, 2024
https://ered.pstu.ru/index.php/amcs



Article
DOI: 10.15593/2499-9873/2024.1.01
UDC 517.929

On asymptotic properties of the Cauchy function for autonomous functional differential equation of neutral type with distributed delay

I.Yu. Postanogova[1,2]

[1]Perm State National Research University, Perm, Russian Federation
[2]Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 27 January 2024
Approved: 01 February 2024
Accepted for publication: 05 February 2024

Funding
This research received no external funding.
Conflicts of Interest
The author declares no conflict of interest.
Author Contributions
100 %.

Keywords:
functional-differential equation, neutral type equation, fundamental solution, Cauchy function, solution representation formula, Lyapunov stability, asymptotic stability, exponential stability.

ABSTRACT

In this paper we investigate stability with respect to the initial function of a linear autonomous functional differential equation of neutral type. Lyapunov stability, asymptotic and strong asymptotic as well as exponential stability of the equation and their interrelation are studied. The definitions of all types of stability are formulated in terms of the Cauchy function, a function that allows the general solution of the equation to be written down explicitly. The main attention is paid to the study of stability with respect to the initial function from the spaces of integrable functions. We use a well-known representation of the solution of a functional differential equation as an integral operator with Cauchy function as a kernel.

Stability issues are considered for an equation with commensurable delays at the derivative and distributed delay at the unknown function. It is shown that for such an equation all the properties previously proved for the equation with commensurable delays at the unknown function are preserved. Namely, it is shown that the strong asymptotic stability of the considered equation with an initial function from the space L_1 is equivalent to the exponential evaluation of the Cauchy function, and moreover, any of these properties entails exponential stability on the initial function in any of the spaces L_p for $1 \leq p \leq \infty$. In this case, as for the equation with commensurable delays, strong asymptotic stability in the L_p space for some $p > 1$ may not be equivalent to exponential stability.

© **Irina Yu. Postanogova** – Teaching Assistant of the Institute of Computer Science and Technologies at the PSU; Ph.D. Student of the Department of Computational Mathematics, Mechanics and Biomechanics at the PNRPU, e-mail: ipostanogova@psu.ru, ORCID: 0009-0003-7014-2426

Введение

Статья посвящена вопросам устойчивости по начальной функции линейного автономного функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа. Эта работа продолжает исследование, проведенное в [1], распространяя полученные там результаты для уравнения с соизмеримыми запаздываниями на случай распределенного запаздывания по неизвестной функции.

Исследование опирается на результаты и следует традициям научной школы профессора Н.В. Азбелева [2]. Рассматриваемое уравнение записывается в операторном виде, а начальная функция считается частью внешнего возмущения. Главным объектом при исследовании асимптотического поведения решений уравнения является его функция Коши, так как она содержит информацию обо всех решениях этого уравнения. Любое решение функционально-дифференциального уравнения может быть представлено с помощью формулы Коши, содержащей фундаментальное решение – решение соответствующего однородного уравнения с единичными начальными условиями, и интегральный оператор, действующий на функцию внешнего возмущения. Ядром интегрального оператора является функция Коши. Такой способ представления решения позволяет изучать асимптотические свойства всех решений рассматриваемого функционально-дифференциального уравнения на основе свойств функции Коши.

Если рассматривать устойчивость в классическом понимании, т.е. как непрерывную зависимость решения от начальных данных, то для всех функционально-дифференциальных уравнений определения устойчивости формально должны учитывать вид пространства начальных функций $\mathbb{X} \subseteq L_1[0,\omega]$, которое разными исследователями выбирается по-разному. Это связано, прежде всего, с определением и выбором пространства решений.

В большинстве работ [3–6] начальные функции считают непрерывно дифференцируемыми; в исследованиях, где используется техника гильбертовых пространств [6–8], начальные функции выбирают из пространств Соболева, в работе [9] начальные функции принадлежат L_1 – самому широкому из Лебеговых пространств, в [10; 11] рассматривались случаи $\mathbb{X} = L_p[0,\omega]$ при всех $p \geq 1$.

Пока речь идет об уравнениях запаздывающего типа такой разброс формулировок мало влияет на возможность использовать и сравнивать между собой результаты разных школ. Причина проста: уравнения запаздывающего типа сохраняют свойство устойчивости (соответственно, неустойчивости) при выборе в качестве пространства начальных функций любого банахова подпространства $\mathbb{X} \subseteq L_1[0,\omega]$ от нулевого до всего $L_1[0,\omega]$.

Ситуация существенно меняется при исследовании уравнений нейтрального типа, для которых подобные приведенному выше результаты не очевидны и вопрос о связи результатов, полученных разными исследователями, становится актуальным.

1. Описание объекта исследования

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных, $\mathbb{Z}$ – целых, $\mathbb{R}$ – действительных и $\mathbb{C}$ – комплексных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$. Для измеримого множества $E \subset \mathbb{R}_+$ обозначим через $L_p(E)\,(1 \leq p < +\infty)$ пространства функций, суммируемых со степенью p, а через $L_\infty(E)$ – пространство измеримых и ограниченных в существенном функций с естественными нормами. Для единичного (тождественного) и нулевого оператора будем использовать символы I и Θ соответственно. Открытый и замкнутый круги с центром $a \in \mathbb{C}$ и радиусом $r \in \mathbb{R}_+$ обозначим $B(a,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\}$ и $B[a,r] = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \le r\}$.

Постановка задачи

Рассмотрим линейное функционально-дифференциальное уравнение нейтрального типа с распределенным запаздыванием:

$$\dot{x}(t) - \sum_{k=1}^{K} a_k \dot{x}(t-kh) = \int_0^t x(t-\xi)\,dr(\xi) + f_1(t),\ t \in \mathbb{R}_+ \tag{1}$$

где $a_k \in \mathbb{R},\ h > 0,\ K \in \mathbb{N},\ f_1(t)$ – локально суммируемая функция, а $r(\xi)$ – функция с ограниченной вариацией, отличная от нуля только на отрезке $[0, \omega_0]$. Это условие позволит ограничить величину запаздывания. Интеграл в правой части понимается в смысле Римана – Стилтьеса.

Решением уравнения (1) назовем абсолютно непрерывную функцию $x: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду.

Для однозначного определения решения уравнение (1) необходимо дополнить начальными функциями. Для этого положим

$$x(t) = \varphi(t),\ \dot{x}(t) = \psi(t),\ t \in [-\omega, 0),$$

где $\omega = \max(\omega_0, Kh)$. Не будем требовать, чтобы $\varphi(0) = x(0)$ и $\dot{\varphi}(t) = \psi(t)$; как показано в [2], эти условия не являются обязательными для корректного определения решения.

Обозначим через S_h *оператор сдвига*:

$$(S_h y)(t) = \begin{cases} y(t-h), & t \ge h_0, \\ 0, & t < h. \end{cases}$$

Иными словами, $(S_h y)(t) = y(t-h) \cdot \chi_{[h,+\infty)}(t)$. Очевидно, что

$$\left(S_h^k y\right)(t) = (S_{kh} y)(t) = \begin{cases} y(t-kh), & t \ge kh, \\ 0, & t < kh. \end{cases}$$

Введем операторы S и T, определяемые формулами:

$$(Sy)(t) = \sum_{k=1}^{K} a_k \left(S_h^k y\right)(t);$$

$$(Ty)(t) = \int_0^t \left(S_\xi y\right)(t)\,dr(\xi).$$

Оператор S называется *оператором внутренней суперпозиции*. Определим операторы S, T на пространствах кусочно-непрерывных функций. Заметим, что если $y(0) \ne 0$, то функция $\left(S_\xi y\right)(t)$ имеет разрыв первого рода (скачок) в точке $t = \xi$, поскольку

$$\left(S_{\xi}y\right)(\xi-0)=0;$$
$$\left(S_{\xi}y\right)(\xi+0)=y(0)\neq 0.$$

Функция $r(t)$ может иметь скачок в этой же точке. Следовательно, интеграл Римана – Стилтьеса $\int_0^t \left(S_{\xi}y\right)(t)\,dr(\xi)$ может и не существовать. В этом случае представим функцию $r(t)$ в виде суммы абсолютно непрерывной функции $r_1(t)$ и функции скачков $r_2(t)$. Тогда интеграл заменится следующим представлением:

$$\int_0^t \left(S_{\xi}y\right)(t)\,r_1^{'}(t)\,dt+\sum_{m=0}^{M}c_m\left(S_{\xi m}y\right)(t),$$

где c_m – некоторые вещественные числа, $\xi_m \geq 0$. Функция $r_1(t)$ абсолютно непрерывна, так что интеграл в этом выражении существует. Кроме того, во всех дальнейших рассуждениях функция $\left(S_{\xi}y\right)(t)$ непрерывна слева, равна нулю при отрицательных значениях аргумента и на каждом конечном отрезке может иметь лишь конечное число скачков. Поэтому можно считать, что число M конечно и сумма тоже конечна. При вычислении этой суммы функция $\left(S_{\xi}y\right)(t)$ доопределяется по непрерывности. Таким образом, даже в случае, если $r(t)$ и $\left(S_{\xi}y\right)(t)$ имеют скачки в одной и той же точке, оператор T существует.

Операторный вид уравнения

Обозначим

$$f(t)=f_1(t)+\sum_{k=1}^{K}a_k\psi(t-kh)\chi_{(-\infty,kh)}(t)+\int_0^t\varphi(t-\xi)\cdot\chi_{(-\infty,\xi)}(t)\,dr(\xi), \qquad (2)$$

и перепишем уравнение (1) в операторной форме:

$$(I-S)\dot{x}=Tx+f. \qquad (3)$$

Операторный вид (3) уравнения (1) позволяет считать начальные функции $\varphi(t),\psi(t)$ частью внешнего возмущения $f(t)$. При этом из равенства (2) следует, что функция $f(t)$, так же, как и $f_1(t)$, обладает свойством локальной суммируемости.

Известно [2, с. 84], что решение уравнения (3) с произвольными значениями $x(0)$ и локально суммируемой функцией f представимо в виде:

$$x(t)=X(t)x(0)+\int_0^t Y(t-\xi)f(\xi)\,d\xi,\ t\in\mathbb{R}_+, \qquad (4)$$

где $X(t)$ – локально абсолютно непрерывная функция, называемая *фундаментальным решением*, а $Y(t)$ – *функция Коши* этого уравнения.

Фундаментальное решение $X(t)$ определяется как решение задачи однородного уравнения, соответствующего уравнению (1) с начальным условием $x(0)=1$. В операторном виде оно выглядит следующим образом:

$$(I-S)\dot{x}=Tx. \tag{5}$$

Функция Коши $Y(t)$ определяется как решение уравнения

$$y(t)=1+(Sy)(t)-(Ry)(t),$$

где $(Ry)(t)=\int_0^t y(t-s)r(s)\,ds.$ Кроме того, известно [12; 13], что фундаментальное решение и его производная выражаются через функцию Коши:

$$X(t)=(I-S)Y(t);\ \dot{X}(t)=(TY)(t). \tag{6}$$

Итак, согласно представлению решения (4) исследование функционально-дифференциального уравнения на устойчивость сводится к исследованию асимптотических свойств фундаментального решения и функции Коши. Из формул связи (6) этих функций следует, что свойства ограниченности, существования предела на бесконечности, экспоненциальные оценки для функций X и $\dot{X}$ следуют из аналогичных свойств функции Коши.

Исследование функции Коши на непрерывность

Рассмотрим первую из формул связи (6). Поскольку оператор S_h представляет собой оператор сдвига, то оператор $I-S=I-\sum_{k=1}^{K}a_kS_h^k$ обратим на любом конечном отрезке, и обратный к нему оператор можно записать с помощью ряда Неймана:

$$(I-S)^{-1}=I+S+S^2+\ldots S^n+\ldots\ .$$

Следовательно, при любом $t\in\mathbb{R}_+$

$$Y(t)=X(t)+(SX)(t)+\left(S^2X\right)(t)+\ldots+\left(S^nX\right)(t)+\ldots,$$

где

$$S=\sum_{k=1}^{K}a_kS_h^k=\sum_{k=1}^{K}a_kS_{kh};$$

$$S^2=\left(\sum_{k=1}^{K}a_kS_{kh}\right)^2=a_1^2S_{2h}+2a_1a_2S_{3h}+\left(2a_1a_3+a_2^2\right)S_{4h}+\ldots+a_K^2S_{2Kh}=\sum_{k=2}^{2K}b_kS_{kh}.$$

Здесь $b_k\ (k=1,\ldots,2K)$ – некоторые числа, однозначно определяемые по набору $\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$. Аналогично, для любого $m\in\mathbb{N}$

$$S^m=\sum_{k=m}^{mK}b_kS_{kh},$$

где $b_k \ (k = 1,\dots,mK)$ – некоторые константы. Поэтому если $t \in \left[nh,(n+1)h\right)$, то $S^m = \Theta$ при $m > n$, следовательно, при любом $t \in \left[nh,(n+1)h\right), n \in \mathbb{N}_0$:

$$Y(t) = X(t) + (SX)(t) + \left(S^2X\right)(t) + \ldots + \left(S^nX\right)(t). \tag{7}$$

Воспользовавшись тем фактом, что при отрицательных значениях аргумента $X(t) \equiv 0$, можно записать эту формулу в более наглядном виде:

$$Y(t) = X(t) + \sum_{k=1}^{nK} b_k X(t - kh), \ t \in \left[nh,(n+1)h\right).$$

Функция $X(t)$ абсолютно непрерывна на каждом конечном отрезке, поэтому из формулы (7) следует, что $Y(t)$ абсолютно непрерывна на каждом полуинтервале $\left[nh,(n+1)h\right)$ и имеет конечный предел при $t \to (n+1)h.$ В точках $t = nh$ функция Y имеет конечный скачок H_n. Определим величину этого скачка.

По определению в точке $t = 0$ функция Y имеет конечный скачок, равный $X(0) = 1.$ Поэтому, учитывая непрерывность фундаментального решения $X(t)$, имеем:

$$H_1 = Y(h+0) - Y(h-0) = X(h+0) + a_1 X(+0) - X(h-0) = a_1;$$

$$H_2 = Y(2h+0) - Y(2h-0) = \left(I + SX + (SX)^2\right)(2h+0) -$$

$$-(I + SX)(2h-0) = a_1^2 + a_2 = a_1 H_1 + a_2;$$

$$H_3 = Y(3h+0) - Y(3h-0) = \left(I + SX + (SX)^2 + (SX)^3\right) \times$$

$$\times (3h+0) - \left(I + SX + (SX)^2\right)(3h-0) = a_1^3 + 2a_1 a_2 + a_3 =$$

$$= a_1\left(a_1^2 + a_2\right) + a_2 a_1 + a_3 = a_1 H_2 + a_2 H_1 + a_3.$$

Продолжая вычисления, получаем рекуррентное уравнение для определения величины скачка:

$$H_n = \sum_{k=1}^{K} a_k H_{n-k}, \, n \in \mathbb{N};$$

$$H_0 = 1; \, H_{-n} = 0, \, n \in \mathbb{N}.$$

Характеристическая функция уравнения

В силу результатов, полученных в [13], к уравнению (3) и соответствующему однородному уравнению (5) применимо преобразование Лапласа. Выполним его. Пусть $x(t) \risingdotseq F(\lambda)$, где функция $F(\lambda)$ определена в полуплоскости $Re(\lambda) > \alpha$ при некотором $\alpha > 0.$ Тогда, пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала и теоремой смещения, получаем

$$\dot{x}(t) \risingdotseq \lambda F(\lambda) - x(0) = \lambda F(\lambda) - 1;$$

$$\left(S_{kh}x\right)(t) \risingdotseq e^{-kh\lambda}\left(\lambda F(\lambda) - 1\right) = \lambda e^{-kh\lambda} F(\lambda) - e^{-kh\lambda}, \forall k \in \{1,\dots,K\};$$

Лаплас-образ правой части уравнения (7) вычислим по определению:

$$(Tx)(t)=\int_0^t x(t-\xi)\,dr(\xi) \div \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\left(\int_0^t x(t-\xi)\,dr(\xi)\right)dt=$$
$$=\int_0^t\left(\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}x(t-\xi)\,dt\right)dr(\xi)=F(\lambda)\int_0^t e^{-\lambda\xi}\,dr(\xi).$$

Перестановка интегралов обоснована теоремой Фубини [14, с. 318]. Итак, изображение уравнения (7) выглядит следующим образом:

$$\lambda F(\lambda)-1-\sum_{k=1}^{K}a_k\left(\lambda e^{-kh\lambda}F(\lambda)-e^{-kh\lambda}\right)=F(\lambda)\int_0^t e^{-\lambda\xi}\,dr(\xi),$$

откуда

$$\left(\lambda\left(1-\sum_{k=1}^{K}a_k e^{-kh\lambda}\right)-\int_0^t e^{-\lambda\xi}\,dr(\xi)\right)F(\lambda)=1-\sum_{k=1}^{K}a_k e^{-kh\lambda}.$$

Выражение

$$g(\lambda)=\lambda\left(1-\sum_{k=1}^{K}a_k e^{-kh\lambda}\right)-\int_0^t e^{-\lambda\xi}\,dr(\xi).$$

называется *характеристической функцией* уравнений (1) и (3).

Обозначим $g_S(\lambda)=\sum_{k=1}^{K}a_k e^{-kh\lambda}$, $g_T(\lambda)=\int_0^t e^{-\lambda\xi}\,dr(\xi)$ и получим характеристическую функцию в следующем виде:

$$g(\lambda)=\lambda\left(1-g_S(\lambda)\right)-g_T(\lambda). \tag{8}$$

В работах А.С. Баландина были найдены условия [12, теорема 3] и [13, теорема 4], связывающие расположение корней характеристической функции (8), обратимость оператора $I-S$ и экспоненциальные оценки функции Коши уравнения (1). Приведем их в удобной для нас формулировке.

Предложение 1. *Функция Коши уравнения (1) имеет при некоторых* $N,\gamma>0$ *экспоненциальную оценку*

$$\left|Y(t)\right|\le Ne^{-\gamma t} \tag{9}$$

тогда и только тогда, когда оператор $I-S$ *имеет в пространстве* $L_p(\mathbb{R}_+)$ *обратный и все нули характеристической функции* $g(\lambda)$ *лежат слева от мнимой оси.*

Поскольку оператор $I-S$ представляет собой линейную комбинацию операторов сдвига, то он обратим на любом конечном отрезке. Здесь же речь идет об обратимости этого оператора на полуоси и, конечно, мы не можем утверждать, что некоторая степень оператора S дает нулевой оператор. Поэтому нельзя сказать, что оператор $I-S$ всегда обратим. Для его обратимости нужно будет установить дополнительные условия на параметры уравнения. В этом нам поможет следующая теорема.

Предложение 2. *Оператор* $I-S$ *имеет в пространстве* $L_p\left(\mathbb{R}_+\right)$ *обратный тогда и только тогда, когда все корни уравнения*

$$1-g_S\left(\lambda\right)=0 \tag{10}$$

расположены слева от мнимой оси.

2. Устойчивость по начальной функции из заданного пространства

На уравнение (1) без изменений переносятся все определения устойчивости, представленные в [1].

Пусть $\mathbb{X}\subseteq L_1\left[0,\omega\right]$ – произвольное нормированное пространство измеримых на промежутке $\left[0,\omega\right]$ функций.

Определение 1. *Уравнение (1) называется -устойчивым (по Ляпунову), если для любого* $\varepsilon>0$ *существует* $\delta>0$, *что при любых начальных данных* $f\in\mathbb{X}, x\left(0\right)\in\mathbb{R}$, *таких, что* $\left|x\left(0\right)\right|<\delta$ *и* $\|f\|_{\mathbb{X}}<\delta$, *справедлива оценка* $\sup_{t\geq0}\left|x\left(t\right)\right|<\varepsilon$.

Определение 2. *Уравнение (1) называется асимптотически -устойчивым, если оно* $\mathbb{X}$*-устойчиво и при любых начальных данных* $f\in\mathbb{X}$ *и* $x\left(0\right)\in\mathbb{R}$ *решение уравнения (1) обладает свойством* $\lim_{t\to+\infty}x\left(t\right)=0$.

Определение 3. *Уравнение (1) называется экспоненциально-устойчивым, если существуют такие постоянные* $N,\gamma>0$, *что при любых начальных данных* $f\in\mathbb{X}$ *и* $x\left(0\right)\in\mathbb{R}$ *для решения уравнения (1) справедлива оценка* $\left|x\left(t\right)\right|\leq Ne^{-\gamma t}\left(\left|x\left(0\right)\right|+\|f\|_{\mathbb{X}}\right)$ *при любом* $t\geq0$.

Кроме того, переносятся все теоремы [1, теоремы 3–6] о связи устойчивости уравнения и свойств фундаментального решения. Приведем формулировки этих теорем. Обозначим $\{K_t\}_{t\geq0}$ – семейство линейных непрерывных на $\mathbb{X}$ функционалов, определенных формулой:

$$K_t\left(f\right)=\int_0^t Y\left(t-s\right)f\left(s\right)ds,\ t\geq0. \tag{11}$$

Предложение 3. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *уравнение (1)* $\mathbb{X}$*-устойчиво;*

2) *существует такое* $N>0$, *что для всех* $f\in\mathbb{X}, x\left(0\right)\in\mathbb{R}$ *и* $t\geq0$ *справедлива оценка* $\left|x\left(t\right)\right|\leq N\left(\left|x\left(0\right)\right|+\|f\|_{\mathbb{X}}\right)$;

3) $\sup_{t\geq0}\left|X\left(t\right)\right|<\infty$ *и* $\sup_{t\geq0}\|K_t\|<\infty$.

Предложение 4. *Пусть* $\mathbb{X}$ *– банахово пространство. Если при любых* $f\in\mathbb{X}$ *и* $x\left(0\right)\in\mathbb{R}$ *решение уравнения (1) обладает свойством* $\lim_{t\to+\infty}x\left(t\right)=0$, *то уравнение (1)* $\mathbb{X}$*-устойчиво.*

Это означает, что в определении асимптотической -устойчивости нет необходимости дополнительно требовать $\mathbb{X}$-устойчивость по Ляпунову.

Предложение 5. *Пусть* $\mathbb{X}$ *– банахово пространство. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *уравнение (1) асимптотически-устойчиво;*

2) *при любых* $x(0)\in\mathbb{R}$ *и* $f\in\mathbb{X}$ *решение уравнения (1) обладает свойством* $\lim_{t\to+\infty}x(t)=0;$

3) $\lim_{t\to+\infty}X(t)=0$ *и* $\lim_{t\to+\infty}K_t(f)=0$ *при любом* $f\in\mathbb{X}.$

Заметим, что последовательность функционалов может стремиться к своему пределу по-разному: поточечно и равномерно. В последнем условии предложения 5 имеется в виду поточечная сходимость, и было бы естественно выделить случай равномерной сходимости как более сильный вид устойчивости. Поэтому если последовательность функционалов K_t стремится к нулю по норме, будем использовать новое понятие.

Определение 4. *Уравнение (1) называется сильно асимптотически -устойчивым, если* $\lim_{t\to+\infty}X(t)=0$ *и* $\lim_{t\to+\infty}\|K_t\|=0.$

Предложение 5*. *Пусть* $\mathbb{X}$ *– банахово пространство. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *уравнение (1) сильно асимптотически -устойчиво;*
2. $\lim_{t\to+\infty}X(t)=0$ *и* $\lim_{t\to+\infty}K_t=0.$

Предложение 6. *Уравнение (1) экспоненциально-устойчиво, если и только если существуют такие* $N,\gamma>0,$ *что для всех* $t\ge 0$ *справедливы оценки* $\left|X(t)\right|\le Ne^{-\gamma t}$ *и* $\|K_t\|\le Ne^{-\gamma t}.$

Далее подробно исследуем случай, когда пространство $\mathbb{X}$ есть пространство суммируемых функций $L_p[0,\omega].$

3. L_p-устойчивость по Ляпунову

Отметим, что из интегральной ограниченности функции Коши следует ограниченность фундаментального решения.

Лемма 1. *Если* $\sup_{t\ge0}\int\limits_t^{t+\omega}\left|Y(s)\right|ds<\infty,$ *то* $\sup_{t\ge0}\left|X(t)\right|<\infty..$

Доказательство. Обозначим $\sup_{t\ge0}\int\limits_t^{t+\omega}\left|Y(s)\right|ds=M<\infty$ и рассмотрим равенства (5), связывающие функции X и Y. Из них следует, что для всех $t\ge 0$

$$\int\limits_t^{t+\omega}\left|X(s)\right|=\int\limits_t^{t+\omega}\left|\left((I-S)Y\right)(s)\right|ds\le\int\limits_t^{t+\omega}\left|Y(s)\right|ds+\sum_{k=1}^{K}a_k\int\limits_t^{t+\omega}\left|Y(s-kh)\right|ds\le$$

$$\le\int\limits_t^{t+\omega}\left|Y(s)\right|ds+\sum_{k=1}^{K}a_k\int\limits_{t-kh}^{t-kh+\omega}\left|Y(s)\right|ds=\left(1+\sum_{k=1}^{K}a_k\right)M=N_1<\infty,$$

$$\int\limits_t^{t+\omega}\left|\dot X(s)\right|=\int\limits_t^{t+\omega}\left|TY(s)\right|ds=\int\limits_t^{t+\omega}\left|\int\limits_0^s S_\xi Y(s)\,dr(\xi)\right|ds\le$$

$$\le\int\limits_t^{t+\omega}\left(\int\limits_0^s\left|S_\xi Y(s)\right|\left|dr(\xi)\right|\right)ds\le\int\limits_t^{t+\omega}\left(\int\limits_0^{t+\omega}\left|S_\xi Y(s)\right|\left|dr(\xi)\right|\right)ds.$$

Подынтегральная функция неотрицательна и измерима, поэтому можно воспользоваться теоремой Фубини [14, с. 318] и поменять порядок интегрирования:

$$\int_t^{t+\omega}\left(\int_0^{t+\omega}\left|S_\xi Y(s)\right|\left|dr(\xi)\right|\right)ds=\int_0^{t+\omega}\left(\int_t^{t+\omega}\left|S_\xi Y(s)\right|ds\right)\left|dr(\xi)\right|\le M\int_0^{t+\omega}\left|dr(\xi)\right|\le$$

$$\le M\int_0^{\omega_0}\left|dr(\xi)\right|=M\cdot V_0^{\omega_0}[r]=N_2<\infty,$$

где $V_0^{\omega_0}[r]$ – полная вариация функции $r(t)$, так как $r(t)=0$ вне отрезка $[0,\omega_0]$. Итак, в условиях теоремы

$$\sup_{t\ge0}\int_t^{t+\omega}\left|X(s)\right|ds=N_1<\infty,\ \sup_{t\ge0}\int_t^{t+\omega}\left|\dot X(s)\right|ds=N_2<\infty. \tag{12}$$

Дальнейшее доказательство проведем по схеме, представленной в [1]. Предположим, что теорема неверна и $\sup_{t\ge0}\left|X(t)\right|$. Тогда найдется такое $t_0\in\mathbb{R}_+$, что $\left|X(t_0)\right|>\frac{N_1}{\omega}+N_2$. Пусть $t\in[t_0,t_0+\omega]$. Тогда

$$\left|X(t)-X(t_0)\right|=\left|\int_{t_0}^{t}\dot X(s)\,ds\right|\le\int_{t_0}^{t}\left|\dot X(s)\right|ds\le\int_{t_0}^{t_0+\omega}\left|\dot X(s)\right|ds\le N_2,$$

значит, для любого $t\in[t_0,t_0+\omega]$ верна оценка $\left|X(t)\right|>\frac{N_1}{\omega}$, следовательно, $\int_{t_0}^{t_0+\omega}\left|X(s)\right|ds>N_1$, что противоречит первому из условий (12).

Следующие утверждения [1, теоремы 7, 8] с учетом леммы 1 переносятся без изменений.

Теорема 1. *Пусть* $1<p\le\infty$. *Уравнение (1)* L_p*-устойчиво тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{t\ge0}\int_t^{t+\omega}\left|Y(s)\right|^q ds<\infty, \tag{13}$$

где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Доказательство. Необходимость следует из предложения 3. Действительно, согласно представлению (10),

$$K_t=\left(\int_0^{\omega}\left|Y(t-s)\right|^q ds\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\int_t^{t+\omega}\left|Y(s)\right|^q ds\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{14}$$

поэтому, если $\sup_{t\ge0}\left\|K_t\right\|<\infty$, то верна и оценка (13).

Достаточность. Если неравенство (13) выполнено, то из леммы 1 вытекает условие $\left|X(t)\right|<\infty$, а из (14) с учетом неравенства Гельдера следует, что $\sup_{t\ge0}\left\|K_t\right\|<\infty$. Затем снова применяем предложение 3.

Теорема 2. *Уравнение (1)* L_1 *-устойчиво тогда и только тогда, когда* $\sup_{t\ge 0}\left|Y(t)\right|<\infty$.

Доказательство. Норма функционалов K_t в пространстве $L_1[0,\omega]$ определяется по формуле

$$\left\|K_t\right\| = \operatorname{ess}\sup_{s\in[0,\omega]}\left|Y(t-s)\right|. \tag{15}$$

Поскольку функция Y на каждом конечном отрезке кусочно-непрерывна и имеет конечное число скачков, то $\operatorname{ess}\sup\limits_{s\in[0,\omega]}\left|Y(t-s)\right| = \sup\limits_{s\in[0,\omega]}\left|Y(t-s)\right|$. Поэтому $\left\|K_t\right\|<\infty$ тогда и только тогда, когда $\sup\limits_{t\ge 0}\left|Y(t)\right|<\infty$. Из первой из формул связи (6) между $X(t)$ и $Y(t)$ следует, что это условие равносильно условию $\sup\limits_{t\ge 0}\left|X(t)\right|<\infty$. Для завершения доказательства осталось применить предложение 3.

4. Асимптотическая L_p-устойчивость

Исследуем асимптотическую L_p-устойчивость уравнения (1). Для этого докажем аналогичную лемму.

Лемма 2. *Если* $\lim_{t\to\infty}\int\limits_t^{t+\omega}\left|Y(s)\right|ds=0,$ *то* $\lim_{t\to\infty}X(t)=0.$

Доказательство. Рассмотрим равенства (5), связывающие функции X и Y. Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$ и найдем для него такое число $t_0>0,$ что при всех $t\ge t_0$ будет $\int\limits_t^{t+\omega}\left|Y(s)\right|ds<\varepsilon.$ Тогда при любом $t\ge t_0+Kh$ имеем

$$\int\limits_t^{t+\omega}\left|X(s)\right| = \int\limits_t^{t+\omega}\left|Y(s)-\sum_{k=1}^{K}a_k\left(S_{kh}Y\right)(s)\right|ds \le$$
$$\le \int\limits_t^{t+\omega}\left|Y(s)\right|ds+\sum_{k=1}^{K}a_k\int\limits_t^{t+\omega}\left|Y(s-kh)\right|ds =$$
$$= \int\limits_t^{t+\omega}\left|Y(s)\right|ds+\sum_{k=1}^{K}a_k\int\limits_{t-kh}^{t-kh+\omega}\left|Y(s)\right|ds < \left(1+\sum_{k=1}^{K}a_k\right)\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\lim_{t\to\infty}\int\limits_t^{t+\omega}\left|X(s)\right|ds=0. \tag{16}$$

Далее

$$\int\limits_t^{t+\omega}\left|\dot X(s)\right|ds = \int\limits_t^{t+\omega}\left|TY(s)\right|ds = \int\limits_t^{t+\omega}\left|\int\limits_0^{s}\left(S_\xi Y\right)(s)\,dr(\xi)\right|ds \le$$
$$\le \int\limits_t^{t+\omega}\left(\int\limits_0^{s}\left|Y(s-\xi)\right|\left|dr(\xi)\right|\right)ds \le \int\limits_t^{t+\omega}\left(\int\limits_0^{t+\omega}\left|Y(s-\xi)\right|\left|dr(\xi)\right|\right)ds =$$
$$= \int\limits_0^{t+\omega}\left(\int\limits_t^{t+\omega}\left|Y(s-\xi)\right|ds\right)\left|dr(\xi)\right| < \varepsilon\int\limits_0^{t+\omega}\left|dr(\xi)\right|.$$

Возможность перестановки интегралов обосновывается так же, как и в лемме 1. Поскольку функция $r(s)$ имеет ограниченное изменение, то

$$\int_0^{t+\omega} \left| dr(\xi) \right| \le V_0^{\omega_0}[r] < \infty,$$

поэтому

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^{t+\omega} \left| \dot{X}(s) \right| ds = 0.$$

Предположим, что $\lim_{t\to\infty} X(t) \ne 0$. Тогда найдутся $\varepsilon > 0$ и такая последовательность $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, что $\left| X(t_n) \right| \ge \varepsilon$. Для данного ε найдем такой номер N, чтобы при всех $n \ge N$ выполнялось неравенство $\int_{t_n}^{t_n+\omega} \left| \dot{X}(s) \right| ds < \frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть $t \in [t_n, t_n + \omega]$. Тогда при всех $n \ge N$

$$\left| X(t) - X(t_n) \right| \le \int_{t_n}^{t} \left| \dot{X}(s) \right| ds \le \int_{t_n}^{t_n+\omega} \left| \dot{X}(s) \right| ds < \frac{\varepsilon}{2},$$

значит, для любого $t \in [t_n, t_n + \omega]$ верна оценка $\left| X(t) \right| \ge \frac{\varepsilon}{2}$, следовательно,

$$\int_{t_n}^{t_n+\omega} \left| X(s) \right| ds \ge \frac{\varepsilon\omega}{2} > 0,$$

что противоречит соотношению (16).

На рассматриваемый случай без изменений переносятся теоремы об асимптотической L_p-устойчивости, доказанные в [1, теоремы 9–11]. Приведем их.

Теорема 3. *Пусть* $1 < p \le \infty$. *Уравнение (1) сильно асимптотически* L_p*-устойчиво тогда и только тогда, когда* $\lim_{t\to\infty} \int_t^{t+\omega} \left| Y(s) \right|^q ds = 0$, *где* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Доказательство. Из формулы (14) следует, что условия $\lim_{t\to\infty} \int_t^{t+\omega} \left| Y(s) \right|^q ds = 0$ и $\lim_{t\to\infty} \|K_t\| = 0$ эквивалентны. Поэтому необходимость следует непосредственно из предложения 5*. Достаточность также вытекает из предложения 5* с учетом леммы 2 и неравенства Гельдера.

Теорема 4. *Уравнение (1) сильно асимптотически* L_1*-устойчиво тогда и только тогда, когда* $\lim_{t\to\infty} Y(t) = 0$.

Доказательство. Из формулы (15) с учетом кусочной непрерывности функции $Y(t)$ и того факта, что она имеет лишь конечное число скачков на любом конечном отрезке, следует равносильность условий $\lim_{t\to\infty} Y(t) = 0$ и $\lim_{t\to\infty} K_t = 0$. Кроме того, из первого из равенств (6) следует, что если $Y(t) \to 0$, то и $X(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Затем, применяя предложение 5*, получаем утверждение теоремы.

Следствие 1. *Если* $\lim_{t\to\infty} Y(t) = 0,$ *то уравнение (1) сильно асимптотически* L_p*-устойчиво для всех* $p \geq 1.$

В статье [1] было исследовано, при каких ограничениях на параметры уравнения (1) выполняется условие $\lim_{t\to\infty} Y(t) = 0.$ Приведем это условие в удобном для нас виде.

Предложение 7. *Если* $\lim_{t\to\infty} Y(t) = 0,$ *то все корни многочлена* $1 - g_s(\lambda)$ *расположены слева от мнимой оси.*

Из предложений 7 и 2 непосредственно вытекает

Следствие 2. *Если* $\lim_{t\to\infty} Y(t) = 0,$ *то оператор* $I - S$ *обратим в любом пространстве* $L_p(\mathbb{R}_+),\ p \geq 1.$

Таким образом, в силу теоремы 4 и предложений 2 и 7, если уравнение (1) сильно асимптотически L_1-устойчиво, то все корни уравнения $1 - g_S(\lambda)$ лежат слева от мнимой оси на комплексной плоскости и оператор $I - S$ обратим.

Теперь покажем, что если функция Коши стремится к нулю при $t \to \infty,$ то она обязательно делает это по экспоненциальному закону. Для доказательства сначала исследуем расположение корней характеристического уравнения, а затем воспользуемся предложениями 1 и 2.

Лемма 3. *Пусть* $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ *– корень характеристической функции (8). Тогда функция* $u(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t$ *есть решение уравнения (1) с начальными условиями*

$$\varphi(\xi) = e^{\alpha\xi}\cos\beta\xi;\ \psi(\xi) = \dot{\varphi}(\xi). \tag{17}$$

Доказательство. Если $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ – корень характеристического уравнения, то

$$g(\lambda_0) = \lambda_0\left(1 - g_S(\lambda_0)\right) - g_T(\lambda_0) =$$
$$= (\alpha + i\beta)\left(1 - \sum_{k=1}^{K} a_k e^{-kh(\alpha + i\beta)}\right) - \int_0^t e^{-(\alpha+i\beta)\xi}\, dr(\xi) = 0,$$

то есть

$$(\alpha + i\beta)\left(1 - \sum_{k=1}^{K} a_k e^{-kh(\alpha + i\beta)}\right) = \int_0^t e^{-(\alpha+i\beta)\xi}\, dr(\xi).$$

Приравнивая действительную и мнимую части, получаем:

$$\alpha - \sum_{k=1}^{K} a_k e^{-kh\alpha}\left(\alpha\cos kh\beta + \beta\sin kh\beta\right) = \int_0^t e^{-\alpha\xi}\cos\beta\xi\, dr(\xi);$$
$$\beta - \sum_{k=1}^{K} a_k e^{-kh\alpha}\left(\beta\cos kh\beta - \alpha\sin kh\beta\right) = -\int_0^t e^{-\alpha\xi}\sin\beta\xi\, dr(\xi).$$

Теперь, с использованием этих равенств непосредственной подстановкой в уравнение, можно показать, что $u(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t$ действительно будет решением уравнения (1) с начальными условиями (17).

Аналогично доказывается, что функция $v(t) = e^{\alpha t}\sin\beta t$ будет решением уравнения (1) с начальными условиями $\varphi(\xi) = e^{\alpha\xi}\sin\beta\xi;\ \psi(\xi) = \dot{\varphi}(\xi).$

Теорема 5. *Функция Коши уравнения (1) обладает свойством* $\lim_{t\to\infty} Y(t) = 0$ *тогда и только тогда, когда она имеет экспоненциальную оценку (9) при некоторых* $N, \gamma > 0$ *и любом* $t \geq 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция Коши обладает свойством $\lim_{t\to\infty} Y(t) = 0$. Тогда, согласно следствию 2, оператор $I - S$ обратим в любом пространстве $L_p(\mathbb{R}_+)$.

Покажем, что все корни характеристического уравнения (8) лежат слева от мнимой оси. Предположим, что это не так, и существует корень $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, для которого $\alpha > 0$. Тогда, согласно лемме 3, решениями уравнения (1) будут функции $u(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t$ и $v(t) = e^{\alpha t}\sin\beta t$. При этом начальные функции входят в класс $L_1[-\omega, 0]$. Поскольку $\alpha > 0$, то

$$\left(u(t)\right)^2 + \left(v(t)\right)^2 = \left(e^{\alpha t}\cos\beta t\right)^2 + \left(e^{\alpha t}\sin\beta t\right)^2 = e^{2\alpha} \geq 1.$$

Но это означает, что уравнение (1) не может быть асимптотически L_1-устойчивым, что противоречит условию $\lim_{t\to\infty} Y(t) = 0$.

Итак, оператор $I - S$ обратим в любом пространстве $L_p(\mathbb{R}_+)$, а корни характеристической функции (8) лежат слева от мнимой оси, поэтому, согласно предложению 1, для функции Коши справедлива оценка (9).

Достаточность очевидна.

Следствие 3. *Уравнение (1) сильно асимптотически* L_1*-устойчиво тогда и только тогда, когда функция Коши имеет экспоненциальную оценку (9).*

5. Экспоненциальная L_p-устойчивость

Признаки экспоненциальной L_p-устойчивости определим по той же схеме, что и признаки L_p-устойчивости по Ляпунову и асимптотической L_p-устойчивости. Для этого докажем аналогичную лемму.

Лемма 4. *Если* $\int_t^{t+\omega} \left|Y(s)\right| ds \leq Ne^{-\gamma t}$, *то* $\left|X(t)\right| \leq Me^{-\gamma t}$.

Доказательство. Рассмотрим равенства (5), связывающие функции X и Y. В условиях леммы имеем

$$\int_t^{t+\omega} \left|X(s)\right| ds \leq \int_t^{t+\omega} \left|Y(s)\right| ds + \sum_{k=1}^{K} a_k \int_t^{t+\omega} \left|Y(s - kh)\right| ds =$$

$$= \int_t^{t+\omega} \left|Y(s)\right| ds + \sum_{k=1}^{K} a_k \int_{t-kh}^{t-kh+\omega} \left|Y(s)\right| ds \leq Ne^{-\gamma t} + \sum_{k=1}^{K} a_k N e^{-\gamma(t-kh)} =$$

$$= Ne^{-\gamma t}\left(1 + \sum_{k=1}^{K} a_k e^{kh\gamma}\right) = M_1 e^{-\gamma t},$$

$$\int_t^{t+\omega} \left|\dot X(s)\right| ds = \int_t^{t+\omega} \left|TY(s)\right| ds = \int_t^{t+\omega} \left|\int_0^s S_\xi Y\, dr(\xi)\right| ds \le$$

$$\le \int_t^{t+\omega} \left(\int_0^s \left|Y(s-\xi)\right| \left|dr(\xi)\right| \right) ds \le$$

$$= \int_0^{t+\omega} \left(\int_t^{t+\omega} \left|Y(s-\xi)\right| ds \right) \left|dr(\xi)\right| < Ne^{-\gamma t} \int_0^{t+\omega} \left|dr(\xi)\right| = M_2 e^{-\gamma t},$$

где M_1 и M_2 – некоторые константы.

Перестановка интегралов обосновывается теоремой Фубини, как и во всех предыдущих леммах. Кроме того, здесь мы воспользовались тем, что $r(s) \ne 0$ лишь на некотором отрезке $[0, \omega]$ и имеет ограниченную вариацию, так что $\int_0^{t+\omega} dr(\xi)$ – некоторая конечная константа.

Итак, верны следующие неравенства:

$$\int_t^{t+\omega} \left|X(s)\right| ds \le M_1 e^{-\gamma t}; \int_t^{t+\omega} \left|\dot X(s)\right| ds \le M_2 e^{-\gamma t}. \tag{18}$$

Предположим, что лемма неверна и найдется такое $t_0 \in \mathbb{R}_+$, что

$$\left|X(t_0) e^{\gamma t_0}\right| > e^{\gamma\omega} \left(\gamma M_1 + \frac{M_1}{\omega} + M_2 \right).$$

Тогда, если $t \in [t_0, t_0 + \omega]$, то

$$\left|X(t)e^{\gamma t} - X(t_0)e^{\gamma t_0}\right| = \left| \int_{t_0}^t \left(X(s)e^{\gamma s}\right)' ds \right| \le \gamma \int_{t_0}^{t_0+\omega} \left|X(s)e^{\gamma s}\right| ds + \int_{t_0}^{t_0+\omega} \left|\dot X(s) e^{\gamma s}\right| ds \le$$

$$\le \gamma e^{\gamma(t_0+\omega)} \int_{t_0}^{t_0+\omega} \left|X(s)\right| ds + e^{\gamma(t_0+\omega)} \int_{t_0}^{t_0+\omega} \left|\dot X(s)\right| ds \le \gamma e^{\gamma\omega} M_1 + e^{\gamma\omega} M_2,$$

значит, для любого $t \in [t_0, t_0 + \omega]$, верна оценка

$$\left|X(t)e^{\gamma t}\right| > \frac{M_1 e^{\gamma\omega}}{\omega},$$

следовательно,

$$e^{\gamma(t_0+\omega)} \int_{t_0}^{t_0+\omega} \left|X(s)e^{\gamma s}\right| ds > M_1 e^{\gamma\omega},$$

что противоречит первому из соотношений (18).

Без изменений переносятся с учетом леммы 4 и следующие теоремы об экспоненциальной L_p-устойчивости [1, теоремы 13, 14].

Теорема 6. *Пусть* $1 < p \le \infty$. *Уравнение (1) экспоненциально* L_p*-устойчиво тогда и только тогда, когда* $\int_t^{t+\omega} \left|Y(s)\right|^q ds \le Ne^{-\gamma t}$, *где* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Доказательство. С учетом формулы (14), следует из предложения 6: непосредственно в части необходимости и с помощью леммы 4 и неравенства Гельдера в части достаточности.

Теорема 7. *Уравнение (1) экспоненциально* L_1 *-устойчиво тогда и только тогда, когда функция Коши имеет экспоненциальную оценку (9).*

Доказательство. Из (15), учитывая кусочную непрерывность функции $Y(t)$, получаем, что $\|K_t\| \le Ne^{-\gamma t}$ при некоторых $N, \gamma > 0$ тогда и только тогда, когда $|Y(t)| \le Ne^{-\gamma t}$. Экспоненциальная оценка фундаментального решения следует из первой из формул связи (6). Наконец, из предложения 6 следует утверждение теоремы.

Поскольку $L_p[0,\omega] \subset L_1[0,\omega]$ для всех $p > 1$, то экспоненциальная оценка (9) влечет за собой экспоненциальную L_p-устойчивость для всех $p \ge 1$. Покажем, что обратное тоже верно, то есть что из экспоненциальной L_p-устойчивости для некоторого $p > 1$ следует экспоненциальная оценка (9). Доказательство проведем по схеме из [1].

Лемма 5. *Пусть* λ_0 *– корень уравнения (10). Тогда при любом* $\varepsilon > 0$ *найдется такой корень* μ_0 *того же уравнения, что* $Re\,\lambda_0 = Re\,\mu_0$, *и в круге* $B(\mu_0, \varepsilon)$ *есть корень функции* $g(\lambda)$.

Доказательство. Функция $1 - g_S(\lambda)$ – аналитическая, поэтому ее нули изолированы. Следовательно, можно выбрать такое число $\varepsilon > 0$, что в круге $B(0, \varepsilon)$ функция

$$\eta(z) = 1 - g_S(\lambda_0 + z)$$

имеет единственный нуль $z_0 = 0$, а на границе $|z| = \varepsilon$, которая является компактом, выполняется неравенство

$$\left|1 - g_S(\lambda_0 + z)\right| \ge m > 0,$$

где m – некоторое число.

Обозначим

$$\lambda_k = \lambda_0 + 2\pi k i, k \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку для любого целого k будет выполнено равенство $e^{2\pi k i} = 1$, то $e^{\lambda_k} = e^{\lambda_0}$ и поэтому для любого $z \in \mathbb{C}$ имеем $g_s(\lambda_k + z) = g_s(\lambda_0 + z)$. Учитывая это и тот факт, что $r(s) \ne 0$ лишь на некотором отрезке $[0, \omega]$, имеем:

$$\left|\frac{g_T(\lambda_k + z)}{\lambda_k + z}\right| = \left|\frac{\int_0^t e^{-(\lambda_k + z)\xi}\, dr(\xi)}{\lambda_k + z}\right| \le \left|\frac{\int_0^\omega e^{-(\lambda_0 + z)\xi}\, dr(\xi)}{\lambda_k + z}\right| \le \frac{\int_0^\omega \left|e^{-(\lambda_0 + z)\xi}\right| \left|dr(\xi)\right|}{|\lambda_k + z|} = \frac{m_1}{|\lambda_k + z|},$$

где m_1 – некоторая константа, не зависящая от k. В соответствии с выбором λ_k, модуль $|\lambda_k| \to \infty$ при $k \to \infty$, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такой достаточно большой номер k_0, что

$$\left|\frac{g_T\left(\lambda_{k_0}+z\right)}{\lambda_{k_0}+z}\right|<\frac{m_1}{\left|\lambda_{k_0}\right|-\varepsilon}<m.$$

Обозначим $\mu_0=\lambda_{k_0}=\lambda_0+2\pi k_0 i.$ При этом будет выполнено равенство $Re\,\mu_0=Re\,\lambda_0.$ Рассмотрим в круге $B[0,\varepsilon]$ две функции:

$$\zeta(z)=1-g_S\left(\mu_0+z\right)$$

и

$$\xi(z)=\frac{g_T\left(\mu_0+z\right)}{\mu_0+z}.$$

С учетом приведенных выше оценок получаем, что при $|z|=\varepsilon$ выполнены неравенства

$$|\zeta(z)|\geq m>|\xi(z)|. \tag{19}$$

По теореме Руше [15], поскольку функции $\zeta(z)$ и $\xi(z)$ голоморфны в односвязной области $B[0,\varepsilon]$ и на границе этой области выполняется неравенство (19), то они имеют в круге $B(0,\varepsilon)$ одинаковое количество нулей. По построению функция $\zeta(z)$ имеет в этом круге единственный нуль $z_0=0,$ поэтому там есть и нуль функции

$$\zeta(z)+\xi(z)=1-g_S\left(\mu_0+z\right)+\frac{g_T\left(\mu_0+z\right)}{\mu_0+z}=\frac{g\left(\mu_0+z\right)}{\mu_0+z},$$

а это эквивалентно тому, что функция $\dfrac{g(\lambda)}{\lambda},$ а значит, и функция $g(\lambda)$ имеет нуль в круге $B(\mu_0,\varepsilon).$

Теорема 8. *Пусть* $1\leq p\leq\infty.$ *Если уравнение (1) экспоненциально* L_p*-устойчиво, то все корни уравнения (10) лежат слева от мнимой оси.*

Доказательство. Пусть уравнение (1) экспоненциально L_p-устойчиво. Найдем γ из определения экспоненциальной устойчивости.

Предположим, что теорема неверна и существует корень $\lambda_0=\alpha+i\beta$ – корень уравнения (10) с неотрицательной действительной частью $\alpha\geq 0.$

Выберем произвольное положительное число $\varepsilon<\alpha+\gamma.$ Из леммы 5 следует, что для данного ε найдется корень μ_0 уравнения (10) с той же действительной частью $Re\mu=\alpha>0,$ а в круге $B(\mu_0,\varepsilon)$ есть корень $\lambda_1=\alpha_1+i\beta_1$ функции $g(\lambda).$ По построению,

$$|\alpha_1-\alpha|<\varepsilon<\alpha+\gamma,$$

откуда $\alpha_1+\gamma>0.$ Корню λ_1 соответствует решение уравнения (1) $x(t)=e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t.$ Но

$$|x(t)|e^{\gamma t}=e^{(\alpha_1+\gamma)t}\left|\cos\beta_1 t\right|,$$

не может стремиться к нулю при $t \to \infty$, так как является неограниченной функцией. Следовательно, уравнение (1) не может быть экспоненциально устойчивым, поэтому в условиях теоремы корни уравнения (10) могут иметь лишь отрицательные действительные части.

Теорема 9. *Пусть $1 \le p \le \infty$. Уравнение (1) экспоненциально L_p-устойчиво тогда и только тогда, когда для функции Коши справедлива оценка (9).*

Доказательство. Необходимость. Пусть уравнение (1) экспоненциально L_p-устойчиво. Тогда, согласно теореме 2, все корни уравнения (10) имеют отрицательные действительные части. Из предложения 2 вытекает, что оператор $I - S$ обратим в пространстве $L_p(\mathbb{R})$.

Покажем, что все корни характеристической функции $g(\lambda)$ также лежат слева от мнимой оси. Действительно, по лемме 3, если $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ – корень характеристической функции, то $x(t) = e^{\alpha t}\cos\beta(t)$ – решение уравнения (1) с начальными условиями $\varphi(\xi) = e^{\alpha\xi}\cos\beta\xi, \psi(\xi) = \dot{\varphi}(\xi), \xi \in [-\omega_0, 0]$. Из экспоненциальной L_p-устойчивости уравнения (1) следует, что $|x(t)| < Ne^{-\gamma t}$ при некоторых $N, \gamma > 0$, а это возможно лишь если $\alpha < 0$.

Итак, оператор $I - S$ обратим в $L_p(\mathbb{R})$, все корни характеристической функции $g(\lambda)$ лежат слева от мнимой оси, поэтому можно применить предложение 1, согласно которому функция Коши $Y(t)$ уравнения (1) имеет экспоненциальную оценку (9).

Достаточность. Если для функции Коши справедлива экспоненциальная оценка (9), то, согласно теореме 7, оно экспоненциально L_1-устойчиво и, следовательно, L_p-устойчиво для любого $p > 1$.

Следствие 4. *Если уравнение (1) экспоненциально L_{p_0}-устойчиво хотя бы при одном $p_0 \ge 1$, то оно экспоненциально L_p-устойчиво при всех $p \ge 1$. .*

Заключение

Все результаты, установленные в [1] для функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями, распространяются на случай распределенного запаздывания при неизвестной функции. А именно для уравнений нейтрального типа, независимо от характера запаздывания при неизвестной функции справедливо следующее:

- стремление функции Коши к нулю может происходить только по экспоненциальному закону;
- из асимптотической L_1-устойчивости следует асимптотическая L_p-устойчивость при любом $p > 1$;
- из экспоненциальной L_{p_0}-устойчивости хотя бы при одном $p_0 \ge 1$ следует экспоненциальная L_p-устойчивость при любом $p \ge 1$;
- экспоненциальная L_p-устойчивость уравнения (1) равносильна экспоненциальной оценке (9) для функции Коши;
- экспоненциальная L_p-устойчивость уравнения (1) равносильна стремлении функции Коши к нулю.

Список литературы

1. Малыгина, В.В. Об асимптотических свойствах функции Коши автономного функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа / В.В. Малыгина, К.М. Чудинов // Прикладная математика и вопросы управления. – 2020. – № 3.

2. Азбелев, Н.В. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений / Н.В. Азбелев, В.П. Максимов, Л.Ф. Рахматуллина. – М.: Наука, 1991. – 280 с.

3. Беллман, Р. Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К. Кук. – М.: Мир, 1963 – 548 с.

4. Эльсгольц, Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л.Э. Эльсгольц, С.Б. Норкин. – М.: Наука, 1971. – 296 с.

5. Хейл, Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений / Дж. Хейл. – М.: Мир, 1984. – 421 с.

6. Колмановский, В.Б. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием / В.Б. Колмановский, В.Р. Носов. – М.: Наука, 1981. – 484 с.

7. Junca, S. Stability of a critical nonlinear neutral delay differential equation / S. Junca, B. Lombard // J. Diff. Equat. – 2014. – Vol. 256, iss.7. – P. 2368–2391.

8. Власов, В.В. Спектральные задачи, возникающие в теории дифференциальных уравнений с запаздыванием / В.В. Власов // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2003. – Т. 1. – С. 69–83.

9. Симонов, П.М. Об экспоненциальной устойчивости линейнных дифференциально-разностных систем / П.М. Симонов, А.В. Чистяков // Известия вузов. Математика. – 1997. – № 6. – С. 37–49.

10. Баландин, А.С. Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа / А.С. Баландин, В.В. Малыгина // Известия вузов. Математика. – 2007. – № 7. – С. 17–27.

11. Малыгина, В.В. Асимптотическая устойчивость одного класса уравнений нейтрального типа / В.В. Малыгина, А.С. Баландин // Сибирский математический журнал. – 2021. – Т. 62, № 1. – С. 106–116.

12. Баландин, А.С. Экспоненциальная устойчивость автономных дифференциальных уравнений нейтрального типа. I / А.С. Баландин // Известия вузов. Математика. – 2023. – № 3.

13. Баландин, А.С. Экспоненциальная устойчивость автономных дифференциальных уравнений нейтрального типа. II / А.С. Баландин // Известия вузов. Математика. – 2023. – № 4.

14. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1976. – 543 с.

15. Лаврентьев, М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1987. – 736 с.

References

1. Malygina V.V., Chudinov K. M. Ob asimptoticheskih svojstvah funkcii Koshi avtonomnogo funkcionalno-differencialnogo uravneniya nejtralnogo tipa. *Prikladnaya matematika i voprosy upravleniya,* 2020, no. 3.

2. Azbelev N. V., Maksimov V. P., Rahmatullina L. F. *Vvedenie v teoriyu funkcionalno-differencialnyh uravnenij*, Moscow, Nauka, 1991, 280 p.

3. Bellman R., Kuk K. *Differencialno-raznostnye uravneniya*, Moscow, Mir, 1963, 548 p.

4. Elsgolc L. E. Norkin S. B. *Vvedenie v teoriyu differencialnyh uravnenij s otklonyayushimsya argumentum*, Moscow, Nauka, 1971, 296 p.

5. Hejl Dzh. *Teoriya funkcionalno-differencialnyh uravnenij*, Moscow, Mir, 1984, 421 p.

6. Kolmanovskij V. B., Nosov V. R. *Ustojchivost i periodicheskie rezhimy reguliru-emyh sistem s posledejstviem*, Moscow, Nauka, 1981, 484 p.

7. Junca S., Lombard B. Stability of a critical nonlinear neutral delay differential equation. *J. Diff. Equat,* 2014, vol. 256, iss.7, R. 2368–2391.

8. Vlasov V. V. Spektralnye zadachi, voznikayushie v teorii differencialnyh uravnenij s zapazdyvaniem. *Sovremennaya matematika. Fundamentalnye napravleniya,* 2003, vol. 1, pp. 69–83.

9. Simonov P. M., Chistyakov A. V. Ob eksponencialnoj ustojchivosti linejnnyh differencialno-raznostnyh system. *Izv. vuzov. Matem,* 1997, no 6, pp. 37–49.

10. Balandin A. S., Malygina V. V. Ob eksponencialnoj ustojchivosti linejnyh differencialno-raznostnyh uravnenij nejtralnogo tipa. *Izv. vuzov. Matem.,* 2007, no 7, pp. 17–27.

11. Malygina V. V., Balandin A. S. Asimptoticheskaya ustojchivost odnogo klassa uravnenij nejtralnogo tipa. *Sib. matem. zhurn.*, 2021, vol. 62, no 1, pp. 106–116.

12. Balandin A. S. Eksponencialnaya ustojchivost avtonomnyh differencialnyh uravnenij nejtralnogo tipa. I. *Izv. vuzov. Matem.,* 2023, no 3.

13. Balandin A. S. Eksponencialnaya ustojchivost avtonomnyh differencialnyh uravnenij nejtralnogo tipa. II, *Izv. vuzov. Matem.*, 2023, no 4.

14. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funkcij i funkcionalnogo analiza*, Moscow, Nauka, 1976, 543 p.

15. Lavrentev M. A., Shabat B. V. *Metody teorii funkcij kompleksnogo peremennogo*, Moscow, Nauka, 1987, 736 p.