

Киченко, А. А. Разработка программных средств для автоматизации процесса определения параметров тензора структуры пористых материалов / А. А. Киченко, В. М. Тверье, А. В. Сотин // Прикладная математика и вопросы управления. – 2024. – № 1. – С. 29–40. – DOI 10.15593/2499-9873/2024.1.02

Библиографическое описание согласно ГОСТ Р 7.0.100–2018

Киченко, А. А. Разработка программных средств для автоматизации процесса определения параметров тензора структуры пористых материалов / А. А. Киченко, В. М. Тверье, А. В. Сотин. – Текст : непосредственный // Прикладная математика и вопросы управления / Applied Mathematics and Control Sciences. – 2024. – № 1. – С. 29–40. – DOI 10.15593/2499-9873/2024.1.02



ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
И ВОПРОСЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 1, 2024

<https://ered.pstu.ru/index.php/amcs>



Научная статья

DOI: 10.15593/2499-9873/2024.1.02

УДК 531/534: [57+61]



Разработка программных средств для автоматизации процесса определения параметров тензора структуры пористых материалов

А.А. Киченко, В.М. Тверье, А.В. Сотин

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 27 декабря 2023
Одобрена: 19 января 2024
Принята к публикации:
25 апреля 2024

Финансирование

Исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSNM-2023-0003).

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов

равноценен.

Ключевые слова:

математическое моделирование, пористый материал, трабекулярная костная ткань, тензор структуры, программный комплекс.

АННОТАЦИЯ

Идея построения специального тензора для описания параметров структурно-неоднородных материалов возникла из целого ряда попыток количественно охарактеризовать микроструктуру упругого пористого материала. Использование специальных тензорных величин для описания стереометрических характеристик структурно-анизотропных материалов позволяет в компактном виде выразить значимые структурные параметры исследуемых объектов. Преимущественная ориентация пор внутри образца хорошо описывается тензором структуры и, алгебраически связанным с ним тензором анизотропии. Приведенные в работе математические выкладки, позволили формализовать процесс вычисления всех необходимых для построения тензора структуры параметров.

Алгоритмизация метода определения среднего расстояния между порами, легла в основу разработанного специализированного программного обеспечения для расчета компонент тензора структуры. Верификация программного модуля была осуществлена путем проведения стереологического исследования ряда идеализированных тестовых структур и образца пористого материала, для которого тензор структуры был известен заранее. Полученные результаты не противоречили природной действительности, совпадали с ранее полученными данными и описывали степень анизотропии исследованных структур с высокой степенью точности.

В качестве демонстрации практического использования разработанного программного комплекса в работе представлены результаты исследования образца трабекулярной костной ткани шейки бедренной кости человека и образца автоклавного газобетона. Проведены вычисления всех необходимых параметров и приведены изображения эллипса структуры исследованных пористых материалов. Из полученных результатов видно, что тензор структуры способен описывать стереометрические характеристики натуральных и искусственных пористых структур, а пакет проблемно-ориентированных программ позволяет автоматизировать процесс определения всех необходимых параметров.

© Киченко Александр Александрович – старший преподаватель кафедры «Вычислительная математика, механика и биомеханика», e-mail: kichenko.alex@inbox.ru, ORCID: 0000-0001-8407-0468.

Тверье Виктор Моисеевич – кандидат технических наук, доцент кафедры «Вычислительная математика, механика и биомеханика», e-mail: tverier_55@perm.ru, ORCID: 0009-0005-2567-150X.

Сотин Александр Валерьевич – кандидат технических наук, доцент кафедры «Вычислительная математика, механика и биомеханика», e-mail: sotin@inbox.ru, ORCID: 0000-0003-3889-8023.



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

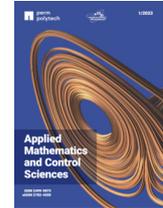
Perm Polytech Style: Kichenko A.A., Tverier V.M., Sotin A.V. Development of software tools for automatization of the process of the fabric tensor parameters determination for porous materials. *Applied Mathematics and Control Sciences*. 2024, no. 1, pp. 29–40. DOI: 10.15593/2499-9873/2024.1.02

MDPI and ACS Style: Kichenko, A.A.; Tverier, V.M.; Sotin, A.V. Development of software tools for automatization of the process of the fabric tensor parameters determination for porous materials. *Appl. Math. Control Sci.* **2024**, **1**, 29–40. <https://doi.org/10.15593/2499-9873/2024.1.02>

Chicago/Turabian Style: Kichenko, Alexander A., Viktor M. Tverier, and Aleksandr V. Sotin. 2024. “Development of software tools for automatization of the process of the fabric tensor parameters determination for porous materials”. *Appl. Math. Control Sci.* no. 1: 29–40. <https://doi.org/10.15593/2499-9873/2024.1.02>



APPLIED MATHEMATICS
AND CONTROL SCIENCES
№ 1, 2024
<https://ered.pstu.ru/index.php/amcs>



Научная статья

DOI: 10.15593/2499-9873/2024.1.02

UDC 531/534: [57+61]



Development of software tools for automatisisation of the process of the fabric tensor parameters determination for porous materials

A.A. Kichenko, V.M. Tverier, A.V. Sotin

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 27 December 2023
Approved: 19 January 2024
Accepted for publication:
25 April 2024

Funding

The work was financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, project No. FSNM -2023-0003).

Conflicts of Interest

The authors declare no conflict of interest.

Author Contributions

equivalent.

Keywords:

mathematical modelling, porous material, trabecular (cancellous) bone tissue, fabric tensor, software package.

ABSTRACT

The idea of constructing a special tensor to describe the parameters of structurally inhomogeneous materials arose from a number of attempts to quantitatively characterize the microstructure of an elastic porous material. The using of special tensor quantities to describe the stereometric characteristics of structurally anisotropic materials makes it possible to express in a compact form the significant structural parameters of the studying objects. The predominant orientation of pores inside the sample is well described by means of the fabric tensor and the anisotropy tensor which algebraically related to the fabric tensor. The mathematical calculations presented in the work made it possible to formalize the process of calculating all the parameters necessary for constructing the structure tensor.

Algorithmization of the method for determining the mean intercept length formed the basis for the developed specialized software for calculating the components of the fabric tensor. Verification of the software module was carried out by conducting a stereological study of a number of idealized test structures and a sample of porous material for which the fabric tensor was known in advance. The obtained results did not contradict natural reality, coincided with previously data and described the anisotropy degree of the studied structures with a high degree of accuracy.

To demonstrate the practical using of the developed software package, the work presents the results of studying of the human femoral neck trabecular bone tissue sample and the autoclaved aerated concrete sample. Calculations of all necessary parameters were carried out and images of the fabric ellipse of the studied porous materials were presented. From the results it is clear that the structure tensor is capable to describe the stereometric characteristics of natural and artificial porous structures, and the software package allows us to automate the process of determining all necessary parameters.

© **Alexander A. Kichenko** – Senior Research Scientist, Department of Computational Mathematics, Mechanics, and Biomechanics, e-mail: kichenko.alex@inbox.ru, ORCID: 0000-0001-8407-0468.

Victor M. Tverier – CSc of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Computational Mathematics, Mechanics, and Biomechanics, e-mail: tverier_55@perm.ru, ORCID: 0009-0005-2567-150X.

Aleksandr V. Sotin – CSc of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Computational Mathematics, Mechanics, and Biomechanics, e-mail: sotin@inbox.ru, ORCID: 0000-0003-3889-8023.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

Введение

Существует большое количество структурно-неоднородных материалов как естественного (горные породы, трабекулярная костная ткань), так и искусственного происхождения (пено-стекло, газобетон, высокопористый пироуглерод), физические свойства которых во многом определяются их внутренним строением [1–3]. Методы количественной стереологии широко применяются для описания структурных особенностей зернистых и пористых материалов [1; 4–11]. Идея построения специального тензора для описания параметров структурно-неоднородных материалов возникла из целого ряда попыток количественно охарактеризовать микроструктуру упругого пористого материала. В 1978 г. Cowin обратил внимание на то, что эллипсоид структуры эквивалентен тензору второго ранга, отмечая при этом, что для пористых материалов эллипсоид структуры является наилучшей мерой описания структурного распределения материала [1; 12]. В 1980 г. Oda, Konishi и Nemat-Nasser использовали концепцию эллипсоида структуры, аргументируя это тем, что для зернистых материалов эллипсоид структуры является второй наилучшей мерой описания структуры материала после пористости [1; 12; 13].

В настоящее время признано, что одним из наиболее удачных способов описания внутренней структуры пористых материалов является симметричный, положительно определенный тензор второго ранга, названный тензором структуры (*fabric tensor*), обозначаемый как \mathbf{H} [1–4; 14–23]. Тензор структуры позволяет компактно в тензорной форме описать структурную анизотропию пористых материалов, причем его главные значения характеризуют приоритетные направления распределения элементов структуры исследуемого образца.

В пористых и зернистых материалах тензор структуры может быть связан с изменением модуля радиус-вектора при изменении его направления. Данный радиус-вектор можно связать с величиной, называемой средним расстоянием между порами (*mean intercept length*). Подобная методика измерений в том или ином виде применялась в работах Whitehouse [7; 8] и Harrigan и Mann [4] для описания пористой структуры трабекулярной кости. Другая методика измерения параметров структуры зернистых материалов описана в исследованиях Oda и Satake [1; 13]. Авторы полагали, что лучший признак структуры в зернистых материалах – это функция плотности распределения ориентации нормали в точке контакта между соседними зернами, при этом подобное распределение также может быть представлено эллипсоидом структуры. При исследовании же горных пород структуру удобно описывать путем подсчета числа трещин на поверхности образца, учета концентрации трещин и их направления, впрочем, тензор структуры и в этом случае, также может быть построен способом, аналогичным [7; 8] или [4].

В общем случае процедура измерения параметров, необходимых для построения тензора структуры, достаточно трудоемка, поэтому компьютерная автоматизация данного процесса является актуальной проблемой, способной значительно облегчить обработку изображений внутренней структуры образцов исследуемого материала. В данной работе приведено подробное описание одного из возможных алгоритмов построения тензора структуры, который был заложен в основу специализированного программного комплекса, позволяющего автоматизировать процедуру определения стереометрических параметров материала и построения тензора структуры [24].

Материалы и методы

В настоящее время существует ряд методов, позволяющих описывать структуру пористого материала и определять компоненты тензора структуры. Прежде всего, к таким методам относятся: метод определения среднего расстояния между порами (*mean intercept*

length method), метод ориентации объема (*volume orientation method*) и метод распределения «звезд» по объему (*star volume distribution method*) [1] (рис. 1).

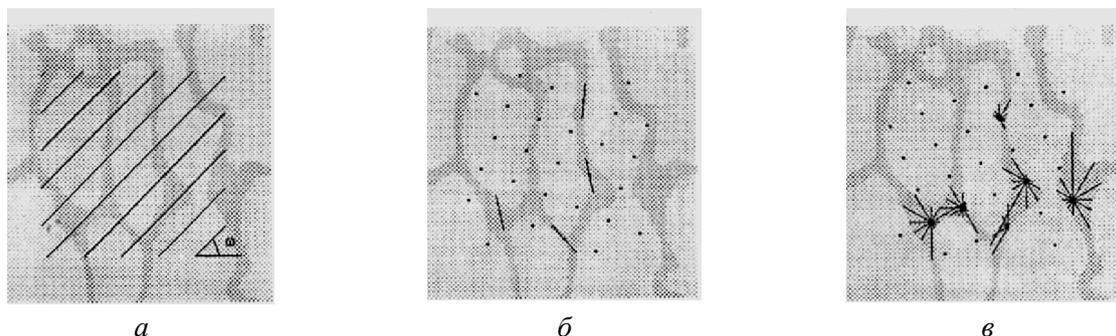


Рис. 1. Двухмерная иллюстрация методов описания структуры пористого материала [1]: *a* – mean intercept length method; *b* – volume orientation method; *c* – star volume distribution method

Согласно методу определения среднего расстояния между порами, для построения тензора структуры необходимо определить ряд вспомогательных стереометрических величин. Все стереологические измерения производятся на плоском шлифе или изображении шлифа исследуемого пористого материала.

В первую очередь определяется относительная площадь твердого матрикса, обозначаемая как A_{Ab} (рис. 2). Другая измеряемая величина – это число пересечений между линиями специальной тестовой сетки ориентированной под углом θ относительно локальной ортогональной системы координат и границами «материал – пора», обозначаемое как $I(\theta)$. Шаг сетки зависит от характерного размера структурных элементов исследуемого материала. Еще одна необходимая стереометрическая величина – среднее расстояние между порами L – позволяет описать степень структурной анизотропии материала. Согласно определению *Underwood*, среднее расстояние между порами – это «среднее расстояние между двумя границами «материал – пора», измеряемое вдоль определенного направления» [6], то есть L является функцией угла направления линии сетки, вдоль которой производится измерение (рис. 2). Для определения L в данном направлении на изображении исследуемого образца накладывается сетка, состоящая из параллельных тестовых линий, затем измерения повторяются в других различных направлениях.

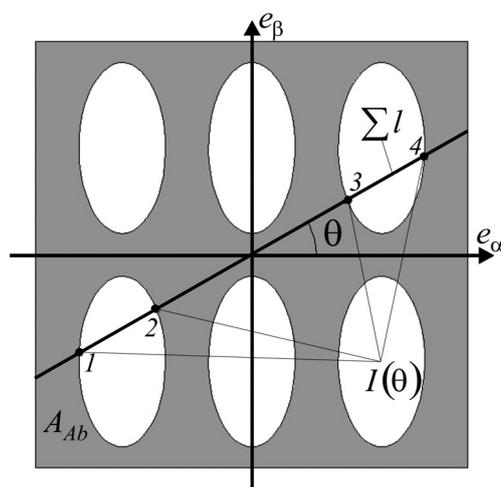


Рис. 2. Определение среднего расстояния между порами для одной тестовой линии в системе координат $(e_\alpha - e_\beta)$ [3]

На практике [2; 3; 9; 11] среднее расстояние между порами принято вычислять по следующей формуле:

$$L_b(\theta) = 2 \frac{\sum l}{I(\theta)} A_{Ab}, \quad (1)$$

где $\sum l$ – суммарная длина тестовых линий, $I(\theta)$ – число пересечений между линиями сетки и границами «материал – пора», A_{Ab} – относительная площадь твердого матрикса в исследуемом образце [1; 3]. В результате серии измерений в различных направлениях можно получить распределение $L_b(\theta)$ [9; 11].

Среднее расстояние между порами как функция направления $L_b(\theta)$ может быть аппроксимирована следующим уравнением:

$$\left(\frac{1}{L_b(\theta)} \right)^2 = \frac{m_{\alpha\alpha} + m_{\beta\beta}}{2} + \frac{m_{\alpha\alpha} - m_{\beta\beta}}{2} \cos 2\theta + m_{\alpha\beta} \sin 2\theta, \quad (2)$$

где индексы α и β обозначают соответственно оси e_α и e_β в системе координат, введенной на плоскости шлифа, в которой проводятся измерения. В результате измерений получается эллипс, соответствующий уравнению (2) и называемый эллипсом структуры [1; 3; 4].

В работе [4], основываясь на экспериментально полученных данных, авторы показали, что в трехмерном случае среднее расстояние между порами $L_b(\theta)$ следует представлять в виде эллипсоида:

$$\left(\frac{1}{L_b(\theta)} \right)^2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}, \quad (3)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор в направлении тестовой линии на шлифе исследуемого образца, определяемый как:

$$\mathbf{n} = \cos \theta \mathbf{e}_\alpha + \sin \theta \mathbf{e}_\beta. \quad (4)$$

Следовательно, можно ввести эквивалентный симметричный, положительно определенный тензор второго ранга: тензор анизотропии \mathbf{M} . Согласно теореме об обратном тензорном признаке [3], $m_{\alpha\alpha}$, $m_{\beta\beta}$, $m_{\alpha\beta}$ являются компонентами тензора анизотропии \mathbf{M} .

В работе [14] было предложено называть тензор, алгебраически связанный с тензором анизотропии, тензором структуры. Тензор структуры \mathbf{H} связан с тензором анизотропии \mathbf{M} следующим образом [1; 9; 14]:

$$\mathbf{H} = (\mathbf{M}^{-1})^{\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

Следует заметить, что главные оси тензоров \mathbf{H} и \mathbf{M} совпадают, однако формы эллипсоидов, геометрически отображающих эти два тензора, несколько отличны друг от друга. При этом для дальнейших расчетов тензор структуры принято нормировать таким образом, чтобы $\text{tr} \mathbf{H} = 1$ [1; 16; 17].

Для плоского случая тензор анизотропии определяется следующим образом:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{\alpha\alpha} & m_{\alpha\beta} \\ m_{\alpha\beta} & m_{\beta\beta} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Для определения трех компонент тензора \mathbf{M} необходимо провести три измерения $L_b(\theta)$ для трех различных равноотстоящих друг от друга [30; 32] направлений θ , а затем решить систему уравнений (2) относительно компонент тензора $m_{\alpha\alpha}$, $m_{\beta\beta}$, $m_{\alpha\beta}$ [9; 11].

Обозначим левую часть уравнения (2) как некоторую функцию $f(\theta)$, зависящую от измеряемых стереологических параметров, а именно:

$$f(\theta) = \left(\frac{1}{L_b(\theta)} \right)^2. \quad (7)$$

В этом случае можно получить зависимость компонент тензора \mathbf{M} от этой функции в общем виде [3; 9; 11]. Для удобства введем следующие обозначения:

$$f_l \stackrel{def}{=} f(\theta_l), \quad l = 1, 2, 3, \quad (8)$$

где f_l – значения введенной стереометрической функции для соответствующего направления θ_l .

На практике наиболее распространенным случаем являются стереологические измерения для следующих направлений: $\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 120^\circ$ и $\theta_3 = 240^\circ$. В таком случае компоненты тензора анизотропии $m_{\alpha\alpha}$, $m_{\beta\beta}$, $m_{\alpha\beta}$ могут быть определены по следующим формулам:

$$m_{\alpha\alpha} = f_1, \quad (9)$$

$$m_{\beta\beta} = \frac{1}{3} [2 \cdot (f_2 + f_3) - f_1], \quad (10)$$

$$m_{\alpha\beta} = \frac{\sqrt{3}}{3} (f_3 - f_2). \quad (11)$$

Учитывая выражение (5), связывающее тензор анизотропии и тензор структуры, можно перейти к общей записи и для соответствующих компонент тензора структуры [9]. Если привести тензор \mathbf{M} к диагональному виду:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{\alpha\alpha} & m_{\alpha\beta} \\ m_{\alpha\beta} & m_{\beta\beta} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_\alpha & 0 \\ 0 & \lambda_\beta \end{pmatrix}, \quad (12)$$

то тогда его компоненты λ_α и λ_β могут быть определены по формуле:

$$\lambda_{\alpha,\beta} = \frac{1}{3} \left[(f_1 + f_2 + f_3) \pm 2\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 - f_1f_2 - f_1f_3 - f_2f_3} \right]. \quad (13)$$

В этом случае тензор структуры примет вид:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} (\lambda_\alpha)^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & (\lambda_\beta)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Таким образом, для поиска среднего расстояния между порами и построения тензоров анизотропии и структуры необходимо выполнить следующую последовательность действий:

1) выбрать область исследования – изображение пористого двухфазного материала (как правило, область исследования является квадратом);

- 2) бинаризовать изображение (преобразовать изображение в черно-белый вариант) так, чтобы белым цветом отображался твердый материал, а черным – поры;
- 3) определить относительную площадь твердого матрикса;
- 4) выбрать шаг тестовой сетки (расстояние между линиями сетки) для дальнейшего поиска числа пересечений линий сетки с границей «материал – пора»;
- 5) наложить сетку, состоящую из параллельных линий, равностоящих друг от друга, на изображение исследуемого материала для трех направлений: под углом 0, 120 и 240°;
- 6) определить число пересечений между линиями сетки и границами «материал – пора»;
- 7) определить суммарную длину линий в сетке;
- 8) вычислить среднее расстояние между порами по формуле (1);
- 9) определить коэффициенты тензора анизотропии по формулам (9)–(11) и коэффициенты тензора структуры по формулам (13)–(14).

Описанная измерительная процедура была алгоритмизирована и реализована в виде комплекса проблемно-ориентированных программ. Алгоритм работы программы представлен на рис. 3.

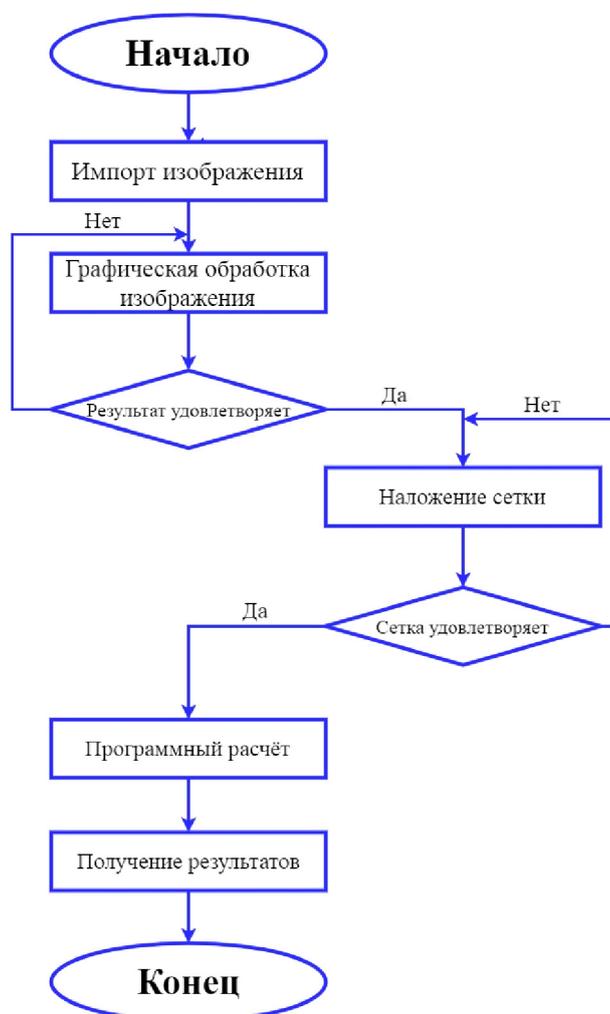


Рис. 3. Алгоритм работы программного комплекса

Для верификации разработанной программы было проведено стереологическое исследование ряда абстрактных тестовых идеализированных структур, чью степень анизотропии не представляет труда определить визуально. Затем был исследован образец

трабекулярной костной ткани, для которого тензор структуры был определен ранее в полуавтоматическом режиме. Полученные результаты не противоречили природной действительности, совпадали с ранее полученными данными для аналогичных пористых структур и описывали степень анизотропии исследованных структур с высокой степенью точности. После того как результаты верификации признаны удовлетворительными, программный продукт был использован для анализа структуры образца высокопористого строительного материала – автоклавного газобетона.

Результаты

С помощью разработанного программного модуля был проведен анализ двух модельных пористых структур: изотропной и анизотропной (рис. 4), ранее использованных в работах [3; 9; 10; 22]. Для этих модельных структур были построены тензоры анизотропии и структуры. Для удобства визуализации поверх представленных микроструктур изображены соответствующие им эллипсы структуры. Для изотропной пористой структуры эллипс структуры показан на рис. 4, *а*, а для анизотропной пористой структуры – на рис. 4, *б*. Можно заметить совпадение главных осей эллипса структуры с направлением преимущественного распределения материала в ориентированной анизотропной структуре, окружность же свидетельствует об изотропии исследуемого образца.

Проверка возможности практического применения программного комплекса для решения инженерно-лабораторных задач, заключалось в анализе изображений образца трабекулярной костной ткани [9] (рис. 5) и образца автоклавного газобетона (рис. 6).

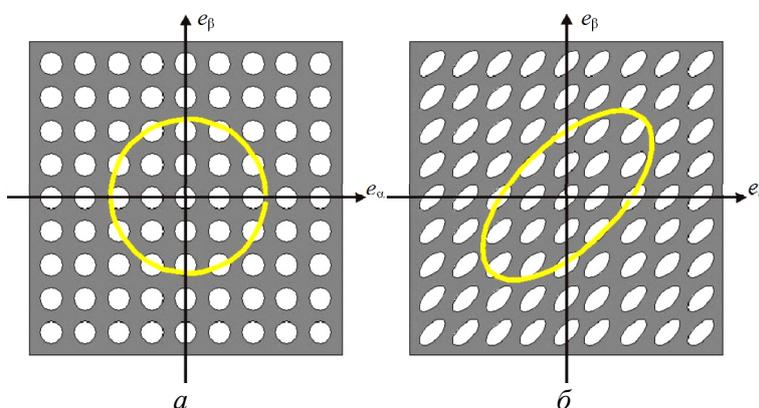


Рис. 4. Тестовые изотропная (*а*) и анизотропная (*б*) модельные пористые объекты с изображенными эллипсами структуры

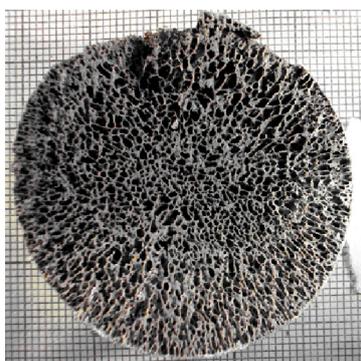


Рис. 5. Поперечный срез шейки бедренной кости человека [9]



Рис. 6. Образец автоклавного газобетона

Результаты цифровой обработки изображений представлены на рис. 7–8.

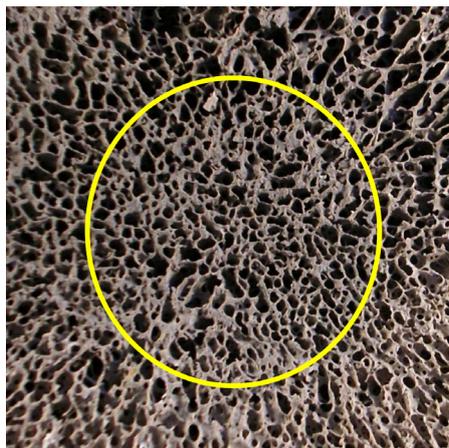


Рис. 7. Образец трабекулярной костной ткани шейки бедренной кости человека с изображенным эллипсом структуры

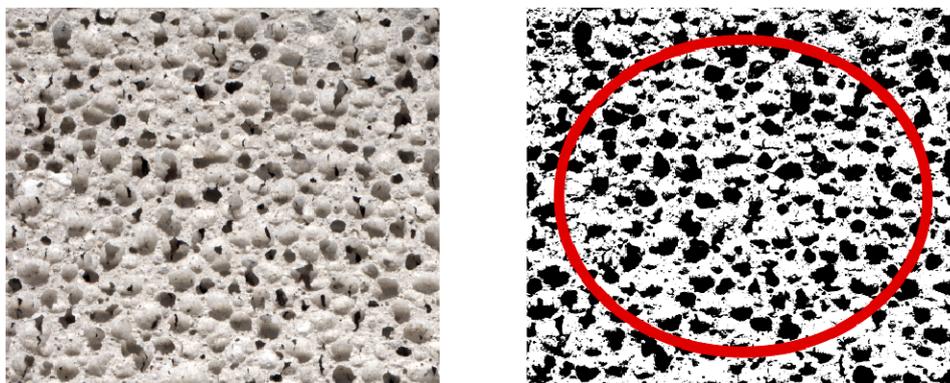


Рис. 8. Образец автоклавного газобетона и бинаризованное изображение представленной структуры (справа) с изображенным эллипсом структуры

Из полученных результатов видно, что тензор структуры способен описывать анизотропные свойства натуральных и искусственных пористых структур, а программный комплекс позволяет автоматизировать процесс определения требуемых параметров.

Заключение

В представленной работе была рассмотрена процедура построения тензора структуры и его визуального образа – эллипса структуры – для различных двухфазных пористых структур. Описан алгоритм определения основных стереометрических параметров и разработан комплекс проблемно-ориентированных программ, позволяющий в интерактивном режиме строить тензор структуры. Верификация работоспособности программы проведена с помощью тестовых микроструктур и образцов ранее уже исследованной структуры трабекулярной костной ткани. С помощью разработанного программного обеспечения были успешно определены стереометрические характеристики автоклавного газобетона.

Список литературы

1. Cowin, S.C. Bone mechanics handbook / S.C. Cowin. – Second edition. – New York: CRC Press. – 2001. – 1136 p.

2. Киченко, А.А. Математическое моделирование структуры губчатой костной ткани с использованием тензора структуры / А.А. Киченко, В.М. Тверье, А.В. Сотин // Математические методы в технологиях и технике. – 2023. – № 9. – С. 41–44.
3. Няшин, Ю.И. Экспериментальные методы в биомеханике / Ю.И. Няшин, Р.М. Подгаец. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2008. – 400 с.
4. Harrigan, T.P. Characterization of microstructural anisotropy in orthotropic materials using a second rank tensor / T.P. Harrigan, R.W. Mann // J. Mater. Sci. – 1984. – Vol. 19. – P. 761–767.
5. Telega, J.J. Fabric tensor in bone mechanics / J.J. Telega, S. Jemiolo // J. Engineering Transactions. – 1998. – Vol. 46. – P. 3–26.
6. Underwood, E. Quantitative stereology / E. Underwood. – Mass.: Addison Wesley, 1970. – 274 p.
7. Whitehouse, W.J. The quantitative morphology of anisotropic trabecular bone / W.J. Whitehouse // J. Microscopy. – 1974. – Vol. 101. – P. 153–168.
8. Whitehouse, W.J. A stereological method for calculating the internal surface areas in structures which have become anisotropic as the result of linear expansions or contractions / W.J. Whitehouse // J. Microscopy. – 1974. – Vol. 101. – P. 169–176.
9. Экспериментальное определение тензора структуры трабекулярной костной ткани / А.А. Киченко, В.М. Тверье, Ю.И. Няшин, А.А. Заборских // Российский журнал биомеханики. – 2011. – Т. 15, № 4. – С. 78–93.
10. О приложении теории перестройки трабекулярной костной ткани / А.А. Киченко, В.М. Тверье, Ю.И. Няшин, М.А. Осипенко, В.А. Лохов // Российский журнал биомеханики. – 2012. – Т. 16, № 4. – С. 53–72.
11. Experimental construction of the fabric tensor for trabecular bone tissue / V. Tverier, A. Kichenko, Y. Nyashin, V. Lokhov // Series on Biomechanics. – 2015. – Vol. 29, no. 4. – P. 33–38.
12. Martin, R.B. Skeletal tissue mechanics. Second edition / R.B. Martin, D.B. Burr, N.A. Sharkey. – New York: Springer-Verlag. – 1998. – 392 p.
13. Oda, M. Fabrics and their effects on the deformation behaviors of sand / M. Oda. – Saitama University: Dept. of Foundation Eng., 1976. – 59 p.
14. Cowin, S.C. Fabric dependence of an anisotropic strength criterion / S.C. Cowin // J. Mech. Materials. – 1986. – Vol. 5. – P. 251–260.
15. Cowin, S.C. Wolff's law of trabecular architecture at remodeling equilibrium / S.C. Cowin // J. Biomech. Engng. – 1986. – Vol. 108. – P. 83–88.
16. The fabric dependence of the orthotropic elastic constants of cancellous bone / C.H. Turner, S.C. Cowen, J.Y. Rho, R.B. Ashman, J.C. Rice // J. Biomechanics. – 1990. – Vol. 23. – P. 549–561.
17. Cowin, S.C. An evolutionary Wolff's law for trabecular architecture / S.C. Cowin // J. Biomech. Engng. – 1992. – Vol. 114. – P. 129–136.
18. Постановка начально-краевой задачи о перестройке трабекулярной костной ткани / А.А. Киченко, В.М. Тверье, Ю.И. Няшин, М.А. Осипенко, В.А. Лохов // Российский журнал биомеханики. – 2012. – Т. 16, № 4. – С. 36–52.
19. Mathematical modelling of trabecular bone tissue remodelling under load / V. Tverier, A. Kichenko, Y. Nyashin, V. Lokhov // Series on Biomechanics. – 2015. – Vol. 29, No. 4. – P. 39–44.
20. Биомеханическое моделирование трабекулярной костной ткани в состоянии равновесия / Т.Н. Чикова, А.А. Киченко, В.М. Тверье, Ю.И. Няшин // Российский журнал биомеханики. – 2018. – Т. 22, № 3. – С. 282–291.

21. Моделирование перестройки трабекулярной костной ткани в ветви нижней челюсти человека / Т.Н. Чикова, А.А. Киченко, В.М. Тверье, Ю.И. Няшин // Российский журнал биомеханики. – 2018. Т. 22, № 3. – С. 292–300.

22. Киченко, А.А. Перестройка структуры губчатой костной ткани: математическое моделирование / А.А. Киченко // Российский журнал биомеханики. – 2019. – Т. 23, № 3. – С. 336–358.

23. Киченко, А.А. Математическое моделирование адаптации губчатой костной ткани применительно к зубочелюстной системе человека / А.А. Киченко // Прикладная математика и вопросы управления. – 2020. – № 3. – С. 35–48.

24. Киченко, А.А. Описание адаптации трабекулярной костной ткани посредством тензора структуры на примере зубочелюстной системы человека / А.А. Киченко // XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике: сборник тезисов докладов: в 4 т., Санкт-Петербург, 21–25 августа 2023 г. – Т. 4. Материалы симпозиумов и исторической сессии. – С. 58–60.

References

1. Cowin S.C. Bone mechanics handbook. Second edition. New York: CRC Press, 2001, 1136 p.

2. Kichenko A.A., Tverier V.M., Nyashin Y.I. Matematicheskoe modelirovanie struktury gubchatoi kostnoi tkani s ispol'zovaniem tenzora sruktury [Mathematical modeling of cancellous bone tissue structure using the fabric tensor]. *Mathematical methods in technology and engineering*, 2023, no. 9, pp. 41–44.

3. Nyashin Y.I., Podgaets R.M. Eksperimentalnye metody v biomekhanike [Experimental methods in biomechanics]. Perm: Permskiy Gos. Tekhnich. Univ., 2008, 400 p.

4. Harrigan T.P., Mann R.W. Characterization of microstructural anisotropy in orthotropic materials using a second rank tensor. *J. Mater. Sci.*, 1984, vol. 19, pp. 761–767.

5. Telega J.J., Jemiolo S. Fabric tensor in bone mechanics. *J. Engineering Transactions*, 1998, vol. 46, pp. 3–26.

6. Underwood E. Quantitative stereology. Mass.: Addison Wesley, 1970, 274 p.

7. Whitehouse W.J. The quantitative morphology of anisotropic trabecular bone. *J. Microscopy*, 1974, vol. 101, pp. 153–168.

8. Whitehouse W.J. A stereological method for calculating the internal surface areas in structures which have become anisotropic as the result of linear expansions or contractions *J. Microscopy*, 1974, vol. 101, pp. 169–176.

9. Kichenko A.A., Tverier V.M., Nyashin Y.I., Zaborskikh A.A. Experimental determination of the fabric tensor for cancellous bone tissue. *Russian Journal of Biomechanics*, 2011, vol. 15, no. 4, pp. 66–81.

10. Kichenko A.A., Tverier V.M., Nyashin Y.I., Lokhov V.A. On application of the theory of trabecular bone tissue remodeling. *Russian Journal of Biomechanics*, 2012, vol. 16, no. 4, pp. 53–72.

11. Tverier V., Kichenko A., Nyashin Y., Lokhov V. Experimental construction of the fabric tensor for trabecular bone tissue. *Series on Biomechanics*, 2015, vol. 29, no. 4, pp. 33–38.

12. Martin R.B., Burr D.B., Sharkey N.A. Skeletal tissue mechanics. Second edition. New York: Springer-Verlag, 1998, 392 p.

13. Oda M. Fabrics and their effects on the deformation behaviors of sand. Saitama University: Dept. of Foundation Eng., 1976, 59 p.

14. Cowin S.C. Fabric dependence of an anisotropic strength criterion. *J. Mech. Materials*, 1986, vol. 5, pp. 251–260.
15. Cowin S.C. Wolff's law of trabecular architecture at remodeling equilibrium. *J. Biomech. Engng.*, 1986, vol. 108, pp. 83–88.
16. Turner C.H., Cowen S.C., Rho J.Y., Ashman R.B., Rice J.C. The fabric dependence of the orthotropic elastic constants of cancellous bone *J. Biomechanics*, 1990, vol. 23, pp. 549–561.
17. Cowin S.C. An evolutionary Wolff's law for trabecular architecture. *J. Biomech. Engng.*, 1992, vol. 114, pp. 129–136.
18. Kichenko A.A., Tverier V.M., Nyashin Y.I., Lokhov V.A. Statement of initial boundary value problem on the trabecular bone tissue remodelling. *Russian Journal of Biomechanics*, 2012, vol. 16, no. 4, pp. 36–52.
19. Tverier V., Kichenko A., Nyashin Y., Lokhov V. Mathematical modelling of trabecular bone tissue remodelling under load. *Series on Biomechanics*, 2015, vol. 29, no. 4, pp. 39–44.
20. Chikova T.N., Kichenko A.A., Tverier V.M., Nyashin Y.I. Biomechanical modelling of trabecular bone tissue in remodelling equilibrium. *Russian Journal of Biomechanics*, 2018, vol. 22, no. 3, pp. 245–253.
21. Chikova T.N., Kichenko A.A., Tverier V.M., Nyashin Y.I. Modelling of cancellous bone tissue adaptation in the ramus of human mandible. *Russian Journal of Biomechanics*, 2018, vol. 22, no. 3, pp. 254–262.
22. Kichenko A.A. Cancellous bone tissue remodelling: mathematical modelling. *Russian Journal of Biomechanics*, 2019, vol. 23, no. 3, pp. 336–358.
23. Kichenko A.A. Matematicheskoe modelirovanie adaptatsii gubchatoi kostnoi tkani primenitel'no k zuchelustnoi sisteme cheloveka [Mathematical modeling of cancellous bone tissue adaptation in relation to the human dentofacial system]. *Applied mathematics and management issues*, 2020, no. 3, pp. 35–48.
24. Kichenko A.A. Opisaniye adaptatsii trabeculiarnoi kostnoi tkani posredstvom tensora struktury na primere zucheliustnoi sistemy cheloveka [Description of trabecular bone tissue adaptation by menace of the fabric tensor using of the human dentofacial system example]. *All-Russian Congress on Theoretical and Applied Mechanics: collection of abstracts in 4 volumes*, St. Petersburg, 21–25 August, 2023, vol. 4, Materials of symposia and historical session, pp. 58–60.