Бозиев, О. Л. Об априорных оценках интегральной нагрузки уравнения Кирхгофа / О. Л. Бозиев // Прикладная математика и вопросы управления. – 2024. – № 2. – С. 6–17. DOI 10.15593/2499-9873/2024.2.01

Библиографическое описание согласно ГОСТ Р 7.0.100–2018
Бозиев, О. Л. Об априорных оценках интегральной нагрузки уравнения Кирхгофа / О. Л. Бозиев. – Текст : непосредственный. – DOI 10.15593/2499-9873/2024.2.01 // Прикладная математика и вопросы управления / Applied Mathematics and Control Sciences. – 2024. – № 2. – С. 6–17.

пермский политех

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ВОПРОСЫ УПРАВЛЕНИЯ
№ 2, 2024
https://ered.pstu.ru/index.php/amcs

Научная статья
DOI: 10.15593/2499-9873/2024.2.01
УДК 517.956.35

Об априорных оценках интегральной нагрузки уравнения Кирхгофа

О.Л. Бозиев

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, Нальчик, Российская Федерация
Институт информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук, Нальчик, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 03 апреля 2024
Одобрена: 04 августа 2024
Принята к публикации: 23 сентября 2024

Финансирование
Исследование не имело спонсорской поддержки.
Конфликт интересов
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.
Вклад автора
100 %.

Ключевые слова:
уравнение Кирхгофа, интегральная нагрузка, априорная оценка, редукция к линейному уравнению.

АННОТАЦИЯ

Большое количество физических, биологических и других явлений и процессов описываются нагруженными уравнениями. Нелинейное гиперболическое уравнение Кирхгофа моделирует некоторые колебательные процессы и содержит нагрузку в виде рациональной степени m/n линейной функции от нормы искомого решения в пространстве $H^1(\Omega)$. Подобную нагрузку будем называть интегральной. В работе для данного уравнения рассматривается вторая смешанная задача с однородными граничными условиями. В силу сложности интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений во многих случаях они с разной степенью точности аппроксимируются линейными уравнениями. При этом может оказаться, что линеаризованное уравнение весьма условно моделирует исследуемое явление.

Целью настоящей работы является установление априорных оценок для интегральной нагрузки уравнения Кирхгофа, которые используются для его «корректной» линеаризации. Соответствующие результаты формулируются в виде теорем. В случае положительной степени m/n полученная оценка действительна для любых значений m и n. В отрицательном случае устанавливаются отдельные оценки для $m < n$, $m = n$ и $m > n$. Во всех случаях производится переход от нестрого равенства априорной оценки к равенству, связывающему интегральную нагрузку с некоторой линейной функцией, зависящей от начальных условий и правой части уравнения. Для редукции уравнения Кирхгофа к линейному уравнению его интегральная нагрузка заменяется полученной функцией. Способ применим к уравнениям с интегральной нагрузкой как в главной части, так и в младших членах.

© **Бозиев Олег Людинович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры компьютерных технологий и информационной безопасности; старший научный сотрудник, e-mail: boziev@yandex.ru, ORCID: 0000-0001-6660-7444.

Perm Polytech Style: Boziev O.L. On a priori estimates of the Kirchhoff equation integral load. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2024, no. 2, pp. 6–17. DOI: 10.15593/2499-9873/2024.2.01

MDPI and ACS Style: Boziev, O.L. On a priori estimates of the Kirchhoff equation integral load. *Appl. Math. Control Sci.* **2024**, **2**, 6–17. https://doi.org/10.15593/2499-9873/2024.2.01

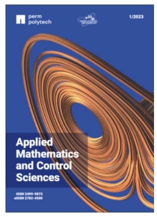
Chicago/Turabian Style: Boziev, Oleg L. 2024 "On a priori estimates of the Kirchhoff equation integral load". *Appl. Math. Control Sci.* no. 2: 6–17. https://doi.org/10.15593/2499-9873/2024.2.01

perm polytech

APPLIED MATHEMATICS AND CONTROL SCIENCES

№ 2, 2024

https://ered.pstu.ru/index.php/amcs



Article

DOI: 10.15593/2499-9873/2024.2.01

UDC 517.956.35

On a priori estimates of the Kirchhoff equation integral load

O.L. Boziev

Kabardino-Balkarian State University, Nalchik, Russian Federation
Institute of Computer Science and Problems of Regional Management
of Kabardino-Balkarian Science Center of the Russian Academy of Sciences,
Nalchik, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 03 April 2023
Approved: 04 August 2024
Accepted for publication:
23 September 2024

Funding
This research received no external funding.
Conflicts of Interest
The author declare no conflict of interest.
Author Contributions
100 %.

Keywords:
Kirchhoff equation, integral load, a priori estimation, reduction to a linear equation.

ABSTRACT

A large number of physical, biological and other phenomena are described by loaded equations. The nonlinear hyperbolic Kirchhoff equation models some oscillatory processes. It contains a load in the form of a rational degree m/n of a linear function of the norm of the desired solution in the space $H^1(\Omega)$. We will call such a load an integral one. In this paper, a second mixed problem with homogeneous boundary conditions is considered for this equation. Due to the complexity of integrating nonlinear differential equations, in many cases they are approximated by linear equations with varying degrees of accuracy. In this case, it may turn out that the linearized equation very conditionally models the phenomenon under study.

The purpose of this work is to establish a priori estimates for the integral load of the Kirchhoff equation. Subsequently, they are used for its "correct" linearization. The corresponding results are formulated in the form of theorems. In the case of a positive degree *m/n*, the obtained estimate is valid for any values of *m* and *n*. In the negative case, separate estimates are set for $m < n$, $m = n$ and $m > n$. In all cases, a transition is made from the non-strict equality of the a priori assessment to equality. This equality relates the integral load to some linear function depending on the initial conditions and the right side of the equation. To reduce the Kirchhoff equation to a linear equation, its integral load is replaced by the resulting function. The method is applicable to equations with an integral load both in the main part and in the minor terms.

© **Oleg L. Boziev** –CSc of Physics and Mathematics Sciences, associate professor at the Computer Technologies and Information Security Department, e-mail: boziev@yandex.ru, ORCID: 0000-0001-6660-7444.

Введение

В области $Q = \{(x,t) : x \in \Omega \subseteq R^n,\ t \in [0,T]\}$ с границей $\partial\Omega$ класса дважды непрерывно-дифференцируемых функций будем рассматривать гиперболическое уравнение Кирхгофа

$$u_{tt} - a(s)\Delta u = f(x,t), \tag{1}$$

в котором

$$s = s(t) = \|\nabla u\|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx,\ \Omega \subset R^n$$

при условиях

$$u(x,0) = \varphi_1(x), u_t(x,0) = \varphi_2(x), \nabla u\big|_{\partial\Omega} = 0, x = (x_1,...,x_n) \in \Omega. \tag{2}$$

Уравнение (1) является нагруженным, так как оно содержит след операции от искомого решения на принадлежащих зкамыканию **Ω** многообразиях размерности меньше *n*. Нагрузку $a(s)$, где s – это интеграл указанного вида, будем называть интегральной. В настоящей работе полагается

$$a(s) = \left(C_1 s + C_2\right)^{\pm\frac{m}{n}},\ C_1, C_2 > 0,\ m,n \in N.$$

Уравнение вида (1) в настоящее время интенсивно исследуется. Для него в [1] была установлена разрешимость в целом первой смешанной задачи с однородными начальными условиями при натуральных степенях суммы, образующей $a(s)$. В [2] разрешимость этой же задачи в целом установлена при степени суммы, равной –2. В [3] доказывается существование и единственность задачи Коши для однородного уравнения вида (1). Среди большого количества работ, посвященных подобным уравнениям, в том числе и с младшими членами, можно указать [4–9].

Непосредственное интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных является сложной задачей, редко допускающей точное решение. Одним из возможных приемов, позволяющих упростить задачу, является аппроксимация нелинейных уравнений линейными. Однако в этом случае аппроксимирующее уравнение может серьезно исказить суть моделируемого нелинейного процесса. Устанавливаемые в данной работе априорные оценки интегральной нагрузки уравнения предлагается использовать для редукции нагруженных уравнений к ассоциированным с ними линейным уравнениям. Для этого интегральная нагрузка заменяется правой частью априорной оценки, являющейся известной функцией свободного члена уравнения и начальных условий. В этом случае нелинейный характер модели сохраняется в первом приближении. Такой подход был использован, например, в [10], где были получены априорные оценки производных решений одномерного уравнения вида (1).

Следует отметить, что также представляют интерес гиперболические уравнения с интегральной нагрузкой в младших членах, возникающие при исследовании некоторых естественно-научных проблем. К ним относятся, в частности, работы [11–18], причем, уравнение, исследуемое в [15], содержит интеграл по *t* от интегральной нагрузки, а уравнение из [16] – сумму интегральных нагрузок. Описанный в работе способ редукции к линейному уравнению применим и в этих случаях (см., например, [19]).

В приведенных ниже рассуждениях неоднократно используется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. [20, теорема 1.4] Если функция $u(t)$ удовлетворяет неравенству

$$u(t) \leq \alpha(t) \int_{t_0}^{t} \beta(\tau) u(\tau) d\tau + f(t), \ t \geq t_0,$$

где функция $f(t)$ и неотрицательные функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ интегрируемы, то справедливо неравенство

$$u(t) \leq \alpha(t) \int_{t_0}^{t} f(\tau) \beta(\tau) \exp\left(\int_{\tau}^{t} \alpha(s) \beta(s) ds \right) d\tau + f(t).$$

Всюду в приводимых ниже рассуждениях скалярное произведение рассматривается в смысле пространства $L_2(\Omega)$.

1. Интегральная нагрузка $a(s) = (C_1 s + C_2)^{\frac{m}{n}}, m, n \in N$

Рассмотрим уравнение (1) в виде

$$u_{tt} - \left(C_1 s + C_2 \right)^{\frac{m}{n}} \Delta u = f(x,t), m, n \in N. \tag{3}$$

Теорема 1. Если функция $u \in H^1(\Omega)$ является решением задачи (3), (2), и при этом $u_t, u_{tt}, \nabla\varphi_1, \varphi_2, f \in L_2(\Omega)$, то функция $(C_1 s + C_2)^{\frac{m+n}{n}}$ ограничена зависящей от t константой.

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение (1) и функции u_t:

$$(u_{tt}, u_t) - a(s)(\Delta u, u_t) = (f, u_t).$$

Легко убедиться, что в предположении $u \in H^1(\Omega)$ имеют место равенства

$$(u_{tt}, u_t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|^2, -(\Delta u, u_t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2.$$

Заметим также, что

$$-a(s)(\Delta u, u_t) = \frac{1}{2} a(s) \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 = \frac{1}{2C_1} \left(C_1 s + C_2 \right)^{\frac{m}{n}} \frac{d}{dt} \left(C_1 s + C_2 \right).$$

Указанные преобразования приводят к соотношению

$$\frac{d}{dt} \|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1} \left(C_1 s + C_2 \right)^{\frac{m}{n}} \frac{d}{dt} \left(C_1 s + C_2 \right) = 2 \int_{\Omega} f u_t dx,$$

интегрирование которого, в свою очередь, приводит к равенству

$$\|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1} \frac{n}{m+n} \left(C_1 s + C_2 \right)^{\frac{m+n}{n}} = 2 \int_0^t \int_{\Omega} f u_t dx d\tau + \|u_t(x,0)\|^2 + \frac{1}{C_1} \frac{n}{m+n} \left(C_1 s(0) + C_2 \right)^{\frac{m+n}{n}}.$$

Функцию под интегралом в правой части оценим по модулю и применим к нему неравенство Коши:

$$\|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1} \frac{n}{m+n} \left(C_1 s + C_2 \right)^{\frac{m+n}{n}} \leq \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + \int_0^t \|f\|^2 d\tau + \|\varphi_2(x)\|^2 + \frac{1}{C_1} \frac{n}{m+n} \left(C_1 s(0) + C_2 \right)^{\frac{m+n}{n}}. \tag{4}$$

Исключая второе слагаемое левой части, получим

$$\|u_t\|^2 \leq \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + F(t),$$

$$F(t)=\int_0^t \|f\|^2\,d\tau+\|\varphi_2(x)\|^2+\frac{1}{C_1}\frac{n}{m+n}\left(C_1 s(0)+C_2\right)^{\frac{m+n}{n}}.$$

Применяя к последнему неравенству лемму, будем иметь

$$\|u_t\|^2\le K_0(t),$$
$$K_0(t)=\int_0^t F(\tau)e^{t-\tau}d\tau+F(t),$$

Возвращаясь к (4), исключим в левой части первое слагаемое, а в правой части заменим $\|u_t\|^2$ на $K_0(t)$.

$$\frac{1}{C_1}\frac{n}{m+n}(C_1 s+C_2)^{\frac{m+n}{n}}\le\int_0^t K_0 d\tau+\int_0^t \|f\|^2\,d\tau+\|\varphi_2(x)\|^2+\frac{1}{C_1}\frac{n}{m+n}\left(C_1 s(0)+C_2\right)^{\frac{m+n}{n}}.$$

От данного неравенства перейдем к оценке

$$(C_1 s+C_2)^{\frac{m+n}{n}}\le K(t), \tag{5}$$
$$K(t)=C_1\frac{m+n}{n}\left(\int_0^t K_0 d\tau+F(t)\right),$$

выполняющейся для всех $t\in[0,T]$. Теорема 1 доказана.

Полагая в уравнении (3)

$$(C_1 s+C_2)^{\frac{m}{n}}=\left(K(t)\right)^{\frac{m}{m+n}},$$

где $K(t)$ – правая часть неравенства (5), получаем линейное уравнение

$$u_{tt}-\left(K(t)\right)^{\frac{m}{m+n}}\Delta u=f(x,t). \tag{6}$$

2. Интегральная нагрузка $a(s)=(C_1 s+C_2)^{-\frac{m}{n}}, m,n\in N$

При условиях (2) рассмотрим уравнение

$$u_{tt}-\left(C_1 s+C_2\right)^{-\frac{m}{n}}\Delta u=f(x,t), m,n\in N. \tag{7}$$

Заметим, что в скалярном произведении

$$(u_{tt},u_t)-a(s)(\Delta u,u_t)=(f,u_t) \tag{8}$$

имеет место равенство

$$-a(s)(\Delta u,u_t)=\frac{1}{2}a(s)\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2=\frac{1}{2C_1}\left(C_1 s+C_2\right)^{-\frac{m}{n}}\frac{d}{dt}\left(C_1 s+C_2\right).$$

Продолжим его при $m=n$ и $m\ne n$.

При $m=n$ имеем

$$\frac{1}{2C_1}\left(C_1 s+C_2\right)^{-1}\frac{d}{dt}\left(C_1 s+C_2\right)=\frac{1}{2C_1}\frac{d}{dt}\ln\left(C_1 s+C_2\right). \tag{9}$$

Пусть $m \neq n$. Тогда

$$\frac{1}{2C_1}\left(C_1 s + C_2\right)^{-\frac{m}{n}} \frac{d}{dt}\left(C_1 s + C_2\right) = \frac{1}{2C_1}\frac{n}{n-m}\frac{d}{dt}\left(C_1 s + C_2\right)^{\frac{n-m}{n}}. \tag{10}$$

Вернемся к случаю $m = n$.

Теорема 2.1. Если функция $u \in H^1(\Omega)$ является решением задачи (7), (2) при $m = n$, и при этом $u_t, u_{tt}, \nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2, f \in L_2(\Omega)$, то функции $\ln\left(C_1 s + C_2\right)$ при $C_1 s + C_2 \geq 1$ и $\ln\left(C_1 s + C_2\right)^{-1}$ при $C_1 s + C_2 < 1$ и $s'(t) < 0$ ограничены зависящими от t константами.

Доказательство. Рассмотрим (8) при $m = n$. С учетом (10) запишем

$$\frac{d}{dt}\left(\left\|u_t\right\|^2 + \frac{1}{C_1}\ln\left(C_1 s + C_2\right)\right) = 2\int\limits_{\Omega} f u_t dx.$$

После интегрирования последнего перейдем к неравенству

$$\left\|u_t\right\|^2 + \frac{1}{C_1}\ln\left(C_1 s + C_2\right) \leq \int\limits_0^t \left\|u_t\right\|^2 d\tau + F(t), \tag{11}$$

$$F(t) = \int\limits_0^t \left\|f\right\|^2 d\tau + \left\|\varphi_2(x)\right\|^2 + \frac{1}{C_1}\ln\left(C_1 s(0) + C_2\right).$$

Предположим, что $C_1 s + C_2 \geq 1$. Тогда, исключая в (11) второе слагаемое левой части, с применением леммы, имеем

$$\left\|u_t\right\|^2 \leq K_0(t),$$

$$K_0(t) = \int\limits_0^t F(\tau) e^{t-\tau} d\tau + F(t).$$

Выбирая верхнюю границу неравенства, в правой части (11) заменим $\left\|u_t\right\|^2$ на $K_0(t)$, одновременно исключая первое слагаемое левой части. Это дает оценку

$$\ln\left(C_1 s + C_2\right) \leq K_1(t), \tag{12.1}$$

$$K_1(t) = C_1\left(\int\limits_0^t K_0(\tau) d\tau + F(t)\right),$$

выполняющуюся для всех $t \in [0, T]$.

Пусть теперь $C_1 s + C_2 < 1$. С учетом знака логарифма запишем (11) в виде

$$\left\|u_t\right\|^2 \leq \int\limits_0^t \left\|u_t\right\|^2 d\tau + \int\limits_0^t \left\|f\right\|^2 d\tau + \left\|\varphi_2(x)\right\|^2 - \frac{1}{C_1}\ln\frac{C_1 s(0) + C_2}{C_1 s + C_2},$$

Последний член правой части исключим в силу $s(0) = \max s(t)$. После применения леммы получаем

$$\left\|u_t\right\|^2 \leq K_0(t),$$

$$K_0(t) = \int\limits_0^t F(\tau) e^{t-\tau} d\tau + F(t), \ \ F(t) = \int\limits_0^t \left\|f\right\|^2 d\tau + \left\|\varphi_2(x)\right\|^2.$$

В (11) заменим $\left\|u_t\right\|^2$ на $K_0(t)$, одновременно исключая первое слагаемое левой части. Это дает оценку

$$\ln\left(C_1 s + C_2\right)^{-1} \le K_2(t), \tag{12.2}$$

$$K_2(t) = C_1\left(\int_0^t K_0(\tau)d\tau + F(t)\right),$$

выполняющуюся для всех $t \in [0, T]$.

Теорема 2.1 доказана.

Переход к равенствам в (12.1) и (12.2) позволяет редуцировать (7) к линейному уравнению

$$u_{tt} - \exp\left(K(t)\right)\Delta u = f(x,t), \tag{13}$$

в котором

$$K(t) = \begin{cases} -K_1(t), \ C_1 s + C_2 \ge 1, \\ K_2(t), \ C_1 s + C_2 < 1. \end{cases}$$

Перейдем к случаю $m < n, m, n \in N$.

Теорема 2.2. Если функция $u \in H^1(\Omega)$ является решением задачи (7), (2) при $m < n, m, n \in N,$ и при этом $u_t, u_{tt}, \nabla\varphi_1, \varphi_2, f \in L_2(\Omega),$ $\|\nabla\varphi_1\|^2 > 0,$ то функция $\left(C_1 s + C_2\right)^{\frac{n-m}{n}}$ ограничена зависящей от t константой.

Доказательство. С учетом (10) перепишем (8) в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}\left(\|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1}\frac{n}{n-m}\left(C_1 s + C_2\right)^{\frac{n-m}{n}}\right) = 2\int_\Omega f u_t dx. \tag{14}$$

Отсюда после интегрирования перейдем к неравенству

$$\|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1}\frac{n}{n-m}\left(C_1 s + C_2\right)^{\frac{n-m}{n}} \le \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + F(t). \tag{15}$$

$$F(t) = \int_0^t \|f\|^2 d\tau + \|\varphi_2(x)\|^2 + \frac{1}{C_1}\frac{n}{n-m}\left(C_1 s(0) + C_2\right)^{\frac{n-m}{n}}.$$

Исключая в (15) второе слагаемое левой части с применением леммы, имеем

$$\|u_t\|^2 \le K_0(t), \qquad K_0(t) = \int_0^t F(\tau)e^{t-\tau}d\tau + F(t).$$

Подстановка $K_0(t)$ в правую часть (15) вместо $\|u_t\|^2$ с одновременным исключением первого слагаемого левой части дает оценку

$$\left(C_1 s + C_2\right)^{\frac{n-m}{n}} \le K(t), \tag{16}$$

$$K(t) = C_1\frac{n-m}{n}\left(\int_0^t K_0 d\tau + F(t)\right),$$

которая выполняется для всех $t \in [0, T]$. Теорема 2.2 доказана.

Полагая в уравнении (7)

$$(C_1 s + C_2)^{-\frac{m}{n}} = \left(K(t)\right)^{\frac{m}{m-n}},$$

где $K(t)$ – правая часть неравенства (16), получаем линейное уравнение

$$u_{tt} - \left(K(t)\right)^{\frac{m}{m-n}} \Delta u = f(x,t). \tag{17}$$

Пусть теперь $m > n, m, n \in N$.

Теорема 2.3. Если функция $u \in H^1(\Omega)$ является решением задачи (7), (2) при $m > n, m, n \in N$, и при этом $u_t, u_{tt}, \nabla\varphi_1, \varphi_2, f \in L_2(\Omega)$, $\left\|\nabla\varphi_1\right\|^2 > 0$, $s'(t) > 0$, то функция $\left(C_1 s + C_2\right)^{\frac{m-n}{n}}$ ограничена зависящей от *t* константой.

Доказательство. С помощью (10) перейдем от (8) к уравнению (14) при $m > n$. Проинтегрируем его, замечая, что в силу возрастания функции *s*

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\left(C_1 s + C_2\right)^{\frac{n-m}{n}} d\tau = \frac{\left(C_1 s(0) + C_2\right)^{\frac{m-n}{n}} - \left(C_1 s + C_2\right)^{\frac{m-n}{n}}}{\left(C_1 s + C_2\right)^{\frac{m-n}{n}} \left(C_1 s(0) + C_2\right)^{\frac{m-n}{n}}} = F_0(t) < 0,$$

после чего перейдем к неравенству

$$\left\|u_t\right\|^2 + \frac{1}{C_1}\frac{n}{n-m}F_0(t) \le \int_0^t \left\|u_t\right\|^2 d\tau + \int_0^t \left\|f\right\|^2 d\tau + \left\|\varphi_2(x)\right\|^2. \tag{18}$$

Исключая второе слагаемое левой части, запишем оценку

$$\left\|u_t\right\|^2 \le \int_0^t \left\|u_t\right\|^2 d\tau + F(t), \qquad F(t) = \int_0^t \left\|f\right\|^2 d\tau + \left\|\varphi_2(x)\right\|^2.$$

Очередное применение леммы дает

$$\left\|u_t\right\|^2 \le K_0(t), \qquad K_0(t) = \int_0^t F(\tau)e^{t-\tau} d\tau + F(t).$$

Вновь заменяя $\left\|u_t\right\|^2$ на $K_0(t)$ в правой части (18) с одновременным исключением первого слагаемого левой части, получаем неравенство

$$\frac{n}{n-m}F_0(t) \le C_1\left(\int_0^t K_0(\tau)d\tau + F(t)\right).$$

Из последнего следует, что для всех $t \in [0, T]$ выполнено неравенство

$$\left(C_1 s + C_2\right)^{\frac{m-n}{n}} \le K(t), \tag{19}$$

$$K(t) = C_1\frac{m-n}{n}\left(\int_0^t K_0(\tau)d\tau + F(t)\right)\left(C_1 s(0) + C_2\right)^{\frac{m-n}{n}}.$$

Теорема 2.3 доказана.

Полагая в уравнении (7)

$$(C_1 s + C_2)^{-\frac{m}{n}} = \left(K(t)\right)^{\frac{m}{n-m}},$$

где $K(t)$ – правая часть неравенства (19), получаем линейное уравнение

$$u_{tt} - \left(K(t)\right)^{\frac{m}{n-m}} \Delta u = f(x,t). \tag{20}$$

3. Пример

Приведем одномерный пример, соответствующий последнему случаю. Пусть задача (7), (2) имеет вид

$$u_{tt}-\left(\int_0^1 \left|u_x\right|^2 dx+1\right)^{-\frac{1}{2}} u_{xx}=xt, \tag{21}$$

$$u(x,0)=x(x-1),\, u_t(x,0)=x,\, x\in[0,1],\, u_x(0,t)=u_x(1,t)=0,\, t\in[0,T]. \tag{22}$$

Таким образом, в формулировке теоремы 2.3 имеем

$$\varphi_1(x)=x(x-1),\, \varphi_2(x)=x,\, f(x,t)=xt,\, C_1=C_2=1,\, m=1,\, n=2.$$

Найдем величины, входящие в (18)–(20):

$$\int_0^t \|f\|^2 dx=\int_0^t\int_0^1 \tau^2x^2dxd\tau=\frac{t^3}{9},\ \|\varphi_2\|^2=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3},\, F(t)=\frac{1}{9}(t^3+3),$$

$$s(0)=\int_0^1 \left|u_x(x,0)\right|^2 dx=\int_0^1 \left|\varphi_{1x}(x)\right|^2 dx=\int_0^1 (2x-1)^2 dx=\frac{1}{3},\, (s(0)+1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$K_0(t)=e^t-\frac{1}{3}(t^3+2t+2),\, \int_0^t K_0(\tau)d\tau=e^t-\frac{1}{3}\left(\frac{t^4}{4}+t^2+2t\right)-1,$$

$$K(t)=\frac{2\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}\left(e^t-\frac{1}{3}\left(\frac{t^4}{4}-\frac{t^3}{3}+t^2+2t+2\right)\right)}.$$

После подстановки в (21) получаем линейное уравнение

$$u_{tt}-\frac{2\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}\left(e^t-\frac{1}{3}\left(\frac{t^4}{4}-\frac{t^3}{3}+t^2+2t+2\right)\right)}u_{xx}=xt.$$

Решение последнего уравнения, найденное при условиях (22), может быть принято за нулевое приближение $u^{(0)}$ в итерационном процессе поиска решения задачи (21), (22), подобном описанному в [19]. Процесс состоит в нахождении «улучшенных» приближенных решений путем последовательного решения задач вида

$$u_{tt}^{(k)}-\left(\int_0^1 \left|u_x^{(k-1)}\right|^2 dx+1\right)^{-\frac{1}{2}} u_{xx}^{(k)}=xt, \tag{23}$$

$$u^{(k)}(x,0)=x(x-1),\, u_t^{(k)}(x,0)=x,\, x\in[0,1],\, u_x^{(k)}(0,t)=u_x^{(k)}(1,t)=0,\, t\in[0,T], \tag{24}$$

где $k = 1, 2, \ldots$ – итерационный индекс. Процесс завершится при выполнении условия

$$\left|u^{(k)}(x,t)-u^{(k-1)}(x,t)\right|\le\varepsilon$$

с достаточно малым наперед заданным числом ε или по достижении заданного количества итераций.

Таким образом, решение нелинейной задачи (21), (22) сводится к последовательному решению линейных задач (23), (24).

Заключение

В работе установлены априорные оценки для интегральной нагрузки $a(s) = \left(C_1 s + C_2\right)^{\pm\frac{m}{n}}$, $C_1, C_2 > 0,\ m, n \in N,$ уравнения Кирхгофа (1) при условиях (2) и демонстрируется их использование для линеаризации нагруженного уравнения.

Положительной степени интегральной нагрузки соответствует оценка (5). Для отрицательной степени рассмотрены случаи $m = n$ с оценками (12.1) и (12.2), а также случаи $m < n$ и $m > n$ с оценками (15) и (20) соответственно. Правые части полученных выражений, рассматриваемых как равенства, используются для линеаризации уравнения (1) путем замены ими интегральной нагрузки. Результатом являются уравнения (6), (13), (17), (21), соответствующие приведенным четырем случаям. Для последнего случая приводится одномерный пример, иллюстрирующий редукцию нагруженного уравнения к линейному. Решение последнего при исходных начально-краевых условиях может быть принято за первое приближение к решению нагруженной задачи.

Предполагается, что данный способ линеаризации, в отличие от других, позволяет редуцировать нагруженное уравнение к ассоциированному с ним линейному уравнению с сохранением в общих чертах физического смысла процесса, моделируемого уравнением Кирхгофа.

Список литературы

1. Похожаев, С.И. Об одном классе квазилинейных гиперболических уравнений / С.И. Похожаев // Матем. сб. – 1975. – Т. 96 (138), № 1. – С. 152–166.

2. Похожаев, С.И. Об одном квазилинейном гиперболическом уравнении Кирхгофа / С.И. Похожаев // Дифф. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 1. – С. 101–108.

3. Nishihara, K. Exponential decay of solutions of some quasilinear hyperbolic equations with linear damping / K. Nishihara // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. – 1984. – Vol. 8, № 6. – P. 623–636.

4. Crippa, H.R. On local solutions of some mildly degenerate Hyperbolic equations / H.R. Crippa // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. – 1993. – Vol. 21, № 8. – P. 565–574.

5. Ngoc, L.T.P. Linear approximation and asymptotic expansion of solutions in many small parameters for a nonlinear Kirchhoff wave equation with mixed nonhomogeneous conditions / L.T.P. Ngoc, N.T. Long // Acta Appl Math. – 2010. – Vol. 112. – P. 137–169. DOI: 10.1007/s10440-009-9555-9

6. Frota, C.L. Wave equation in domains with nonlocally reacting boundary / C.L. Frota, L.A. Medeiros, A. Vicente // Differential and Integral Equations. – 2011. – № 17. – P. 1001–1020. DOI: 10.57262/die/1356012872

7. Frota, C.L. A mixed problem for semilinear wave equations with acoustic boundary conditions in domains with non-locally reacting boundary / C.L. Frota, L.A. Medeiros, A. Vicente // Electronic Journal of Differential Equations. – 2014. – Vol. 2014, № 243. – P. 1–14.

8. Ono, K. Lower decay estimates for non-degenerate Kirchhoff type dissipative wave equations / K. Ono // J. Math. Tokushima Univ. – 2018. – Vol. 52. – P. 39–52.

9. Ono, K. Global solvability for mildly degenerate Kirchhoff type dissipative wave equations in Bounded Domains / K. Ono // J. Math. Tokushima Univ. – 2021. – Vol. 55. – P. 11–18.

10. Бозиев, О.Л. О линеаризации гиперболических уравнений с интегральной нагрузкой в главной части с помощью априорной оценки их решений / О.Л. Бозиев // Вест-

ник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2022. – № 80. – С. 16–25. DOI: 10.17223/19988621/80/2

11. Cazenave, T. Global behavior for some conservative nonlinear equations / T. Cazenave, A. Haraux, F.B. Wessler // Matematica Contemporana. – 1995. – Vol. 8. – P. 89–106.

12. Nonlinear Wave Equations with Acoustic Boundary Conditions / G. Antunes, C.L. Frota, L.A. Medeiros, M. Da Silva // International Journal of Differential Equations and Applications. – 2013. – Vol. 12, no. 4. – P. 151–167. DOI: 10.12732/ijdea.v12i4.1343

13. Lourêdo, A.T. On a nonlinear wave equation with boundary damping / A.T. Lourêdo, M.A.F. Araújo, M. Milla Miranda // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2013. Wiley. DOI: 10.1002/mma.2855

14. Milla Miranda, M. On Second-Order Differential Equations with Nonsmooth Second Member / M. Milla Miranda, A.T. Lourêdo, L.A. Medeiros // ISRN Applied Mathematics. – Vol. 2014. – P. 1–13. DOI: 10.1155/2014/305718

15. Lions, J.-L. Some Methods in the Mathematical Analysis of System and Their Control / J.-L. Lions. – Science Press, New York, NY, USA, 1981. – 542 p.

16. Grotta Ragazzo, C. Chaos and integrability in a nonlinear wave equation / C. Grotta Ragazzo // Journal of Dynamics and Differential Equations. – 1994. – Vol. 6, no. 1. – P. 227–244. DOI: 10.1007/BF02219194

17. Бозиев, О.Л. О слабых решениях нагруженного гиперболического уравнения с однородными краевыми условиями / О.Л. Бозиев // Вестник Южноуральского государственного университета. Серия «Математика, физика, механика». – 2019. – Т. 11, № 2. – С. 5–13. DOI: 10.14529/mmph190201

18. Бозиев, О.Л. О слабых решениях нагруженного гиперболического уравнения с однородными начальными условиями / О.Л. Бозиев // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2020. – № 63. – С. 5–14. DOI: 10.17223/19988621/63/1

19. Бозиев, О.Л. Решение нелинейного гиперболического уравнения приближенно-аналитическим методом / О.Л. Бозиев // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2018. – № 51. – С. 5–14. DOI: 10.17223/19988621/51/1

20. Филатов, А.Н. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний / А.Н. Филатов, Л.В. Шарова. – М.: Наука, 1976. – 151 с.

References

1. Pokhozhaev S. I. Ob odnom klasse kvazilineinykh giperbolicheskikh uravnenii [On a class of quasi-linear hyperbolic equations]. *Matematicheskii Sbornik*, 1975, vol. 96(138), no. 1, pp. 152–166.

2. Pokhozhaev S. I. Ob odnom kvazilineinom giperbolicheskom uravnenii Kirkhgofa [On a quasi-linear hyperbolic Kirchhoff equation]. *Differential equations*, 1985, vol. 21, no. 1, pp. 101-108.

3. Nishihara K. Exponential decay of solutions of some quasilinear hyperbolic equations with linear damping. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 1984, vol. 8, no. 6, pp. 623–636.

4. Crippa H.R. On local solutions of some mildly degenerate Hyperbolic equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 1993, vol. 21, no. 8, pp. 565–574.

5. Ngoc L.T.P., Long N.T. Linear approximation and asymptotic expansion of solutions in many small parameters for a nonlinear Kirchhoff wave equation with mixed nonhomogeneous conditions. *Acta Appl Math,* 2010, vol. 112, pp. 137–169. DOI: 10.1007/s10440-009-9555-9.

6. Frota C. L., Medeiros L. A., Vicente A. Wave equation in domains with nonlocally reacting boundary. *Differential and Integral Equations*. 2011, no. 17, pp. 1001–1020. DOI: 10.57262/die/1356012872.

7. Frota C. L., Medeiros L. A., Vicente A. A mixed problem for semilinear wave equations with acoustic boundary conditions in domains with non-locally reacting boundary. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2014, no. 243, pp. 1-14, available at: https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2014/243/frota.pdf (accessed 02 April 2024).

8. Ono K. Lower decay estimates for non-degenerate Kirchhoff type dissipative wave equations. *J. Math. Tokushima Univ.* 2018, Vol. 52, pp. 39−52. https://www-math.st.tokushima-u.ac.jp/journal/2018/ono52.pdf

9. Ono K. Global solvability for mildly degenerate Kirchhoff type dissipative wave equations in bounded domains. *J. Math. Tokushima Univ*. 2021, vol. 55, pp. 11 – 18. https://www-math.st.tokushima-u.ac.jp/journal/2021/2_Ono_2021.pdf

10. Boziev O. L. O linearizatsii giperbolicheskikh uravnenii s integral'noi nagruzkoi v glavnoi chasti s pomoshch'iu apriornoi otsenki ikh reshenii [On the linearization of hyperbolic equations with integral load in the main part by a priori estimation of their solutions]. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2022, no. 80, pp. 16–25. DOI: 10.17223/19988621/80/2.

11. Cazenave T., Haraux A., Wessler F. B. Global behavior for some conservative nonlinear equations. Matematica Contemporana, 1995, vol. 8, pp. 89 – 106.

12. Antunes G., Frota C. L., Medeiros L. A. Da Silva M. Nonlinear Wave Equations with Acoustic Boundary Conditions. *International Journal of Differential Equations and Applications*. 2013, vol. 12, no. 4, pp. 151 – 167. DOI: 10.12732/ijdea.v12i4.1343.

13. A. T. Lourêdo, M. A. F. Araújo, M. Milla Miranda. On a nonlinear wave equation with boundary damping. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2013, vol. 37, is. 9, pp. 1249 – 1404. DOI: 10.1002/mma.2855.

14. M. Milla Miranda, A. T. Lourêdo, L. A. Medeiros. On second-order differential equations with nonsmooth second member. *ISRN Applied Mathematics*, 2014, pp. 1 – 13. DOI: 10.1155/2014/305718.

15. Lions J.-L. Some Methods in the Mathematical Analysis of System and Their Control. – Science Press, New York, NY, USA. – 1981 – 542 p.

16. Grotta Ragazzo C. Chaos and integrability in a nonlinear wave equation. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 1994, vol. 6, no. 1, pp. 227–244. DOI: 10.1007/BF02219194.

17. Boziev O. L. O slabykh resheniiakh nagruzhennogo giperbolicheskogo uravneniia s odnorodnymi kraevymi usloviiami [On weak solutions of loaded hyperbolic equation with homogeneous boundary conditions]. *Bulletin of the South Ural State University Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*. 2019, vol. 11, no. 2, pp. 5 – 11. DOI: 10.14529/mmph190201.

18. Boziev O. L. O slabykh resheniiakh nagruzhennogo giperbolicheskogo uravneniia s odnorodnymi nachal'nymi usloviiami [On weak solutions of a loaded hyperbolic equation with homogeneous initial conditions]. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2020, no. 63, pp. 5 – 14. DOI: 10.17223/19988621/63/1.

19. Boziev O. L. Reshenie nelineinogo giperbolicheskogo uravneniia priblizhenno-analiticheskim metodom [Solution of nonlinear hyperbolic equations by an approximate analytical method]. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2018, no. 51, pp. 5 - 14. DOI: 10.17223/19988621/51/1.

20. Filatov A.N., Sharova L.V. Integralnye neravenstva i teoriya nelineinyh kolebanii. [Integral inequality and theory of nonlinear oscillations]. Moscow: Nauka., 1976, 151 p.