

Аксененко, И. А. Исследование устойчивости линейного автономного разностного уравнения с комплексными коэффициентами / И. А. Аксененко // Прикладная математика и вопросы управления. – 2024. – № 3. – С. 13–23. DOI 10.15593/2499-9873/2024.3.01

**Библиографическое описание согласно ГОСТ Р 7.0.100–2018**

Аксененко, И. А. Исследование устойчивости линейного автономного разностного уравнения с комплексными коэффициентами / И. А. Аксененко. – Текст : непосредственный. – DOI 10.15593/2499-9873/2024.3.01 // Прикладная математика и вопросы управления / Applied Mathematics and Control Sciences. – 2024. – № 3. – С. 13–23.



ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА  
И ВОПРОСЫ УПРАВЛЕНИЯ  
№ 3, 2024  
<https://ered.pstu.ru/index.php/amcs>



Научная статья

DOI: 10.15593/2499-9873/2024.3.01

УДК 517.929



## Исследование устойчивости линейного автономного разностного уравнения с комплексными коэффициентами

И.А. Аксененко

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,  
Пермь, Российская Федерация

### О СТАТЬЕ

Получена: 27 сентября 2024

Одобрена: 14 октября 2024

Принята к публикации:

08 ноября 2024

#### Финансирование

Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FSNM-2023-0003).

#### Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

#### Вклад автора

100 %.

#### Ключевые слова:

разностные уравнения, экспоненциальная устойчивость, равномерная устойчивость,  $D$ -разбиение.

### АННОТАЦИЯ

Исследуется устойчивость линейного автономного разностного уравнения с двумя комплексными коэффициентами и различными запаздываниями. Отправной точкой исследования является теорема Шура – Кона о расположении корней характеристического уравнения на комплексной плоскости относительно единичного круга.

Для построения области экспоненциальной устойчивости исследуемого уравнения в пространстве параметров используется метод  $D$ -разбиений, состоящий в построении таких поверхностей в фазовом пространстве, что при переходе точки пространства через эти поверхности изменяется число корней соответствующего характеристического уравнения, находящихся вне единичного круга комплексной плоскости. Область, которой соответствует нулевое число таких корней, является областью устойчивости уравнения.

Эта схема реализована для указанного разностного уравнения: найдены геометрические критерии устойчивости и описаны области экспоненциальной устойчивости в четырехмерном пространстве коэффициентов. Отдельно изучена равномерная устойчивость, областью которой является область экспоненциальной устойчивости, дополненная частью границы. Для точного описания области равномерной устойчивости потребовалось описание «кривой кратности», все точки которой соответствуют кратным корням характеристического уравнения.

Полученные результаты могут быть применены к исследованию процессов в физике, технике, экономике, биологии, при моделировании которых используются дискретные модели в виде разностных уравнений.

© Аксененко Илья Александрович – студент II курса магистратуры кафедры «Вычислительная математика, механика и биомеханика», e-mail: [ilya156@list.ru](mailto:ilya156@list.ru), ORCID 0009-0007-6400-7024.



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

**Perm Polytech Style:** Aksenenko I.A. Investigation of the stability of a linear autonomous difference equation with complex coefficients. *Applied Mathematics and Control Sciences*. 2024, no. 3, pp. 13–23. DOI: 10.15593/2499-9873/2024.3.01

**MDPI and ACS Style:** Aksenenko, I.A. Investigation of the stability of a linear autonomous difference equation with complex coefficients. *Appl. Math. Control Sci.* **2024**, *3*, 13–23. <https://doi.org/10.15593/2499-9873/2024.3.01>

**Chicago/Turabian Style:** Aksenenko, Ilya A. 2024. “Investigation of the stability of a linear autonomous difference equation with complex coefficients”. *Appl. Math. Control Sci.* no. 3: 13–23. <https://doi.org/10.15593/2499-9873/2024.3.01>



APPLIED MATHEMATICS  
AND CONTROL SCIENCES

№ 3, 2024

<https://ered.pstu.ru/index.php/amcs>



Article

DOI: 10.15593/2499-9873/2024.3.01

UDC 517.929



## Investigation of the stability of a linear autonomous difference equation with complex coefficients

I.A. Aksenenko

Perm National Research Polytechnic University,  
Perm, Russian Federation

### ARTICLE INFO

Received: 27 September 2023

Approved: 14 October 2024

Accepted for publication:

08 November 2024

#### Funding

The research was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, project No. FSNM -2023-0003.

#### Conflicts of Interest

The author declares no conflict of interest.

#### Author Contributions

100 %.

#### Keywords:

difference equations, exponential stability, uniform stability, D-decomposition.

### ABSTRACT

The stability of a linear autonomous difference equation with two complex coefficients and different delays is investigated. The starting point of the study is the Schur-Cohn theorem on the location of the roots of the characteristic equation in the complex plane with respect to the unit disk.

To construct the domain of the exponential stability of the considered equation in the parameter space, the method of  $D$ -decomposition is used, which consists in constructing surfaces in the phase space such that when these surfaces are crossed by a point moving in the phase space, then the number of roots of the corresponding to the point characteristic equation, located outside the unit disk in the complex plane, changes. The region to which the zero number of roots corresponds is the domain of stability.

This scheme is implemented for the above-mentioned difference equation: geometric stability criteria are found and the domains of exponential stability in the four-dimensional space of coefficients are described. Uniform stability is studied separately. Its domain is the domain of exponential stability supplemented by a part of its boundary. For the exact description of the domain of uniform stability, the description of a “multiplicity curve” was required, that is the line, all points of which correspond to multiple roots of the characteristic equation.

The obtained results can be applied to the study of processes in physics, engineering, economics, and biology, for the modeling of which discrete models in the form of difference equations are used.

© Ilya A. Aksenenko – 2nd year graduate student of the Department of Computational Mathematics, Mechanics and Biomechanics, e-mail: [ilya156@list.ru](mailto:ilya156@list.ru), ORCID 0009-0007-6400-7024.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

## Введение

Настоящая статья продолжает исследования, начатые в работах [1; 2], и посвящена получению эффективных и наглядных признаков экспоненциальной и равномерной устойчивости разностных уравнений с комплексными коэффициентами. Области устойчивости в двух- и трехмерных пространствах коэффициентов строятся на основе классического метода  $D$ -разбиения, но при этом существенную роль играют доказанные в работе [2] теоремы о линейной связности областей устойчивости. Результаты статьи хорошо согласуются с известными признаками экспоненциальной устойчивости разностных уравнений, полученными в работах [3–6]. Отметим, однако, что в указанных работах не рассматривалось поведение решений на границах области устойчивости (в частности, задача о равномерной устойчивости, не совпадающей с экспоненциальной). В нашей статье этим вопросам посвящен специальный раздел.

## 1. Постановка задачи устойчивости для разностных уравнений

### 1.1. Описание объекта, представление решения

Будем использовать следующие обозначения для числовых множеств:  $\mathbb{Z}$  — множество целых чисел,  $\mathbb{N}$  — множество натуральных чисел,  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ ,  $\mathbb{C}$  — множество комплексных чисел. Рассмотрим линейное разностное уравнение  $p$ -го порядка

$$x(n) + \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

где  $a_k \in \mathbb{C}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Очевидно, что если заданы значения  $x(n) = \varphi(n) \in \mathbb{C}$ ,  $n = \overline{1-p, 0}$ , то значения  $x(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , определяются уравнением (1) однозначно. Функцию  $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  будем называть *решением* уравнения (1), соответствующим *начальной функции*  $\varphi$ .

Понятие *устойчивость решения* отражает непрерывную зависимость решения  $x$  от начальной функции  $\varphi$ .

**Определение 1.** Уравнение (1) будем называть:

- *равномерно устойчивым*, если существует такая константа  $M > 0$ , что для каждого решения  $x$  для всех  $n \in \mathbb{N}$  имеем  $|x(n)| \leq M \max_{1-p \leq n \leq 0} |\varphi(n)|$ ;
- *экспоненциально устойчивым*, если существуют такие константы  $M, \gamma > 0$ , что для каждого решения  $x$  для всех  $n \in \mathbb{N}$  имеем  $|x(n)| \leq M \max_{1-p \leq n \leq 0} |\varphi(n)| e^{-\gamma n}$ .

### 1.2. Методы исследования

Исследование устойчивости тесно связано с характеристическим многочленом уравнения (1) и определяемыми им корнями характеристического уравнения

$$\lambda^p + \sum_{k=1}^p a_k \lambda^{p-k} = 0. \quad (2)$$

Напомним, что любое решение уравнения (1) представимо в виде

$$x(n) = C_1(n)\lambda_1^n + C_2(n)\lambda_2^n + \dots + C_m(n)\lambda_m^n, \quad (3)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  — корни (2) без учета кратности, а  $C_k(n)$  — многочлены, степень которых ровно на единицу меньше кратности корня  $\lambda_k$ . Для двух определенных выше видов устойчивости справедливы следующие критерии, которые легко выводятся из формулы (3).

**Предложение 1.** *Уравнение (1) экспоненциально устойчиво, если и только если все корни его характеристического уравнения (2) лежат на комплексной плоскости внутри единичного круга.*

**Предложение 2.** *Уравнение (1) равномерно устойчиво, если и только если все корни его характеристического уравнения (2) лежат на комплексной плоскости в круге  $|\lambda| \leq 1$ , причем корни, лежащие на границе круга  $|\lambda| = 1$ , являются простыми.*

Для построения области устойчивости мы пользуемся методом  $D$ -разбиения. Суть этого метода, предложенного в работах Ю. И. Неймарка [7; 8], заключается в построении границ в пространстве параметров, при переходе через которые изменяется количество корней характеристического уравнения, находящихся вне единичного круга комплексной плоскости. После построения этих границ остается выбрать из областей, на которые разбилось пространство параметров, области, которым соответствует нулевое число таких корней. Их объединение и составляет область асимптотической устойчивости.

Важным свойством области устойчивости уравнения (1) является ее линейная связность. Приведем два утверждения из работы [2], на которые мы будем опираться при построении области устойчивости.

**Предложение 3.** *Область  $D$ -разбиения уравнения (1) является областью его экспоненциальной устойчивости, если и только если она содержит начало координат.*

**Предложение 4.** *Замыкание области экспоненциальной устойчивости уравнения (1) состоит из множества точек пространства параметров, для которых все корни характеристического уравнения (2) принадлежат кругу  $|\lambda| \leq 1$ .*

## 2. Построение областей устойчивости

Рассмотрим следующее уравнение:

$$x(n) - ax(n-t) + bx(n-k) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

где  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $t, k \in \mathbb{N}$ .

Так как вхождение  $t$  и  $k$  в (4) равноценно, то можно сразу предполагать, что  $t < k$ .

В работах [1; 2] построены области равномерной и экспоненциальной устойчивости для  $t = 1$  и  $k \geq 2$ . Если  $a \geq 0$ ,  $b \in \mathbb{C}$ , то областями устойчивости для этих случаев являются «криволинейные конуса» (при  $k = 2$  наибольший, с ростом  $k$  конуса уменьшаются). Общий случай  $a, b \in \mathbb{C}$  сводится заменой к случаю, указанному выше.

Область устойчивости для  $t \geq 2$ , как будет показано далее, существенно отличается от аналогичных областей для  $t = 1$ . Несмотря на то, что  $D$ -разбиение вновь образует криволинейные конуса, область устойчивости имеет более сложную структуру.

Положим в (4)  $t = 2$  и рассмотрим уравнение

$$x(n) - ax(n-2) + bx(n-k) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Пусть  $k = 2p$ , тогда для (5) характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^{2p} + a\lambda^{2(p-1)} + b = 0. \quad (6)$$

Положим  $\mu = \lambda^2$ , тогда

$$\mu^p + a\mu^{p-1} + b = 0 \quad (7)$$

— характеристическое уравнение для

$$y(n) - ay(n-1) + by(n-p) = 0.$$

Очевидно, что  $\lambda = \lambda_0$  — корень уравнения (6), если и только если  $\mu_0 = \lambda_0^2$  — корень уравнения (7). Следовательно, все корни (6) лежат внутри единичного круга тогда и только тогда, когда все корни уравнения (7) лежат внутри единичного круга, а  $|\lambda_0| = 1$  тогда и только тогда, когда  $|\mu_0| = 1$ , причем уравнение (6) имеет кратные корни, если и только если их имеет уравнение (7).

Таким образом, случай четного  $k$  сводится к рассмотренному в работах [1; 2] случаю  $m = 1$ . Поэтому далее считаем, что  $k$  — нечетное число и  $k \geq 3$ .

## 2.1. Экспоненциальная устойчивость

Сначала рассмотрим случай, когда  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ . Перепишем уравнение (4) в виде

$$x(n) - ax(n-2) + (\alpha + i\beta)x(n-k) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (8)$$

воспользуемся методом  $D$ -разбиения и построим поверхность в области параметров  $(\alpha, \beta, a)$ :

$$\begin{cases} \alpha = a \cos(k-2)\varphi - \cos k\varphi, \\ \beta = a \sin(k-2)\varphi - \sin k\varphi, \end{cases} \quad \varphi \in [-\pi, \pi]. \quad (9)$$

Из равенств (9) следует, что поверхность  $D$ -разбиения при  $a \leq 0$  получается симметричным отражением поверхности при  $a \geq 0$  относительно плоскости  $a = 0$  с поворотом на угол  $\pi/2$ .

С увеличением  $k$  число витков и самопересечений поверхности будет увеличиваться. Отбросим часть витков, оставив только те, которые примыкают к началу координат, получим четыре одинаковых криволинейных конуса с общим основанием в виде круга  $a = 0$ ,  $|b| \leq 1$  (рис. 1).

Из предложения 1 следует, что область  $D$ -разбиения является областью устойчивости, если и только если она содержит начало координат. Следовательно область устойчивости при  $a \geq 0$  является пересечением двух верхних конусов (рис. 2, слева), а при  $a \leq 0$  — пересечением двух нижних конусов (рис. 2, справа).

Объединение изображенных на рис. 2 областей составляет всю область устойчивости уравнения (8) (рис. 3). Обозначим  $G_k^2$  внутренность этой области,  $\partial G_k^2$  — её границу,  $[G_k^2]$  — её замыкание. Области  $G_3^2, G_5^2, G_7^2, G_9^2$  приведены на рис. 6.

**Теорема 1.** *Для того чтобы уравнение (8) было экспоненциально устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы точка с координатами  $(\operatorname{Re} b, \operatorname{Im} b, a)$  принадлежала области  $G_k^2$ .*

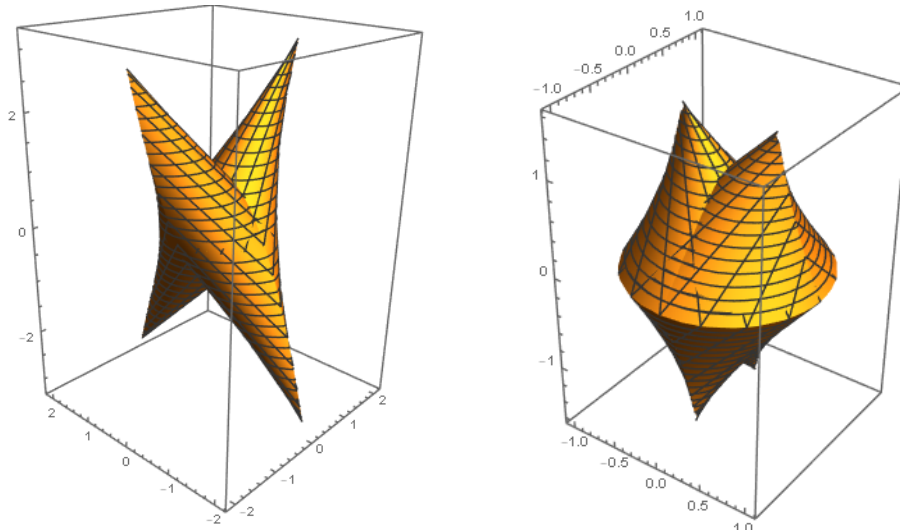


Рис. 1. Поверхность  $D$ -разбиения при  $k = 3$  и  $k = 5$

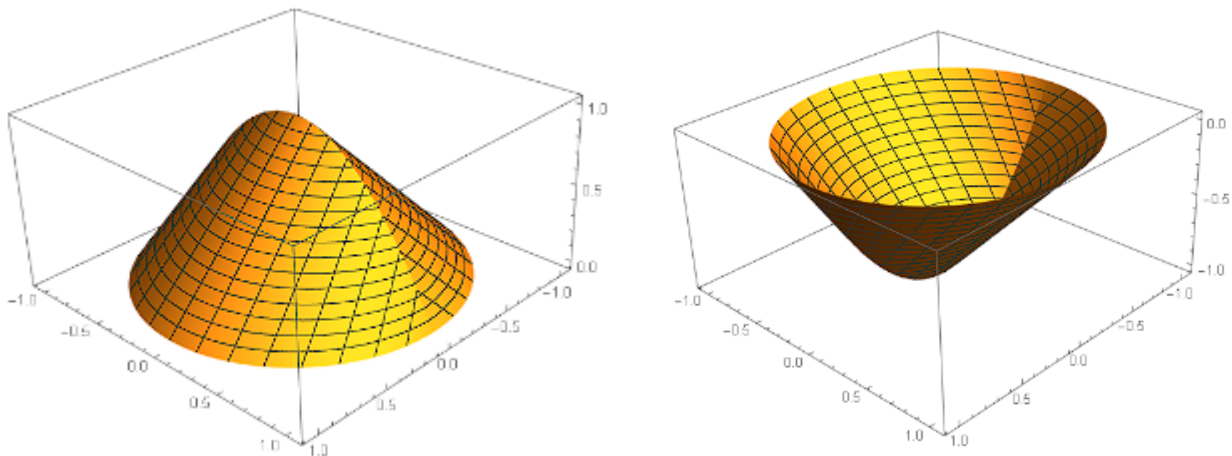


Рис. 2. Пересечение конусов при  $a \geq 0$  и  $a \leq 0$

Дадим аналитическое описание границ области устойчивости. Сначала укажем, в каких пределах меняется параметр  $a$ . Из рис. 3 видно, что поверхность, ограничивающая область устойчивости, имеет один максимум и один минимум. Поскольку область симметрична относительно плоскостей  $\alpha = 0$  и  $\beta = 0$ , то точки экстремума лежат в этих плоскостях. Рассмотрим сечение конусов с рис. 1 плоскостью  $\beta = 0$ . Из (9) получаем:

$$\begin{cases} \alpha = a \cos(k - 2)\varphi - \cos k\varphi, \\ 0 = a \sin(k - 2)\varphi - \sin k\varphi, \end{cases} \quad \varphi \in [-\pi, \pi].$$

- Если  $\sin(k - 2)\varphi = 0$ , то из первого уравнения системы находим  $a = \pm\alpha + 1$ .
- Если  $\sin(k - 2)\varphi \neq 0$ , то при любом  $k$  граница сечения задается параметрически

$$\alpha = \frac{\sin 2\varphi}{\sin(k - 2)\varphi}, \quad a = \frac{\sin k\varphi}{\sin(k - 2)\varphi},$$

$$\varphi \in [0, \pi/k] \cup [\pi(k - 1)/2k, \pi(k + 1)/2k] \cup [\pi(k - 1)/k].$$

На рис. 4 представлены сечения конусов плоскостью  $\beta = 0$  при  $k = 3, 5, 7, 9$ . Закрашены сечения областей устойчивости.

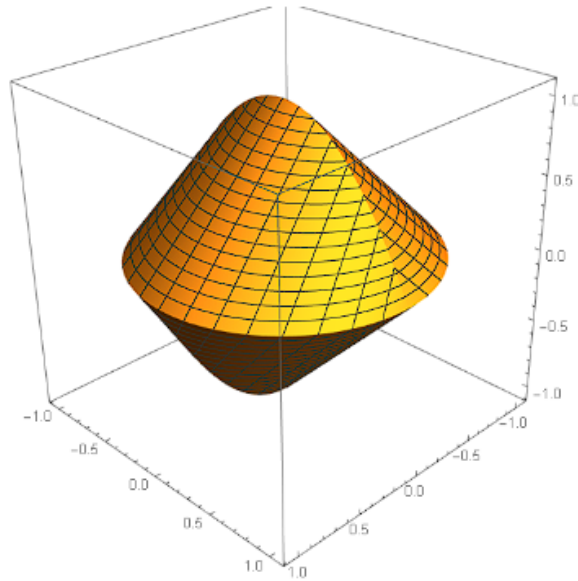


Рис. 3. Область устойчивости уравнения (8)

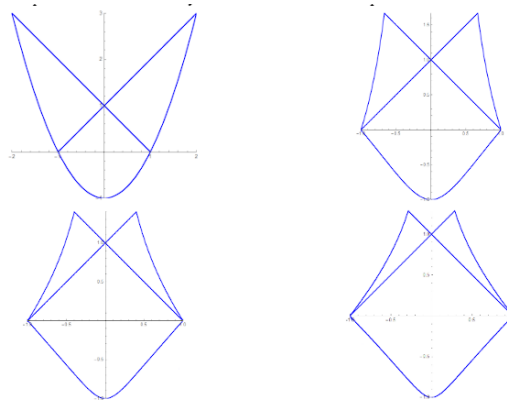


Рис. 4. Сечение поверхности  $D$ -разбиения при  $\beta = 0$  для  $k = 3, 5, 7, 9$

При  $a \geq 0$  максимум достигается на пересечении двух прямых  $a = \pm\beta + 1$ , т. е. в точке  $(0, 0, 1)$ .

Аналогично при  $a \leq 0$  находим минимум, который достигается в плоскости  $\alpha = 0$  на пересечении прямых  $a = \pm\alpha + 1$  в точке  $(0, 0, -1)$ . Итак, область устойчивости лежит в полосе  $-1 \leq a \leq 1$ .

Теперь найдем условия на параметр  $\varphi$ , при которых поверхность (9) описывает границу области устойчивости.

По условию задачи  $a \in [-1, 1]$ , но, как отмечалось выше, достаточно рассмотреть случай  $a \geq 0$ , поэтому фиксируем  $a$  из интервала  $[0, 1]$ . Получаем уравнение:

$$\alpha = 0, \quad a = \frac{\sin k\varphi}{\sin(k-2)\varphi} = \frac{U_{k-1}(\cos \varphi)}{U_{k-3}(\cos \varphi)},$$

где  $U_m$  — многочлен Чебышёва второго рода порядка  $m$ . Обозначим через  $t_0$  первый положительный корень уравнения  $aU_{k-3}(t) = U_{k-1}(t)$ , а также  $\varphi_0 = \arccos t_0$ .

Теперь можно записать уравнение границы области устойчивости при  $a \geq 0$ :

$$\partial G_k^2 = \{(\alpha, \beta, a) : a \in [0, 1], \alpha = a \cos(k-2)\varphi - \cos k\varphi, \beta = a \sin(k-2)\varphi - \sin k\varphi, \\ \varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0] \cup [\pi - \varphi_0, \pi + \varphi_0]\}.$$

Граница области устойчивости для случая  $a \leq 0$  получается из нее отражением относительно плоскости  $a = 0$  с поворотом на  $\pi/2$ . В итоге получаем области, приведенные на рис. 5.

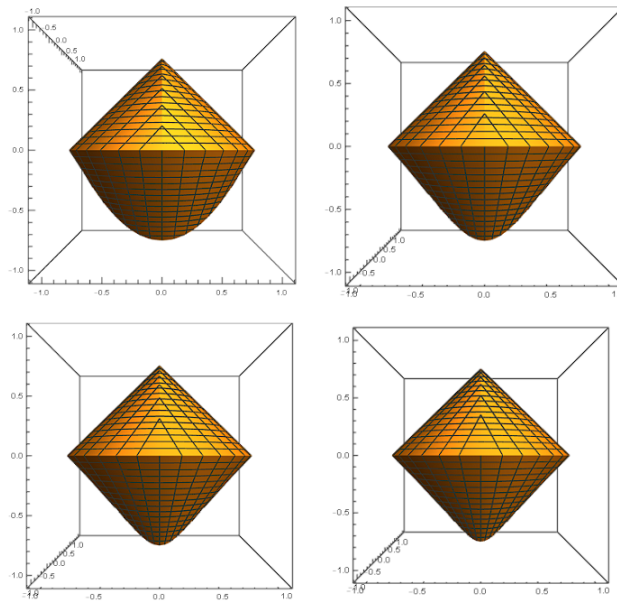


Рис. 5. Область устойчивости уравнения (5) при  $k = 3, 5, 7, 9$

## 2.2. Равномерная устойчивость

Найдем условия на  $a$  и  $b$ , при которых уравнение (8) равномерно устойчиво.

Рассмотрим множество  $[G_k^2] = G_k^2 \cup \partial G_k^2$ . Из предложений 2 и 4 вытекает, что для построения множества равномерной устойчивости из  $[G_k^2]$  следует удалить те точки, для которых корни характеристического уравнения лежат на границе единичного круга и являются кратными. Очевидно, что точки, соответствующие корням на единичной окружности, могут принадлежать только границе  $\partial G_k^2$ . Следовательно, нужно найти такие точки во множестве  $\partial G_k^2$  и исключить их.

Выясним, когда характеристическая функция уравнения (8) имеет кратные корни. Для кратного корня  $\lambda_0$  справедливы одновременно два равенства:

$$\begin{cases} g(\lambda_0) \equiv \lambda_0^k - a\lambda_0^{k-2} + b = 0, \\ g'(\lambda_0) \equiv k\lambda_0^{k-1} - (k-2)a\lambda_0^{k-3} = 0, \end{cases}$$

из которых находим кривые, задающие связь между коэффициентами, при которой уравнение (8) имеет кратные корни. В области  $a \geq 0, \alpha \geq 0$  кривая кратности лежит в плоскости  $\beta = 0$  и имеет вид:

$$\alpha = 2 \left( a^k \frac{(k-2)^{k-2}}{k^k} \right)^{1/2}. \quad (10)$$

Заметим, что кривая (10) проходит через начало координат и вершину правого верхнего конуса (рис. 6, слева). Сечение области устойчивости плоскостью  $\beta = 0$  приведено на рис. 4, из которого видно, что для определения точки пересечения поверхности  $\partial G_k^2$  с кривой кратности следует найти пересечение линии (10) с прямой  $\alpha = 1 - a$ . В рассматриваемой области эти линии имеют единственную точку пересечения, обозначим ее координаты  $p_1 =$



$(\alpha_0, 0, a_0)$ . Отсюда легко определяются три другие точки пересечения кривых кратности с поверхностью  $\partial G_k^2$ :  $p_2 = (-\alpha_0, 0, a_0)$ ,  $p_3 = (0, \alpha_0, -a_0)$ ,  $p_4 = (0, -\alpha_0, -a_0)$  (рис. 6, справа).

Например, для случая  $k = 3$  эти точки имеют вид:  $p_{1,2} = (\pm \frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4})$ ,  $p_{3,4} = (0, \pm \frac{1}{4}, -\frac{3}{4})$ .

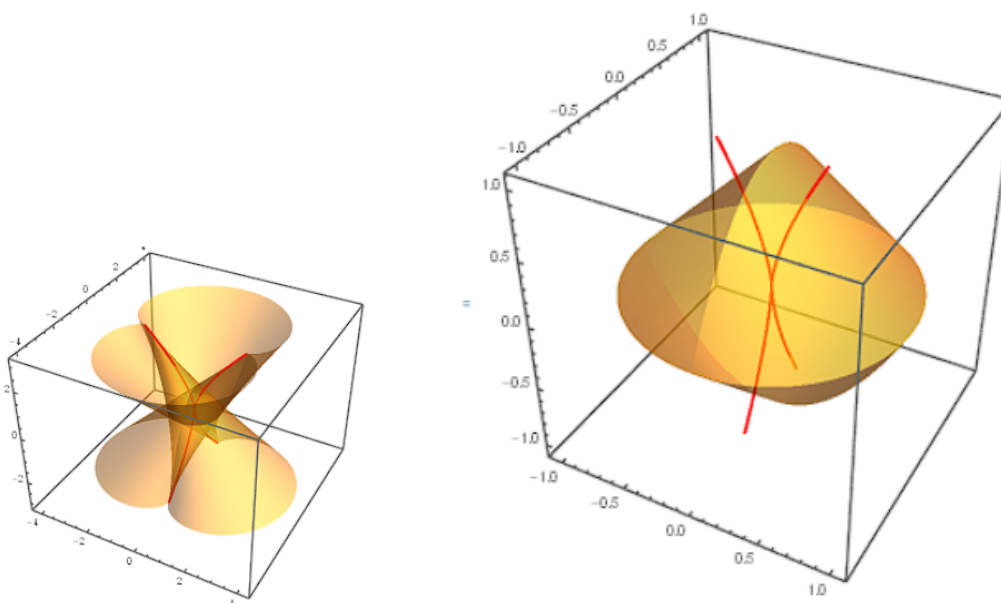


Рис. 6. Кривые кратности и область  $D$ -разбиения

Таким образом, доказано следующее утверждение.

**Теорема 2.** Для того чтобы уравнение (8) было равномерно устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы точка с координатами  $(\operatorname{Re} b, \operatorname{Im} b, a)$  принадлежала области

$$[G_k^2] \setminus \{p_1 \cup p_2 \cup p_3 \cup p_4\}.$$

### 2.3. Случай двух комплексных коэффициентов

Вернемся к общему случаю и рассмотрим разностное уравнение (8) уже с двумя комплексными коэффициентами:

$$x(n) - ax(n-2) + bx(n-k) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (11)$$

где  $a, b \in \mathbb{C}$ , а  $k \geq 3$  — нечетное натуральное число.

Представим первый коэффициент в показательной форме  $a = |a|e^{i\omega}$ , а для второго сохраним алгебраическую форму  $b = \alpha + i\beta$ . Сделаем замену  $x(n) = e^{i\omega n}y(n)$ . Тогда уравнение (11) переписывается в виде

$$y(n) + |a|y(n-2) + be^{-ki\omega}y(n-k) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Если представить второй коэффициент как  $be^{-ki\omega} = u + iv$ , получаем уравнение

$$y(n) - |a|y(n-2) + (u + iv)y(n-k) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

которое является уравнением вида (8). Так как  $|a| \geq 0$ , то его областью устойчивости является пересечение двух верхних конусов (см. рис. 2 слева).

Найдём семейство поверхностей, которые задают  $D$ -разбиение в пространстве параметров  $(\alpha, \beta, |a|)$  при фиксированном  $\omega$ :

$$\begin{cases} \alpha = |a| \cos((k-2)\varphi + k\omega) - \cos(k\varphi + k\omega), \\ \beta = |a| \sin((k-2)\varphi + k\omega) - \sin(k\varphi + k\omega), \end{cases} \quad \varphi \in [-\pi, \pi]. \quad (12)$$

Равенства (12) можно рассматривать при каждом фиксированном  $\omega$  как параметрически заданные поверхности, которые мы обозначим через  $\partial G_{k\omega}^2$ , а ограниченные ими области через  $G_{k\omega}^2$ . При  $\omega = 0$  это будет определенная ранее поверхность и ограниченное ею пересечение конусов, т. е.  $\partial G_{k0}^2 = \partial G_k^2$ , а  $G_{k0}^2 = G_k^2$ .

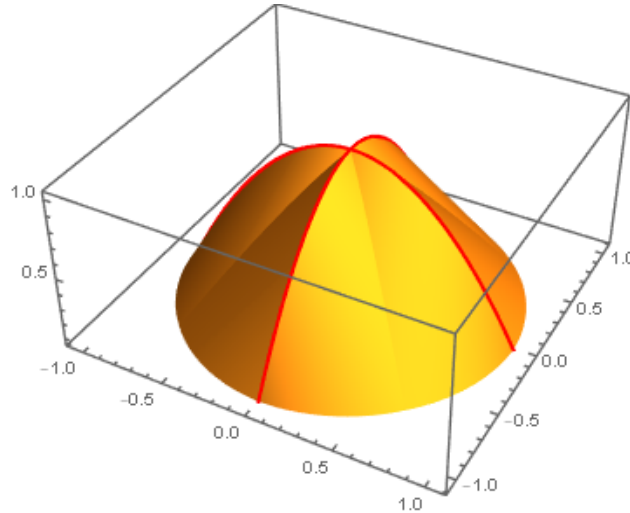


Рис. 7. Области  $G_{3\omega}^2$  при  $\omega = 0, \pi/2$

Так как  $\alpha + i\beta = (u + iv)e^{ki\omega}$ , то  $G_{k\omega}^2$  получается из области  $G_{k0}^2$  поворотом вокруг оси  $|a|$  на угол  $k\omega$  (рис. 7). Основанием всех областей  $G_{k\omega}^2$  служит одна и та же окружность  $|b| = 1$ , лежащая в плоскости  $a = 0$ , а точки пересечения кривых кратности с  $G_{k\omega}^2$  имеют координаты:  $p_1 = (\alpha_0 \cos k\omega, 0, a_0)$ ,  $p_2 = (-\alpha_0 \cos k\omega, 0, a_0)$ .

**Теорема 3.** Для того чтобы уравнение (11) было экспоненциально устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы точка с координатами  $(\operatorname{Re} b, \operatorname{Im} b, |a|)$  принадлежала области  $G_{k\omega}^2$ .

**Теорема 4.** Для того чтобы уравнение (11) было равномерно устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы точка с координатами  $(\operatorname{Re} b, \operatorname{Im} b, |a|)$  принадлежала области  $[G_{k\omega}^2] \setminus \{p_1 \cup p_2\}$ .

## Список литературы

1. Аксененко, И. А. Исследование устойчивости одного разностного уравнения с комплексными коэффициентами / И. А. Аксененко // Прикладная математика и вопросы управления. — 2023. — № 1. — С. 6–25. DOI: 10.15593/2499-9873/2023.1.01.
2. Аксененко, И. А. Об устойчивости линейных автономных разностных уравнений с комплексными коэффициентами / И. А. Аксененко, К. М. Чудинов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки (в печати).
3. Николаев, Ю. П. Анализ геометрии D-разбиения двумерной плоскости произвольных коэффициентов характеристического полинома дискретной системы / Ю. П. Николаев // Автомат. и телемех. — 2004. — № 12. — С. 49–61.

4. Кипнис, М. М. Устойчивость трехчленных линейных разностных уравнений с двумя запаздываниями / М. М. Кипнис, Р. М. Нигматулин // Автомат. и телемех. — 2004. № 11. — С. 25–39.
5. Čermák, J. Explicit stability conditions for a linear trinomial delay difference equation / J. Čermák, J. Jánský // Appl. Math. Lett. — 2015. — Vol. 43. — P. 56–60. DOI: 10.1016/j.aml.2014.11.014.
6. Kipnis, M.M. The stability cone for a matrix delay difference equation / M.M. Kipnis, V. V. Malygina // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. — 2011. — No. 860326. DOI: 10.1155/2011/860326.
7. Неймарк, Ю. И. Устойчивость линеаризованных систем (дискретных и распределенных) / Ю. И. Неймарк. — Л.: ЛКВВИА, 1949. — 140 с.
8. Неймарк, Ю. И. Динамические системы и управляемые процессы / Ю. И. Неймарк. — М.: Наука, 1978. — 336 с.

## References

1. Aksenenko I. A. Investigation of the stability of one difference equation with complex coefficients. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2023, no. 1, pp. 6–25. DOI: 10.15593/2499-9873/2023.1.01.
2. Aksenenko I. A., Chudinov K. M. On stability of linear autonomous difference equations with complex coefficients. *The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science* (in print).
3. Nikolaev Yu. P. The geometry of D-decomposition of a two-dimensional plane of arbitrary coefficients of the characteristic polynomial of a discrete system. *Autom. Remote Control*, 2004, vol. 65, no. 12, pp. 1904–1914. DOI: 10.1023/B:AURC.0000049876.54417.e6.
4. Kipnis M.M., Nigmatullin R.M. Stability of the trinomial linear difference equations with two delays. *Autom. Remote Control*, 2004, vol. 65, no. 11, pp. 1710–1723. DOI: 10.1023/B:AURC.0000047886.46498.79.
5. Čermák J., Jánský J. Explicit stability conditions for a linear trinomial delay difference equation. *Appl. Math. Lett.*, 2015, vol. 43, pp. 56–60. DOI: 10.1016/j.aml.2014.11.014.
6. Kipnis M.M., Malygina V.V. The stability cone for a matrix delay difference equation. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2011, no. 860326. DOI: 10.1155/2011/860326.
7. Neymark Yu.I. Ustoichivost' linearizovannykh sistem (diskretnykh i raspredelennykh) [Stability of linearized systems (discrete and distributed)]. Leningrad: LKVVIA, 1949, 140 p.
8. Neymark Yu.I. Dinamicheskie sistemy i upravliaemye protsessy [Dynamic systems and controlled processes]. Moscow: Nauka, 1978, 336 p.