

**Библиографическое описание согласно ГОСТ Р 7.0.100–2018**

Демидов, Л. Н. Синтез гибридного контура адаптации в системе управления с неявной эталонной моделью / Л. Н. Демидов, Е. В. Леун, А. Ю. Романов. – Текст : непосредственный // Прикладная математика и вопросы управления / Applied Mathematics and Control Sciences. – 2024. – № 1. – С. 94–110. – DOI 10.15593/2499-9873/2024.1.06



**ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА  
И ВОПРОСЫ УПРАВЛЕНИЯ**  
№ 1, 2024

<https://ered.pstu.ru/index.php/amcs>



Научная статья

DOI: 10.15593/2499-9873/2024.1.06

УДК 519.71



## Синтез гибридного контура адаптации в системе управления с неявной эталонной моделью

Л.Н. Демидов<sup>1</sup>, Е.В. Леун<sup>2</sup>, А.Ю. Романов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва, Российская Федерация

<sup>2</sup>АО «НПО Лавочкина», Химки, Российская Федерация

### О СТАТЬЕ

Получена: 02 октября 2023

Одобрена: 25 марта 2024

Принята к публикации:

27 апреля 2024

#### Финансирование

Исследование не имело спонсорской поддержки.

#### Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

#### Вклад авторов

равноценен.

#### Ключевые слова:

адаптивное управление, неопределенность параметров, эталонная модель, самонастройка, регулятор, гибридный алгоритм, метод наименьших квадратов, устойчивость, функция Ляпунова, бурение.

### АННОТАЦИЯ

Развивается схема построения систем прямого адаптивного управления с неявной эталонной моделью для линейных непрерывных объектов. Ключевым условием сходимости настраиваемых параметров к их идеальным значениям является постоянство «богатого» по гармоникам возбуждения системы. В реальных системах это требование трудно выполнимо, поскольку задающие воздействия должны быть отработаны системой на ограниченном интервале времени. Стремление получить в системах адаптивного управления быструю параметрическую сходимость является двигателем исследований в области гибридных адаптивных систем. В данной работе гибридность понимается в том смысле, что объект управления является непрерывным, а регулятор или какая-либо его часть – дискретным. Предлагается схема синтеза гибридного контура адаптации, в которой непрерывная часть алгоритма использует в качестве параметра дискретную оценку матрицы идеальной настройки регулятора. Ставится задача получить модель параметрической ошибки в виде уравнения линейной регрессии относительно параметров идеальной настройки регулятора. Вводится квадратичный критерий параметрического рассогласования. Соответствующая задача минимизации по искомым оценкам приводит к алгоритму наименьших квадратов, который может быть использован как в одношаговой, так и в рекуррентной форме. Проводится анализ устойчивости методом функций Ляпунова. Определены условия, при которых замкнутая система является диссипативной. Цель данной работы – показать преимущество гибридного контура адаптации перед традиционным. Для этого теоретические результаты дополняются примером численного моделирования. Сравняется динамика системы с традиционным непрерывным алгоритмом адаптации и с гибридным алгоритмом. В обоих случаях исследуемая функция Ляпунова является невозрастающей. Это отражает устойчивость системы. Однако в традиционной системе скорость сходимости существенно меньше, что приводит к большей координатной ошибке. В системе же с гибридным контуром адаптации имеет место относительно быстрая как координатная, так и параметрическая сходимость в допустимо малую зону диссипации.

© Демидов Лев Николаевич – кандидат технических наук, доцент, департамент бизнес-информатики, e-mail: demidov@mpsystems.su, ORCID: 0009-0003-5786-0343.

Леун Евгений Владимирович – кандидат технических наук, ведущий инженер, e-mail: stankin1999@mail.ru, ORCID: 0009-0005-3359-5439.

Романов Алексей Юрьевич – кандидат технических наук, доцент, департамент бизнес-информатики, e-mail: ray63@mail.ru, ORCID: 0009-0000-1938-134X.



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

**Perm Polytech Style:** Demidov L.N., Leun E.V., Romanov A.Yu. The hybrid adaptation loop synthesis for control system with an implicit reference model. *Applied Mathematics and Control Sciences*. 2024, no. 1, pp. 94–110. DOI: 10.15593/2499-9873/2024.1.06

**MDPI and ACS Style:** Demidov, L.N.; Leun, E.V.; Romanov, A.Yu. The hybrid adaptation loop synthesis for control system with an implicit reference model. *Appl. Math. Control Sci.* **2024**, *1*, 94–110. <https://doi.org/10.15593/2499-9873/2024.1.06>

**Chicago/Turabian Style:** Demidov, Lev N., Evgenii V. Leun, and Aleksey Yu. Romanov. 2024. “The hybrid adaptation loop synthesis for control system with an implicit reference model”. *Appl. Math. Control Sci.* no. 1: 94–110. <https://doi.org/10.15593/2499-9873/2024.1.06>



APPLIED MATHEMATICS  
AND CONTROL SCIENCES

№ 1, 2024

<https://ered.pstu.ru/index.php/amcs>



Article

DOI: 10.15593/2499-9873/2024.1.06

UDC 519.71



## The hybrid adaptation loop synthesis for control system with an implicit reference model

L.N. Demidov<sup>1</sup>, E.V. Leun<sup>2</sup>, A.Yu. Romanov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup>Lavochkin Association, JSC, Khimki, Moscow region, Russian Federation

### ARTICLE INFO

Received: 02 October 2023

Approved: 25 March 2024

Accepted for publication:

27 April 2024

#### Funding

This research received no external funding.

#### Conflicts of Interest

The authors declare no conflict of interest.

#### Author Contributions

equivalent.

#### Keywords:

adaptive control, uncertainty of parameters, reference model, self-tuning, controller, hybrid algorithm, least squares method, stability, Lyapunov function, drilling.

### ABSTRACT

A scheme for constructing direct adaptive control systems with an implicit reference model for linear continuous objects is being developed. The key condition for the convergence of the tunable parameters to their ideal values is the constancy of the "rich" harmonic excitation of the system. In real systems, this requirement is difficult to fulfill because the setting effects must be worked out by the system over a limited time interval. The desire to obtain fast parametric convergence in adaptive control systems is the engine of research in the field of hybrid adaptive systems. In this paper, hybridity is understood in the sense that the control object is continuous, and the controller, or any part of it, is discrete. A scheme for the synthesis of a hybrid adaptation circuit is proposed, in which the continuous part of the algorithm uses as a parameter a discrete estimate of the ideal adjustment matrix of the regulator. The task is to obtain a parametric error model in the form of a linear regression equation with respect to the parameters of the ideal setting of the regulator. A quadratic criterion of parametric mismatch is introduced. The corresponding minimization problem according to the desired estimates leads to the least squares algorithm, which can be used both in one-step and recurrent form. It is shown that the recurrent least squares algorithm can be used in this part. Stability analysis is carried out by the Lyapunov function method. The conditions under which a closed system is dissipative are determined. The purpose of this work is to show the advantage of the hybrid adaptation circuit over the traditional one. To do this, the theoretical results are supplemented with examples of numerical modeling. The dynamics of the system is compared with the traditional continuous adaptation algorithm and with the hybrid algorithm. In both cases, the Lyapunov function under study is non-increasing. This reflects stability of the system. However, in a traditional system, the convergence rate is significantly lower, which leads to a larger coordinate error. In a system with a hybrid adaptation contour, there is a relatively fast both coordinate and parametric convergence into an admittedly small dissipation zone.

© Lev N. Demidov – CSc of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Computer Sciences for Business, e-mail: demidov@mpsystems.su, ORCID: 0009-0003-5786-0343.

Evgenii V. Leun – CSc of Technical Sciences, e-mail: stankin1999@mail.ru, ORCID: 0009-0005-3359-5439.

Aleksey Yu. Romanov – CSc of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Computer Sciences for Business, e-mail: ray63@mail.ru, ORCID: 0009-0000-1938-134X.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

## Введение

Анализ известных схем построения систем прямого адаптивного управления (СПАУ) [1; 2] показывает, что ключевым условием для сходимости настраиваемых параметров к их идеальным значениям является постоянство «богатого» по гармоникам возбуждения системы [3]. В реальных системах это требование трудно выполнимо поскольку задающие воздействия вызывают перевод системы из одного состояния в другое на ограниченном интервале времени. При этом, несмотря на то, что адаптация обеспечивает сходимость вектора состояния объекта к вектору состояния эталонной модели, текущая настройка регулятора остается отличной от идеальной. Это обстоятельство может привести к неудовлетворительным результатам в случае, когда условия эксплуатации системы требуют отключения контура адаптации. Например, на режимах, для которых не выполняются предположения, сделанные при его синтезе. Стремление получить в системах прямого адаптивного управления быструю параметрическую сходимость является двигателем исследований как в области гибридных адаптивных систем [4–6], так и в области прикладных систем управления динамическими объектами. В частности, в области космических исследований небесных тел контактными методами с помощью грунтозаборных устройств автоматических межпланетных станций актуальными являются задачи разработки и совершенствования алгоритмов автоматической коррекции параметров бурения реголита (грунта), в том числе адаптивных [7–9].

Традиционно гибридность системы управления понимается в том смысле, что объект управления является непрерывным, а регулятор или какая-либо его часть – дискретным. В частности, применительно к СПАУ имеется ввиду использование рекуррентных алгоритмов метода наименьших квадратов (МНК) для настройки параметров регулятора. В отличие от систем с идентификацией параметров объекта [10; 11], в СПАУ требуется рассмотреть задачу относительно параметров регулятора.

Известны следующие подходы к решению задачи гибридного прямого адаптивного управления. Это аппроксимация непрерывного объекта дискретной моделью и синтез дискретного регулятора и контура адаптации [12]. Естественные сложности здесь возникают в связи с проблемой корректности такой аппроксимации. При другом подходе [4] реализуется дискретный контур адаптации для непрерывного основного контура СПАУ. Поскольку параметры непрерывного закона управления здесь изменяются в дискретные моменты времени, производная управления периодически будет терпеть разрывы. Это требует особой тщательности в исследовании работоспособности системы в условиях помех.

В данной работе рассматривается структура СПАУ, в которой гибридным является контур адаптации (рис. 1). При этом параметры регулятора настраиваются непрерывно. Алгоритм непрерывной части контура адаптации использует в качестве параметра и фактически отслеживает оценку матрицы идеальной настройки регулятора, которая вычисляется на основе МНК в дискретной части контура адаптации.

В отличие от ранее опубликованных работ [6; 12], где исследуются подобные системы, здесь развивается схема синтеза гибридной СПАУ с неявной эталонной моделью.

## Постановка задачи

Рассмотрим объект управления, описываемый уравнением вида

$$dx / dt = \mathbf{A} x + \mathbf{B} u, \quad (1)$$

где  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  – вектор управления,  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  – матрицы соответствующих размерностей с постоянными, но априори неизвестными элементами.

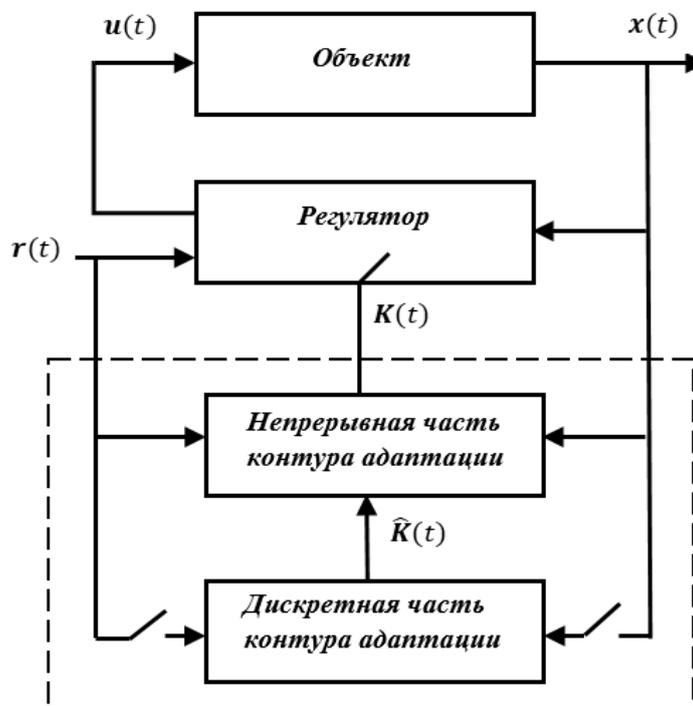


Рис. 1. Структура системы прямого адаптивного управления с гибридным контуром адаптации

Желаемая динамика объекта определяется уравнением эталонной модели вида

$$d\mathbf{x}_M / dt = \mathbf{A}_M \mathbf{x}_M + \mathbf{B}_M \mathbf{r}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{x}_M \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния,  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^m$  – вектор задающего воздействия,  $\mathbf{A}_M, \mathbf{B}_M$  – заданные матрицы соответствующих размерностей, причем  $\mathbf{A}_M$  – устойчива, то есть все ее собственные значения имеют отрицательные действительные части.

Задача синтеза системы прямого адаптивного управления состоит в определении структуры регулятора

$$\mathbf{u} = f(\mathbf{K}_i, \mathbf{x}, \mathbf{r})$$

и алгоритмов настройки элементов его матриц  $\mathbf{K}_i$ , при которых достигается цель управления вида

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}\| \leq \rho, \quad \rho = \text{const} \geq 0. \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_M$  – вектор координатной ошибки,  $\|\cdot\|$  – обозначение евклидовой нормы вектора.

Анализ работ, посвященных решению данной задачи, например [1; 2], показывает, что структура регулятора либо задается априори, либо ищется из условия достижения заданной цели управления в предположении, что параметры объекта известны. При этом не ставится цель получить тот или иной вид модели ошибки. Модель ошибки используется лишь при анализе устойчивости и не играет конструктивной роли в синтезе системы.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы показать возможность использования модели ошибки для МНК-настройки параметров регулятора без явной реализации эталонной модели в виде динамического звена. Поэтому задачу синтеза СПАУ поставим следующим образом:

1. Сформировать основной контур СПАУ таким образом, чтобы модель параметрической ошибки имела вид уравнения линейной регрессии относительно параметров идеальной настройки регулятора.
2. Синтезировать гибридный алгоритм настройки параметров регулятора, использующий лишь элементы матриц эталонной модели  $\mathbf{A}_M, \mathbf{B}_M$ , а не ее вектор состояния  $\mathbf{x}_M$  и обеспечивающий выполнение предельного соотношения (3).

### Синтез регулятора

Для определения закона формирования управляющего воздействия и соответствующей структуры регулятора сделаем ряд шагов, следуя типовой схеме синтеза основного контура СПАУ [1], а именно перепишем уравнение объекта (1) с учетом (2) в виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} - \mathbf{A}_M \mathbf{x} - \mathbf{B}_M \mathbf{r} = \mathbf{B} \mathbf{u} - (\mathbf{A}_M - \mathbf{A}) \mathbf{x} - \mathbf{B}_M \mathbf{r} \quad (4)$$

и вычтем из него уравнение эталонной модели (2). В результате получим уравнение для координатной ошибки в виде

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} - \mathbf{A}_M \mathbf{e} = \mathbf{B} \mathbf{u} - (\mathbf{A}_M - \mathbf{A}) \mathbf{x} - \mathbf{B} \mathbf{r}. \quad (5)$$

Если управляющее воздействие  $\mathbf{u}$  будет удовлетворять уравнению

$$\mathbf{B} \mathbf{u} = (\mathbf{A}_M - \mathbf{A}) \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{r}, \quad (6)$$

тогда, согласно (5), координатная ошибка будет удовлетворять однородному дифференциальному уравнению вида

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \mathbf{A}_M \mathbf{e}$$

и, в силу устойчивости матрицы  $\mathbf{A}_M$ , обладать свойством:  $\mathbf{e} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , что соответствует цели управления (3). Уравнение (6) называют уравнением эталонного регулятора. Поскольку матрицы  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  объекта неизвестны, реализовать эталонный регулятор невозможно. Однако соотношение (6) указывает на класс уравнений, в котором следует задавать закон управления. Поэтому реальный регулятор зададим уравнением вида

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_1^+ \mathbf{K}_2 \mathbf{x} + \mathbf{K}_1^+ \mathbf{B}_M \mathbf{r}, \quad (7)$$

с матрицами  $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ , элементы которых подлежат настройке в процессе работы замкнутой системы. Здесь  $\mathbf{K}_1^+ = (\mathbf{K}_1^T \mathbf{K}_1)^{-1} \mathbf{K}_1^T$  – матрица, псевдообратная для  $\mathbf{K}_1$ . При этом матрицы идеальной настройки  $\mathbf{K}_1^*, \mathbf{K}_2^*$  регулятора (7) будут иметь вид

$$\mathbf{K}_1^* = \mathbf{B}, \mathbf{K}_2^* = \mathbf{A}_M - \mathbf{A}.$$

Далее, при традиционном подходе, переходят к решению задачи синтеза алгоритмов настройки элементов матриц регулятора, пропуская этап анализа уравнения ошибки (5). Однако данный этап играет ключевую роль в синтезе гибридного контура адаптации.

Обозначим вектор, формируемый из слагаемых левой части уравнения (4), как

$$\boldsymbol{\sigma} \triangleq \frac{d\mathbf{x}}{dt} - \mathbf{A}_M \mathbf{x} - \mathbf{B}_M \mathbf{r}. \quad (8)$$

Определим также общую матрицу настраиваемых параметров как

$$\mathbf{K} \triangleq [\mathbf{K}_1 \mid \mathbf{K}_2]^T, \quad (9)$$

матрицу общих параметрических рассогласований как

$$\Delta \triangleq \mathbf{K} - \mathbf{K}^* = [\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_1^* \mid \mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_2^*]^T, \quad (10)$$

вектор сигналов как

$$\mathbf{z} \triangleq \text{col}[-\mathbf{u} \mid \mathbf{x}]. \quad (11)$$

Суммирование уравнений (5) и (7) приводит к уравнению для координатной ошибки вида

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} - \mathbf{A}_M \mathbf{e} = -(\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_1^*) \mathbf{u} + (\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_2^*) \mathbf{x}$$

или, в силу обозначений (10), (11), вида

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} - \mathbf{A}_M \mathbf{e} = \Delta^T \mathbf{z}. \quad (12)$$

Аналогично суммирование уравнений (4) и (7) приводит к уравнению для параметрической ошибки

$$\boldsymbol{\sigma} = \Delta^T \mathbf{z}. \quad (13)$$

Очевидно, что из условия  $\boldsymbol{\sigma} = 0$  следует  $\mathbf{e} \rightarrow 0$ , но не следует  $\Delta = 0$ . Традиционные же алгоритмы адаптации, минимизирующие целевой функционал вида  $J = \boldsymbol{\sigma}^2$ , реализуют именно обнуление  $\boldsymbol{\sigma}$ , и для обеспечения параметрической сходимости в таких системах необходимо выполнение условий постоянства возбуждения [3] с целью исключить ортогональность столбцов матрицы  $\Delta$  и вектора  $\mathbf{z}$ . Но и в этом случае обеспечивается лишь асимптотическая сходимость  $\Delta$  к нулю.

Использование гибридного контура адаптации позволяет получить практически приемлемую оценку матрицы  $\mathbf{K}^*$  на ограниченном интервале времени. Предлагаемая схема дискретного оценивания матрицы  $\mathbf{K}^*$  основывается на преобразовании уравнения (13) к виду линейной регрессии относительно параметров идеальной настройки регулятора. Действительно, определив вектор выхода регрессионной модели как

$$\mathbf{q} \triangleq \mathbf{K}^T \mathbf{z} - \boldsymbol{\sigma}, \quad (14)$$

мы приходим к искомому соотношению

$$\mathbf{q} = \mathbf{K}^{*T} \mathbf{z}. \quad (15)$$

## Синтез контура адаптации

Введем оценку  $\hat{\mathbf{q}}$  вектора  $\mathbf{q}$  как

$$\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{K}}^T \mathbf{z}, \quad (16)$$

где  $\hat{\mathbf{K}}$  – оценка матрицы идеальной настройки регулятора. Тогда решение стандартной задачи минимизации по  $\hat{\mathbf{K}}$  квадратичного критерия вида

$$J = \frac{1}{2} \|\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}\|^2 \quad (17)$$

приводит к алгоритму наименьших квадратов, который может быть использован как в одношаговой, так и рекуррентной форме [13]. Данный алгоритм реализуется в дискретной части контура адаптации при использовании следующего предположения относительно неизвестной матрицы  $\mathbf{K}^*$ .

*Предположение.* Существует известная выпуклая область  $\mathbb{C}$ , удовлетворяющая условиям:

- а)  $\mathbf{K}^* \in \mathbb{C}$ ,
- б) для любых  $\mathbf{K}_1 \in \mathbb{C}$  матрица  $\mathbf{K}_1^T \mathbf{K}_1$  является не особой.

Пусть элементы векторов  $\mathbf{q}(t)$  и  $\mathbf{z}(t)$  объекта с непрерывным временем дискретизируются с периодом  $T$  в моменты  $t = kT, k \in \mathbb{Z}^+$ . Обозначим через  $\hat{\mathbf{K}}(t_k)$  оценку матрицы  $\mathbf{K}^*$  и положим  $t_k = kT, k \in \mathbb{Z}^+$ . Тогда  $\hat{\mathbf{K}}(t) = \hat{\mathbf{K}}(t_k)$  для  $t \in [t_k, t_{k+1}[$  и  $\hat{\mathbf{K}}(t)$  корректируется при каждом  $t = t_k$  следующим образом

$$\hat{\mathbf{K}}(t_k) = Proj \left\{ \hat{\mathbf{K}}(t_k) + \frac{\mathbf{R}(t_{k-1})\mathbf{z}(t_k)}{1 + \mathbf{z}^T(t_k)\mathbf{R}(t_{k-1})\mathbf{z}(t_k)} \hat{\mathbf{e}}(t_k) \right\}, \quad (18)$$

где  $\hat{\mathbf{e}}(t_k) = \mathbf{q}(t_k) - \hat{\mathbf{K}}(t_{k-1})\mathbf{z}(t_k)$ ,

$$\mathbf{R}(t_{k-1}) = \mathbf{R}(t_{k-2}) - \frac{\mathbf{R}(t_{k-2})\mathbf{z}(t_{k-1})\mathbf{z}^T(t_{k-1})\mathbf{R}(t_{k-2})}{1 + \mathbf{z}^T(t_{k-1})\mathbf{R}(t_{k-2})\mathbf{z}(t_{k-1})},$$

$Proj\{\dots\}$  – оператор проекции, ограничивающий  $\hat{\mathbf{K}}(t_k)$  в известной выпуклой области  $\mathbb{C}$ .

Предполагается, что алгоритм (18) запускается в момент времени  $t_{\text{СТАРТ}} = t_0$ . На интервале  $[t_0, t_{\text{СТАРТ}}[$  осуществляется начальный набор данных и вычисление начальных значений матриц  $\mathbf{R}(t_{\text{СТАРТ}})$  и  $\hat{\mathbf{K}}(t_{\text{СТАРТ}})$  как

$$\mathbf{R}(t_{\text{СТАРТ}}) = [\mathbf{Z}^T \mathbf{Z}]^{-1}, \quad \hat{\mathbf{K}}(t_{\text{СТАРТ}}) = \mathbf{R}(t_{\text{СТАРТ}}) \mathbf{Z}^T \mathbf{Q}, \quad (19)$$

где  $\mathbf{Z}^T = [\mathbf{z}(t_0) \dots \mathbf{z}(t_k) \dots \mathbf{z}(t_{\text{СТАРТ}})]$ ,  $\mathbf{Q}^T = [\mathbf{q}(t_0) \dots \mathbf{q}(t_k) \dots \mathbf{q}(t_{\text{СТАРТ}})]$ .

Согласно результатам работы [13], алгоритм (18) обладает следующими свойствами:

- а) Оценка  $\hat{\mathbf{K}}(t_k)$  ограничена для всех  $k \in \mathbb{Z}^+$ , (20)
- б)  $Tr \mathbf{E}^T(t_k) \mathbf{E}(t_k) \leq Tr \mathbf{E}^T(t_{k-1}) \mathbf{E}(t_{k-1})$ ,

$$в) \lim_{t_k \rightarrow \infty} \frac{\hat{e}_i(t_k)}{\sqrt{1 + \mathbf{z}^T(t_k) \mathbf{z}(t_k)}} = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

где  $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{K}} - \mathbf{K}^*$ ,  $Tr$  – обозначение следа матрицы.

При выборе алгоритма настройки параметров регулятора (7) в виде

$$\mathbf{K} = \hat{\mathbf{K}}, \quad (21)$$

получается гибридная адаптивная система, структурно соответствующая системе, рассмотренной в [4]. Как показывает работа [4], доказательство ограниченности сигналов в гибридной системе с одним входом и одним выходом представляет собой нетривиальную математическую задачу, а ее решение для системы со многими входами и выходами, работающей в условиях помех, остается проблематичным и в настоящее время.

Здесь предлагается иной подход для настройки элементов матрицы  $\mathbf{K}$ , а именно использовать оценку  $\hat{\mathbf{K}}$  таким образом, чтобы ее дискретность не вносила дополнительных особенностей в анализ устойчивости замкнутой системы.

Рассмотрим целевой функционал для контура адаптации в виде

$$J_a = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2} Tr(\mathbf{K} - \hat{\mathbf{K}})^T \mathbf{G} (\mathbf{K} - \hat{\mathbf{K}}), \quad (22)$$

где  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{G}$  положительно определенные симметричные матрицы соответствующих размерностей. Тогда алгоритм адаптации можно определить как процедуру, реализующую минимизацию функционала (22) в направлении антиградиента по настраиваемым параметрам, т.е.

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = -grad|_{\mathbf{K}} J_a. \quad (23)$$

В силу соотношений (9)–(11), (13) алгоритм (23) принимает вид

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}(t_0) - \int_{t_0}^t [\mathbf{z} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{F} + \mathbf{G} (\mathbf{K} - \hat{\mathbf{K}})] dt, \mathbf{K}(t_0) \in \mathbb{C}. \quad (24)$$

Данный алгоритм является более «гибким», по сравнению с (21). Настройка параметров регулятора осуществляется непрерывно. Ступенчатая функция  $\hat{\mathbf{K}}(t)$  интегрируется. Это исключает влияние особенностей дискретной части системы на динамику замкнутого контура. Имеется возможность оптимизации работы непрерывной части контура адаптации посредством соответствующего выбора матриц  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{G}$ . На интервале  $[t_0, t_{\text{СТАРТ}}]$  начального набора данных для запуска алгоритма (18) настройка параметров регулятора может осуществляться либо при  $\mathbf{G} = 0$ , либо при  $\hat{\mathbf{K}}(t) = \mathbf{K}(t_0)$ , если управление  $\mathbf{u} = f(\mathbf{K}(t_0), \mathbf{x}, \mathbf{r})$  априори устойчиво. Наконец, для анализа устойчивости замкнутой системы (1), (7), (8), (11), (18), (24) может быть использован прямой метод Ляпунова.

## Анализ устойчивости

Рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$V(t) = \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + Tr \Delta^T \Delta \quad (25)$$

и исследуем знаковые свойства ее производной по времени. Здесь  $\mathbf{P}$  положительно определенная симметричная матрица. В силу (12), (13) будем иметь

$$\frac{dV(t)}{dt} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{A}_M^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{A}_M \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} + 2 \text{Tr} \Delta^T \frac{d\Delta}{dt}. \quad (26)$$

Определим матрицы  $\boldsymbol{\delta}$  и  $\mathbf{E}$  как

$$\boldsymbol{\delta} \triangleq \mathbf{K} - \hat{\mathbf{K}}, \quad \mathbf{E} \triangleq \hat{\mathbf{K}} - \mathbf{K}^*, \quad (27)$$

матрицу  $\mathbf{P}$  как решение уравнения Ляпунова

$$\mathbf{A}_M^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_M = -\mathbf{Q} \quad (28)$$

для некоторой матрицы  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > 0$  и заметим, что

$$\begin{aligned} \Delta &= \mathbf{K} - \mathbf{K}^* = \mathbf{K} - \hat{\mathbf{K}} + \hat{\mathbf{K}} - \mathbf{K}^* = \boldsymbol{\delta} + \mathbf{E}, \\ \frac{d\Delta}{dt} &= \frac{d\mathbf{K}}{dt} = -\mathbf{z} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{F} - \mathbf{G} \boldsymbol{\delta} \quad \text{для } \mathbf{F} = \mathbf{F}^T > 0, \mathbf{G} = \mathbf{G}^T > 0. \end{aligned}$$

Тогда (26) можно переписать в виде

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + 2 \mathbf{e}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} + 2 \text{Tr} \Delta^T (-\mathbf{z} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{F} - \mathbf{G} \boldsymbol{\delta}).$$

Так как  $\text{Tr} \mathbf{a}^T \mathbf{b} = \text{Tr} \mathbf{b}^T \mathbf{a}$  для любых  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ , то

$$\begin{aligned} \text{Tr} \Delta^T \mathbf{z} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{F} &= \text{Tr} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{F} \Delta^T \mathbf{z} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma}, \\ -\text{Tr} \Delta^T \mathbf{G} \boldsymbol{\delta} &= -\text{Tr} \Delta^T \mathbf{G} (\Delta - \mathbf{E}) = -\text{Tr} \Delta^T \mathbf{G} \Delta + \text{Tr} \Delta^T \mathbf{G} \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} - 2 \text{Tr} \Delta^T \mathbf{G} \Delta - 2 \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma} + 2 \mathbf{e}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} + 2 \text{Tr} \Delta^T \mathbf{G} \mathbf{E}.$$

Как видим, строгую знакоотрицательность производной функции  $V(t)$  нарушают неквадратичные слагаемые, в которые входят ошибки  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{E}$ . Следуя [12], заменим эти слагаемые мажорирующими квадратичными оценками.

Так, используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим [14], можем установить, что для любых векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ , соответствующей матрицы  $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T > 0$  и числа  $\lambda > 0$  справедливо неравенство

$$\mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{b} \leq \frac{\lambda}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{a} + \frac{1}{2\lambda} \mathbf{b}^T \mathbf{M} \mathbf{b}.$$

С учетом этого можем записать

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} &\leq \frac{\lambda_1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \frac{1}{2\lambda_1} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}, \\ \text{Tr} \Delta^T \mathbf{G} \mathbf{E} &\leq \frac{\lambda_2}{2} \text{Tr} \Delta^T \mathbf{G} \Delta + \frac{1}{2\lambda_2} \text{Tr} \mathbf{E}^T \mathbf{G} \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Выберем матрицы  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{G}$  в виде

$$\mathbf{F} = \frac{h}{2\lambda_1} \mathbf{P}, \quad \mathbf{G} = \gamma \mathbf{I}, \quad h = \text{const} \geq 1, \quad \gamma = \text{const} > 0. \quad (29)$$

При этом имеет место оценка

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq -\mathbf{e}^T (\mathbf{Q} - \lambda_1 \mathbf{P}) \mathbf{e} - \gamma(2 - \lambda_2) \text{Tr} \Delta^T \Delta - \frac{h-1}{\lambda_1} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} + \frac{\gamma}{\lambda_2} \text{Tr} \mathbf{E}^T \mathbf{E}. \quad (30)$$

Положим  $\lambda_2 = 1$  и используем следующее вспомогательное утверждение.

*Лемма.* Если  $\lambda_1 \in ]0, \lambda_{\min}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q})[$ , то матрица  $\mathbf{Q} - \lambda_1 \mathbf{P}$  положительно определена (доказательство приведено в приложении).

Отсюда следует оценка

$$\lambda_1 \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e} < \lambda_3 \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e} < \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}, \quad \forall \lambda_3 \in ]0, \lambda_{\min}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q})[$$

использование которой приводит неравенство (30) к виду

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq -(\lambda_3 - \lambda_1) \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e} - \gamma \text{Tr} \Delta^T \Delta + \gamma \text{Tr} \mathbf{E}^T \mathbf{E}.$$

Для  $\beta = \min\{\lambda_3 - \lambda_1, \gamma\}$  получаем

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq -\beta V(t) + \gamma \text{Tr} \mathbf{E}^T \mathbf{E}. \quad (31)$$

Ограниченность функции  $\text{Tr} \mathbf{E}^T \mathbf{E}$  определяется свойствами алгоритма (18). Поэтому интегрирование соотношения (31) приводит к неравенству

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} V(t) \leq \frac{\gamma}{\beta} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} (\text{Tr} \mathbf{E}^T \mathbf{E}),$$

из которого следует диссипативность [15] исследуемой системы, т.е. сходимость всех траекторий в некоторую ограниченную область, не зависящую от начальных условий  $\mathbf{e}(t_0)$ ,  $\Delta(t_0)$ .

В пределе, при  $\gamma \rightarrow 0$ , гибридный алгоритм вырождается в традиционный, для которого соотношение (31) принимает вид

$$\overline{\lim}_{\gamma \rightarrow 0} dV(t)/dt \leq 0.$$

Это позволяет сформулировать следующий результат.

*Утверждение.* Пусть оценка  $\hat{\mathbf{K}}(t_k)$  матрицы идеальной настройки регулятора, порождаемая алгоритмом дискретной части контура адаптации, обладает свойствами (20). Тогда гибридная система (1), (7), (24), (8), (11), (29) является диссипативной.

## Пример

Преимущество гибридной системы прямого адаптивного управления перед традиционной продемонстрируем посредством модельного примера. Пусть объект управления описывается уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -1,1 & -12,6 & 11,2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0,7 & -14,3 & -1,5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1,1 & 0,2 \\ 0 & 0 \\ 0,1 & 1,2 \end{bmatrix} \mathbf{u}.$$

Желаемое движение объекта задается эталонной моделью

$$\frac{d\mathbf{x}_M}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_M + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{r}.$$

Нетрудно установить, что желаемая динамика объекта обеспечивается регулятором

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_1^+ \mathbf{K}_2 \mathbf{x} + \mathbf{K}_1^+ \mathbf{B}_M \mathbf{r}, \quad \mathbf{K}_1^+ = (\mathbf{K}_1^T \mathbf{K}_1)^{-1} \mathbf{K}_1^T$$

с матрицами

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_1^* = \begin{bmatrix} 1,1 & 0,2 \\ 0 & 0 \\ 0,1 & 1,2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_2^* = \begin{bmatrix} 0,1 & 12,6 & -11,2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,7 & 10,3 & -0,5 \end{bmatrix}.$$

Однако если матрицы объекта неизвестны, то априори вычислить матрицы идеальной настройки регулятора невозможно. В этом случае для реализации требуемого эталонного движения используем систему прямого адаптивного управления.

Исследуем работу системы с традиционным и гибридным контуром адаптации. Традиционный алгоритм настройки параметров регулятора имеет вид

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = -\mathbf{z}\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{F}. \quad (32)$$

Исполнительный уровень гибридного алгоритма имеет вид (24). Матричные коэффициенты усиления  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{G}$  реализуются в форме (29) при  $h=1$  и  $\gamma = \begin{cases} 0 & \text{при } t \in [t_0, t_{\text{СТАРТ}}[ \\ 1 & \text{при } t \in [t_{\text{СТАРТ}}, \infty[ \end{cases}$ . Матрица  $\mathbf{P}$  удовлетворяет уравнению:

$$\mathbf{A}_M^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_M = -2\lambda_1 \text{diag} \left\{ \frac{1}{10} \right\}.$$

Оценка  $\hat{\mathbf{K}}$  матрицы идеальной настройки регулятора порождается вычислительным уровнем гибридного алгоритма, который имеет вид (18) с параметрами  $T = 0,1$  с,  $t_{\text{СТАРТ}} = 2$  с.

Рассмотрим режим ступенчатого изменения координаты  $x_1$  объекта по входу  $r_1$  при  $r_2 = 0$  и начальных условиях:  $\mathbf{x}(t_0) = [0 \quad -1 \quad -1]^T$ ,  $\mathbf{K}_1(t_0) = \mathbf{B}_M$ ,  $\mathbf{K}_2(t_0) = 0$ . Соответствующие переходные процессы приведены на рис. 2 и 3, где использованы следующие обозначения: 1 – желаемая динамика координат  $x_1, x_2$  объекта; 2 – динамика координат  $x_1, x_2$  объекта в адаптивной системе с традиционным алгоритмом (32); 3 – динамика координат  $x_1, x_2$  объекта в адаптивной системе с гибридным алгоритмом; 4 – задающее воздействие  $r_1$ .

Можно отметить, что система управления с гибридным контуром адаптации работает практически идеально (за исключением начального интервала настройки), тогда как динамика системы с традиционным алгоритмом отличается от желаемой на достаточно длительном интервале времени.

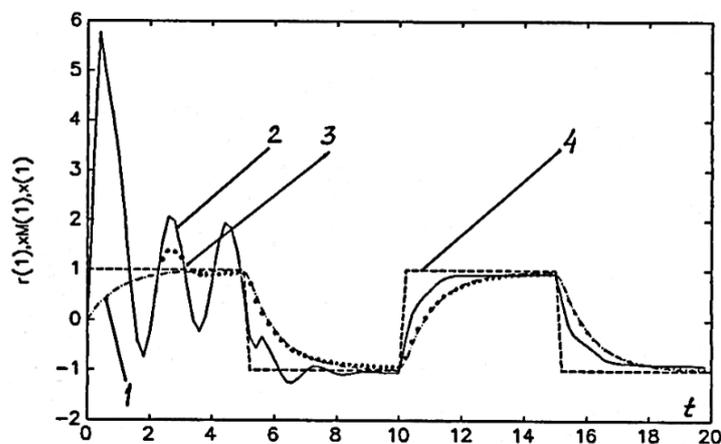


Рис. 2. Изменение координаты  $x_1$  объекта при ступенчатом изменении задающего воздействия по входу  $r_1$

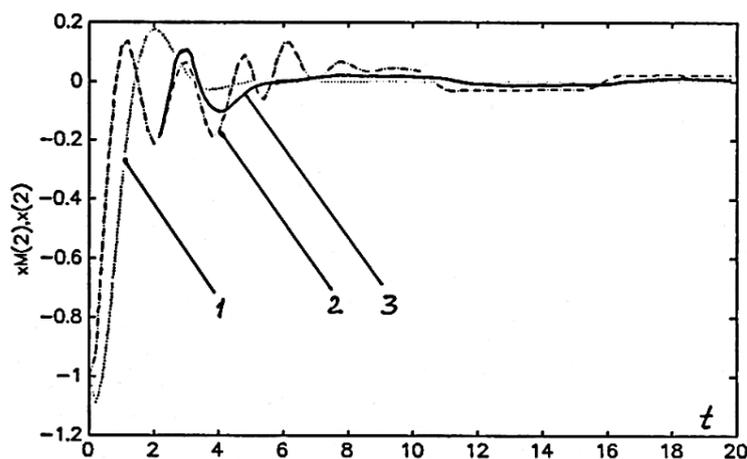


Рис. 3. Изменение координаты  $x_2$  объекта при ступенчатом изменении задающего воздействия по входу  $r_1$ ;  $r_2(t) = 0$  и начальных условиях  $\mathbf{x}(t_0) = [0 \quad -1 \quad -1]^T$ ,  $\mathbf{K}_1(t_0) = \mathbf{B}_M$ ,  $\mathbf{K}_2(t_0) = 0$

Качественное различие в работе двух систем особенно наглядно иллюстрируют рис. 4 и 5, где представлена нормированная по начальному значению функция  $V(t)$  вида (25), а также динамика евклидовой нормы координатной ошибки  $\|\mathbf{e}(t)\|$ . Кривые с индексом 1 соответствуют традиционной системе, а с индексом 2 системе с гибридным контуром адаптации.

Как видим, и в традиционной, и в гибридной системе функция  $V(t)$  является невозрастающей. Это отражает асимптотическую устойчивость обеих систем. Однако, скорость сходимости в традиционной системе очень мала (функция  $V_1(t)$ ), что приводит к большей координатной ошибке. В системе же с гибридным контуром адаптации имеет место быстрая как координатная, так и параметрическая сходимость в допустимо малую зону диссипации. Этот факт можно объяснить тем, что традиционные алгоритмы адаптации основаны на градиентном методе минимизации квадратичной целевой функции, тогда как рекуррентный алгоритм МНК представляет собой процедуру типа Ньютона – Рафсона [16]. Из теории методов

итеративной оптимизации известно, что метод Ньютона – Рафсона обычно сходится быстрее, чем градиентный метод [17].

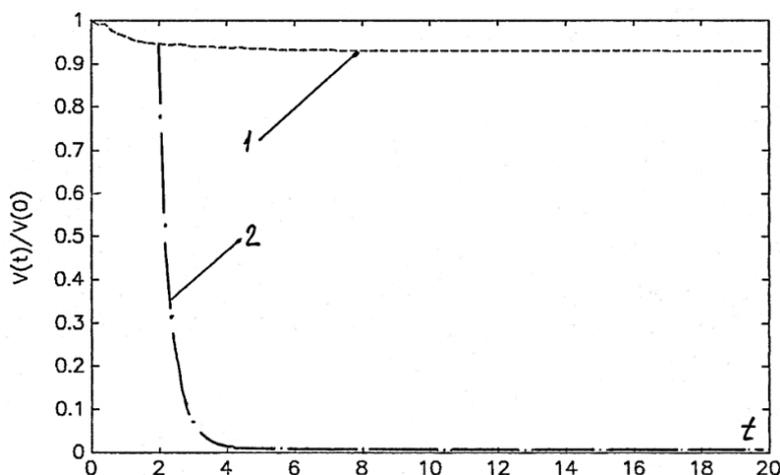


Рис. 4. Изменение нормированной по начальному значению функции Ляпунова вида (25)

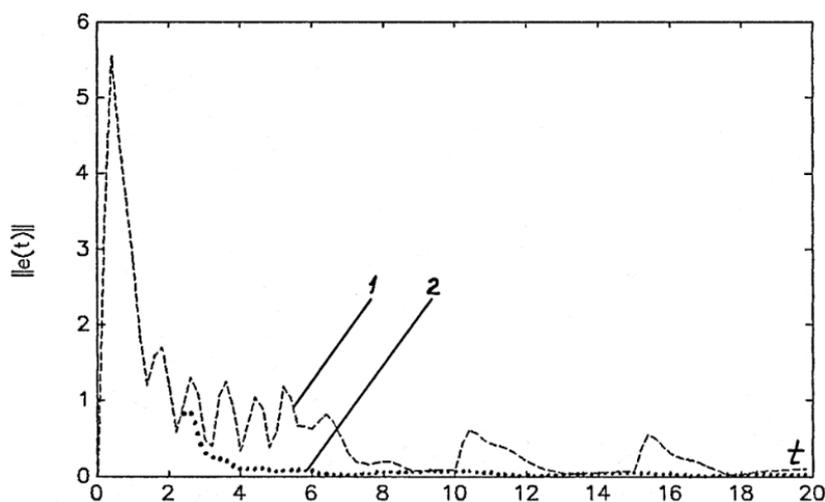


Рис. 5. Изменение евклидовой нормы координатной ошибки с течением времени

## Обсуждение

В данной работе обоснована возможность построения системы прямого адаптивного управления с неявной эталонной моделью и гибридным контуром адаптации. Использование такой системы представляется привлекательным для многих практических задач, поскольку здесь не требуется явная или программная реализация эталонной модели в виде динамического звена. Соответственно, отсутствует проблема выставления одинакового с объектом начального состояния эталонной модели.

Представленная схема синтеза гибридного контура адаптации позволяет использовать известные методы дискретной адаптации для управления непрерывными процессами. Дискретная часть контура адаптации оказывает определяющее влияние на сходимость процессов в системе. Тем не менее устойчивость системы не зависит от того, как часто выдается новая оценка  $\hat{\mathbf{K}}$ . В пределе, при  $t \rightarrow \infty$ , имеем  $\hat{\mathbf{K}}(t) = \text{const}$  и свойства алгоритма (24) совпадают со свойствами хорошо изученных регуляризованных алгоритмов адаптации [2].

Базовым алгоритмом адаптации в гибридной системе является рекуррентный алгоритм наименьших квадратов (РНК). Исследованию динамики его оценок посвящено большое количество публикаций, например [13; 16]. Одним из замечательных его свойств является то, что для получения практически приемлемой оценки достаточно измерить сигналы на ограниченном интервале времени, когда система достаточно возбуждена по входу. В частности, приведенные здесь результаты численного моделирования показывают, что задача быстрого, за несколько шагов, достижения идеальной настройки регулятора в случае отсутствия помех имеет точное решение. При этом имеет место скачкообразный характер сходимости процессов самонастройки в зону диссипации.

К ограничениям алгоритма РНК относится необходимость контроля знаковых свойств матрицы  $\mathbf{R}(t_k)$ , так как сходимость гарантируется лишь в случае ее положительной определенности. Кроме того, проблемами могут являться доступность полного вектора состояния объекта и влияние внешних неконтролируемых возмущений и помех измерения, а также необходимость локализации настраиваемых параметров  $\mathbf{K}(t)$  в известной выпуклой области  $\mathcal{C}$ . Наконец, часто имеют место физические ограничения на управляющее воздействие.

Перечисленные проблемы являются предметом отдельных исследований. Здесь укажем ряд подходов к их решению. Это восстановление вектора состояния объекта посредством применения наблюдателей или фильтров Калмана, а также формирование некоторого эквивалентного вектора состояния на основе фильтрации измеряемого выхода объекта. Последний подход получил большее распространение в силу своей простоты и эффективности [18]. Одним из способов придания системе робастных свойств является использование зоны нечувствительности алгоритма адаптации к малым ошибкам  $\hat{\mathbf{e}}(t_k)$  или невязкам  $\boldsymbol{\sigma}$ , когда они становятся сравнимыми с уровнем действующих возмущений. Задача формирования невязки (8) и реализации алгоритмов (18), (24) может быть решена также на основе использования преобразований осреднения [19].

## Заключение

В данном исследовании развивается схема синтеза гибридного контура адаптации в системе управления с неявной эталонной моделью. Гибридность понимается в том смысле, что объект управления является непрерывным, а регулятор или какая-либо его часть дискретным. Предлагается подход, в котором непрерывная часть алгоритма использует в качестве параметра дискретную оценку матрицы идеальной настройки регулятора. Ставится задача получить модель параметрической ошибки в виде уравнения линейной регрессии относительно параметров идеальной настройки регулятора. Показано, как в этой части может быть использован рекуррентный алгоритм наименьших квадратов. Проводится анализ устойчивости системы методом функций Ляпунова. Определены условия, при которых замкнутая система является диссипативной. Таким образом, установлено, что представленная схема синтеза гибридного контура адаптации позволяет использовать методы дискретной адаптации для управления непрерывными процессами. При этом дискретная часть контура адаптации оказывает определяющее влияние на сходимость процессов в системе. Дискретные алгоритмы требуют некоторых априорных знаний о параметрах объекта с тем, чтобы сформировать выпуклую область, к которой принадлежат параметры идеальной настройки регулятора. Требуется также обеспечить контроль особенностей сигнальных матриц для запуска алгоритма. Тем не менее структура предложенного гибридного контура адаптации по-

звolyет обеспечить диссипативность замкнутой системы путем ряда преобразований параметров алгоритма и используемых сигналов. Цель данной работы – показать преимущество гибридного контура адаптации перед традиционным. Для этого теоретические результаты дополняются примером численного моделирования. Сравнивается динамика системы с традиционным непрерывным алгоритмом адаптации и с гибридным алгоритмом. В обоих случаях исследуемая функция Ляпунова является невозрастающей. Это отражает устойчивость системы. Однако в традиционной системе скорость сходимости существенно меньше, что приводит к большей координатной ошибке. В системе же с гибридным контуром адаптации имеет место относительно быстрая как координатная, так и параметрическая сходимость в допустимо малую зону диссипации. Таким образом, предлагаемый подход позволяет получить практически приемлемые оценки на ограниченном интервале времени.

## Приложение

*Доказательство леммы.* Заметим, что  $\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} - \mu \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e}$ ,  $\mu = \text{const} > 0$  есть регулярный пучок квадратичных форм. В теории матриц [20] установлен следующий факт.

Если  $\mathbf{T}$  – главная матрица регулярного пучка форм  $\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} - \mu \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e}$ , то преобразование

$$\mathbf{e} = \mathbf{T} \mathbf{w}$$

приводит одновременно формы  $\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}$  и  $\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e}$  соответственно к суммам квадратов

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k w_k^2, \quad \sum_{k=1}^n w_k^2,$$

где  $\lambda_k, k = \overline{1, n}$  – характеристические числа пучка  $\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} - \mu \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e}$ , соответствующие столбцам матрицы  $\mathbf{T}$ .

Числа  $\lambda_k, k = \overline{1, n}$  составляют спектр собственных значений матрицы  $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q}$ .

Доказываемая лемма есть прямое следствие данного утверждения. Действительно,

$$\mathbf{e}^T (\mathbf{Q} - \mu \mathbf{P}) \mathbf{e} = \mathbf{w}^T (\text{diag} \{ \lambda_k \}_1^n - \mu \mathbf{I}) \mathbf{w} > 0, \quad \forall \mu < \lambda_{\min} (\mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q}).$$

При этом,  $\lambda_k (\mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q}) > 0 \quad \forall k = \overline{1, n}$ , так как матрицы  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$  симметричные и положительно определенные.

## Список литературы

1. Павлов, Б.В. Системы прямого адаптивного управления / Б.В. Павлов, И.Г. Соловьев. – М.: Наука, 1989. – 130 с.
2. Фрадков, А.Л. Адаптивное управление в сложных системах / А.Л. Фрадков. – М.: Наука, 1990. – 292 с.
3. Силаев, А.В. Обеспечение заданного уровня богатства входного сигнала адаптивной системы с моделью / А.В. Силаев, Т.А. Силаева // Сборник трудов XIII Всероссийского совещания по проблемам управления ВСПУ-2019. Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. – 2019. – С. 755–760.
4. Joshi, G. Hybrid direct-indirect adaptive control of nonlinear system with unmatched uncertainty / G. Joshi, G. Chowdhary // 6th International Conference on Control, Decision and In-

formation Technologies, IEEE-CoDIT 2019. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc. – 2019. – P. 127–132.

5. Двухканальное адаптивное гибридное управление соотношением воздух–топливо и крутящим моментом автомобильных двигателей / С.А. Колюбин, Д.В. Ефимов, В.О. Никифоров, А.А. Бобцов // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 11. – С. 42–59.

6. Шевко, Д.Г. Метод синтеза гибридных систем адаптации / Д.Г. Шевко // Молодой ученый. – 2014. – № 21. – С. 251–253.

7. Глубинные грунтозаборные устройства для будущих российских лунных полярных миссий / М.Л. Литвак, А.В. Носов, Т.О. Козлова [и др.] // Астрономический вестник. – 2020. – Т. 54, № 3. – С. 225–246.

8. Эксперимент Термо-ЛР на посадочном аппарате «Луна-27»: изучение теплофизических, физико-механических и электромагнитных свойств лунного грунта / Е.Н. Слюта, М.Я. Маров, А.Г. Дунченко [и др.] // Астрономический вестник. – 2021. – Т. 55, № 5. – С. 454–475.

9. Александров, В.А. Частотное адаптивное управление процессом бурения с контролируемым давлением / В.А. Александров, М.В. Паленов, Д.В. Шатов // Проблемы управления. – 2016. – № 2. – С. 41–48.

10. Яковис, Л.М. Адаптивная идентификация объектов управления в системах с типовыми регуляторами / Л.М. Яковис // Сборник трудов конференции «Информационные технологии в управлении» (ИТУ-2020) / Концерн «Центральный научно-исследовательский институт «Электроприбор». – 2020. – С. 246–249.

11. Пшихопов, В.Х. Многоконтурное адаптивное управление подвижными объектами при решении траекторных задач / В.Х. Пшихопов, М.Ю. Медведев // Проблемы управления. – 2018. – № 6. – С. 62–72.

12. Деревицкий, Д.П. Прикладная теория дискретных адаптивных систем управления / Д.П. Деревицкий, А.Л. Фрадков. – М.: Наука, 1981. – 216 с.

13. Льюнг, Л. Идентификация систем / Л. Льюнг. – М.: Наука, 1991. – 431 с.

14. Беккенбах, Э.Ф. Неравенства / Э.Ф. Беккенбах, Р. Беллман. – М.: Мир, 1965. – 276 с.

15. Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1967. – 472 с.

16. Адаптивные фильтры / под ред. К.Ф. Коуэна и П.М. Гранта. – М.: Мир, 1988. – 392 с.

17. Поляк, Б.Т. Введение в оптимизацию / Б.Т. Поляк. – М.: Наука, 1983. – 384 с.

18. Ширяев, В.И. К задаче оценивания ошибок измерений в системах управления при неполной информации / В.И. Ширяев, Д.В. Хаданович // Вестник ЮУрГУ. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2018. – Т. 18, № 4. – С. 25–40.

19. Малкин, В.А. Адаптивные фильтры сглаживания сигналов датчиков в системах микроавионики / В.А. Малкин // Приборы и методы измерений. – 2012. – № 1(4). – С. 11–15.

20. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1967. – 576 с.

## References

1. Pavlov B.V., Solov'ev I.G. Direct adaptive control systems. Moscow: Nauka, 1989. 130p.
2. Fradkov A. L. Adaptive control in complex systems. Moscow: Nauka, 1990. 292 p.
3. Silaev A.V., Silaeva T.A. The provision of predefined richness of an input signal for adaptive system with model. Proceedings of the XIII-th All-Russian Control Sciences Conference VSPU-2019. Moscow. Trapeznikov Institute of Control Sciences. 2019, pp.755-760.
4. Joshi G., Chowdhary G. Hybrid direct-indirect adaptive control of nonlinear system with unmatched uncertainty // Proceedings of the 6th International Conference on Control, Decision and In-

formation Technologies, IEEE-CoDIT 2019. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc. 2019, pp. 127-132.

5. Kolyubin S.A., Efimov D.V., Nikiforov V.O., Bobtsov A. A. Two-channel adaptive hybrid control of the air-to-fuel and torque of automobile engines. *Automation and Remote Control*. 2012, vol. 73, no. 11, pp. 1765–1783.

6. Shevko D.G. The method of synthesis the hybrid adaptive systems. *Molodoy uchenyy*. 2014, no. 21, pp. 251-253.

7. Litvak M.L., Nosov A.V., Kozlova T.O. et al. Deep ground sampling devices for future Russian lunar polar missions. *Astronomicheskii Vestnik*. 2020, vol 54, no. 3, pp. 225-246.

8. Saluta E.N., Marov M.Ya., Dunchenko A.G. et. al. Thermo-LR experiment on the Luna-27 lander: study of thermophysical, physico-mechanical and electromagnetic properties of lunar soil. *Astronomicheskii Vestnik*. 2021, vol. 55, no. 5, pp. 454-475.

9. Aleksandrov V.A., Palenov M.V., Shatov D.V. Frequency adaptive control of the drilling process with controlled pressure. *Controls Sciences*. 2016, no. 2, pp. 41 – 48.

10. Yakovis L.M. An adaptive identification of the control objects in the systems with typical regulators. Proceedings of the Conference «Information Technologies in Control» (ITU-2020). Concern «Central Research Institute «Elektropribor». 2020, pp. 246-249.

11. Pshikhopov V.Kh., Medvedev M.Yu. Multi-loop adaptive control for trajectory tasks of the moving objects. *Controls Sciences*. 2018, no. 6, pp. 62–72.

12. Derevitskii D.P., Fradkov A.L. Applied theory of discrete adaptive control systems. Moscow: Nauka, 1981. 216 p.

13. Ljung L. System identification. Englewood Cliffs N.J.: Prentice Hall, 1987. 511 p.

14. Beckenbach E.F., Bellman R. Inequalities. Springer Verlag: Berlin, 1961. 198 p.

15. Demidovich B.P. Lectures on mathematical theory of stability. Moscow: Nauka, 1967. 472p.

16. Adaptive filters / Edited by Cowan C.F.N., Grant P.M. Englewood Cliffs N.J.: Prentice Hall, 1985. 308 p.

17. Polyak B.T. An introduction to optimization. Moscow: Nauka, 1983. 384 p.

18. Shiryayev V.I., Khadanovich D.V. To the Problem of Measurement Errors Estimation in Control Systems with Incomplete Information. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*, 2018, vol. 18, no. 4, pp. 25-40. DOI: 10.14529/ctcr180403

19. Malkin V.A. Adaptive filters for smoothing sensor signals in microavionics systems. *Devices and methods of measurments*. 2012, no.1, pp.11-15.

20. Gantmacher F.R. The theory of matrices. Moscow: Nauka, 1967. 576 p.