Баландин, А. С. Об оценках фундаментального решения и функции Коши одного класса линейных автономных дифференциальных уравнений нейтрального типа / А. С. Баландин // Прикладная математика и вопросы управления. – 2024. – № 3. – С. 24–37. DOI 10.15593/2499-9873/2024.3.02

Библиографическое описание согласно ГОСТ Р 7.0.100–2018
Баландин, А. С. Об оценках фундаментального решения и функции Коши одного класса линейных автономных дифференциальных уравнений нейтрального типа / А. С. Баландин. – Текст : непосредственный. – DOI 10.15593/2499-9873/2024.3.02 // Прикладная математика и вопросы управления / Applied Mathematics and Control Sciences. – 2024. – № 3. – С. 24–37.

пермский политех

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ВОПРОСЫ УПРАВЛЕНИЯ
№ 3, 2024
https://ered.pstu.ru/index.php/amcs

Научная статья
DOI: 10.15593/2499-9873/2024.3.02
УДК 517.929

Об оценках фундаментального решения и функции Коши одного класса линейных автономных дифференциальных уравнений нейтрального типа

А.С. Баландин

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 26 сентября 2024
Одобрена: 17 октября 2024
Принята к публикации:
08 ноября 2024

Финансирование
Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FSNM-2023-0005).
Конфликт интересов
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.
Вклад автора
100 %.

Ключевые слова:
функционально-дифференциальных уравнение, уравнение нейтрального типа, запаздывание, экспоненциальная оценка, фундаментальное решение, функция Коши.

АННОТАЦИЯ

В работе рассматривается класс линейных автономных дифференциальных уравнений нейтрального типа. Изучаемое уравнение, с одной стороны, возникает в различных прикладных задачах, таких как динамика популяции клеток, движение плоских упругих плит с учетом трения, исследование дефектов с помощью ультразвука. С другой стороны, это уравнение обладает большим разнообразием асимптотических свойств решений и поэтому интересно также с теоретической точки зрения, что подтверждается значительным количеством чисто теоретических исследований. Исследуемое уравнение являет собой удачный пример объекта, который достаточно прост для того, чтобы удалось получить эффективные признаки устойчивости, и в то же время достаточно сложен, чтобы в нем проявилось все разнообразие асимптотических свойств решений автономных уравнений нейтрального типа.

Исследование устойчивости рассматриваемого уравнения сводится к изучению асимптотических свойств его фундаментального решения и функции Коши. Известен критерий экспоненциальной устойчивости изучаемого уравнения и построена его область устойчивости в пространстве коэффициентов.

В настоящей работе исследуется положительность фундаментального решения и функции Коши данного уравнения, а также устанавливаются двусторонние экспоненциальные оценки указанных функций. Для этого известная лемма о дифференциальном неравенстве обобщается на линейное автономное дифференциальное уравнение нейтрального типа. Далее доказывается, что если рассматриваемое уравнение экспоненциально устойчиво, а его характеристическая функция имеет хотя бы один вещественный корень, то его фундаментальное решение и функция Коши положительны на положительной полуоси. Этому условию придается геометрический вид – описывается соответствующая область в пространстве параметров уравнения. На основе положительности фундаментального решения и функции Коши строятся их двусторонние экспоненциальные оценки. Показатели экспоненты и коэффициенты в полученных оценках фундаментального решения и функции Коши являются точными. Эффективность установленных в статье результатов иллюстрируется примером.

© **Баландин Антон Сергеевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Вычислительная математика, механика и биомеханика», e-mail: balandin-anton@yandex.ru, ORCID 0000-0002-5956-8624.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

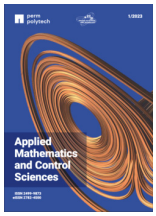
Perm Polytech Style: Balandin A.S. On the estimates of the fundamental solution and the Cauchy function for a class of linear autonomous differential equations of neutral type. *Applied Mathematics and Control Sciences.* 2024, no. 3, pp. 24–37. DOI: 10.15593/2499-9873/2024.3.02

MDPI and ACS Style: Balandin, A.S. On the estimates of the fundamental solution and the Cauchy function for a class of linear autonomous differential equations of neutral type. *Appl. Math. Control Sci.* **2024, 3**, 24–37. https://doi.org/10.15593/2499-9873/2024.3.02

Chicago/Turabian Style: Balandin, Anton S. 2024. "On the estimates of the fundamental solution and the Cauchy function for a class of linear autonomous differential equations of neutral type". *Appl. Math. Control Sci.* no. 3: 24–37. https://doi.org/10.15593/2499-9873/2024.3.02

perm polytech

APPLIED MATHEMATICS AND CONTROL SCIENCES
№ 3, 2024
https://ered.pstu.ru/index.php/amcs



Article
DOI: 10.15593/2499-9873/2024.3.02
UDC 517.929

On the estimates of the fundamental solution and the Cauchy function for a class of linear autonomous differential equations of neutral type

A.S. Balandin

Perm National Research Polytechnic University,
Perm, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 26 September 2023
Approved: 17 October 2024
Accepted for publication:
08 November 2024

Funding
The research was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, project No. FSNM -2023-0005.
Conflicts of Interest
The author declares no conflict of interest.
Author Contributions
100 %.

Keywords:
functional differential equation, neutral equation, delay, exponential estimation, fundamental solution, Cauchy function.

ABSTRACT

In the paper we consider a class of linear autonomous differential equations of neutral type. The equation under study arises in applications such that dynamics of cell population, motion of 2-dimensional elastic plates with friction, and ultrasonic flaw detection. On the other hand, this equation has a large variety of asymptotic properties of solutions and is therefore also interesting from a theoretical point of view, which is confirmed by a significant number of purely theoretical studies. The equation in question is a good example of an object that is simple enough to allow effective stability conditions to be obtained, and at the same time complex enough to exhibit all the variety of asymptotic properties of solutions of autonomous equations of neutral type.

The study of the stability of the considered equation is reduced to the study of asymptotic properties of its fundamental solution and Cauchy function. For the equation under study, the exponential stability criterion is known, and the domain of stability is constructed in the space of the coefficients.

In this paper, we study the positivity of the fundamental solution and the Cauchy function of the given equation, and establish two-sided exponential estimates for these functions. To do this, a well-known lemma on differential inequality is generalized for the linear autonomous differential equation of neutral type. Further, we obtain that if the equation in question is exponentially stable and its characteristic function has at least one real root, then the fundamental solution and the Cauchy function are positive on the positive semi-axis. We give a geometric form to this condition, describing a domain in the parameter space of the equation. Based on the positiveness of the fundamental solution and the Cauchy function, we construct their two-sided exponential estimates. The exponents and coefficients in the estimates obtained for the fundamental solution and the Cauchy function are exact. The effectiveness of the results established in the article is illustrated by an example.

© **Anton S. Balandin** – CSc of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Computational Mathematics, Mechanics and Biomechanics, e-mail: balandin-anton@yandex.ru, ORCID: 0000-0002-5956-8624.

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

Введение

Обозначим через $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}_0$ множества натуральных и неотрицательных целых чисел, через $\mathbb{C}$ множество комплексных чисел. Пусть $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$.

Рассмотрим линейное автономное дифференциальное уравнение нейтрального типа

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) - a\dot{x}(t-h) = bx(t) + cx(t-h), \quad t \geqslant 0, \\ &x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \dot{x}(\xi) = \psi(\xi), \quad \xi \in [-h, 0), \end{aligned} \tag{1}$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$, $h > 0$.

С одной стороны, уравнение (1) возникает в различных прикладных задачах: динамики популяции клеток [1], движения плоских упругих плит с учетом трения [2], исследования дефектов с помощью ультразвука [3]. С другой стороны, уравнение (1) обладает большим разнообразием асимптотических свойств решений и поэтому интересно также с теоретической точки зрения (см., напр., [4–9]).

Через I обозначим тождественный оператор, через S — оператор сдвига, действующий в пространстве непрерывных (кусочно-непрерывных, суммируемых) функций

$$(Sy)(t) = \begin{cases} y(t-1), & t \geqslant 1, \\ 0, & t < 1. \end{cases}$$

Изменяя масштаб времени $t \mapsto ht$ и коэффициенты $b \mapsto hb$, $c \mapsto hc$, перепишем уравнение (1) в эквивалентной форме, более удобной для дальнейшего изучения:

$$\dot{x}(t) - a(S\dot{x})(t) = bx(t) + c(Sx)(t) + \sigma(t-1), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

где роль внешнего возмущения играет функция σ, суммируемая на $[-1, 0]$ и определяемая по правилу:

$$\sigma(t) = \begin{cases} a\psi(t) + c\varphi(t), & t \in [-1, 0], \\ 0, & t \notin [-1, 0]. \end{cases}$$

Под *решением* уравнения (2) будем понимать абсолютно непрерывную на каждом конечном отрезке функцию $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую (2) почти всюду на $\mathbb{R}_+$.

Как известно [10, с. 84, теорема 1.1; 11], уравнение (2) с заданными начальными условиями $x(0) \in \mathbb{R}$ однозначно разрешимо, и его решение представимо в виде

$$x(t) = X(t)x(0) + \int_0^t Y(t-s)\,\sigma(s-1)\,ds, \tag{3}$$

где $X\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ называется *фундаментальным решением*, а $Y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — *функцией Коши* уравнения (2). На отрицательной полуоси X, Y доопределим нулём.

1. Фундаментальное решение и функция Коши

Функция X определяется как решение однородного уравнения вида (2)

$$\dot{x}(t) - a(S\dot{x})(t) = bx(t) + c(Sx)(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

дополненного начальным условием $x(0) = 1$.

Для автономного дифференциального уравнения, разрешённого относительно производной ($S = \theta$), между его фундаментальным решением и функцией Коши существует простая зависимость:

$$Y(t) = X(t).$$

Формула Коши принимает вид:

$$x(t) = X(t)x(0) + \int_0^t X(t-s)\,\sigma(s-1)\,ds.$$

Таким образом, в данном случае асимптотические свойства решений определяются свойствами одной функции — фундаментального решения X.

Пример 1. Очевидно, что для уравнения

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(t-1) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

справедливо $X(t) = 1$ при $t \in [0, \infty)$, а $Y(t) = k$ при $k - 1 \leqslant t < k$, $k \in \mathbb{N}$.

В работе [12] установлена связь между фундаментальным решением и функцией Коши уравнения (2).

Теорема 1 [12]. *Пусть X — фундаментальное решение, Y — функция Коши уравнения* (2). *Тогда*

$$X(t) = (I - aS)Y(t).$$

Формула (3) показывает, что исследование устойчивости уравнения (2) сводится к изучению асимптотических свойств функций X и Y, в частности наличия следующих экспоненциальных оценок для некоторых $M_1, M_2, \gamma > 0$:

$$|Y(t)| \leqslant M_1 e^{-\gamma t}, \tag{4}$$

$$|X(t)| \leqslant M_2 e^{-\gamma t}. \tag{5}$$

Из оценки (4) вытекает оценка (5). Обратное неверно.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$(I - aS)\dot{x}(t) + b(I - aS)x(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где $a > 1$, $b > 0$. Легко убедиться, что

$$X(t) = \chi(t)e^{-bt}, \quad Y(kh) = \frac{a^{k+1} - e^{-b(k+1)}}{a - e^{-b}}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Заметим, что в случае $a = c = 0$ имеем $X(t) = Y(t) = e^{bt}$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что a и c одновременно не равны нулю.

2. Экспоненциальная устойчивость

Для уравнения (1) известен критерий экспоненциальной устойчивости и построена область устойчивости в [13].

Пусть область D ограничена плоскостями

$$P_1 = \{(u_a, u_b, u_c)\colon u_c = u_b\}, \quad P_{2,3} = \{(u_a, u_b, u_c)\colon u_a = \pm 1\}$$

и поверхностью

$$\Gamma = \left\{(u_a, u_b, u_c)\colon u_a = \cos\theta + u_b \frac{\sin\theta}{\theta},\ u_c = -\theta\sin\theta + u_b\cos\theta\right\},$$

где $\theta \in (\theta_0, \pi)$ при $u_b \in (-2, 0)$, $\theta \in (0, \theta_0)$ при $u_b \geqslant 0$, θ_0 — наименьший положительный корень уравнения $\cos y - u_b \frac{\sin y}{y} = 1$. Поверхность Γ и плоскости P_1, P_2, P_3 ограничивают множество D, границы не принадлежат D. Область D изображена на рис. 1.

Теорема 2 [13]. *Функция Коши уравнения* (2) *имеет оценку* (4) *тогда и только тогда, когда* $\{a, -b, c\} \in D$.

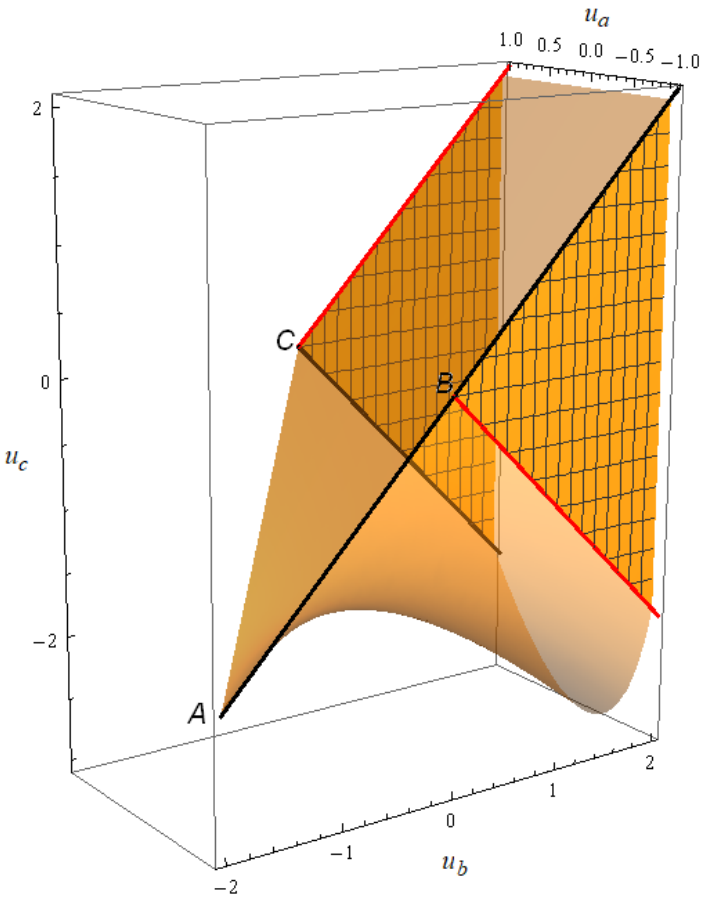


Рис. 1. Область D

3. Положительность фундаментального решения и функции Коши

Здесь $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}_-$.

Лемма 1. *Если* $a \in \mathbb{R}_+$, *оператор* $I - aS$ *положительно обратим на каждом конечном отрезке.*

Доказательство. При $t \in [n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$, оператор $I - aS$ обратим:

$$(I - aS)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k S^k.$$

Так как $a \geqslant 0$, то на каждом конечном отрезке $(I - aS)^{-1} y \geqslant 0$ при $y \geqslant 0$.

Лемма 2. *Если $a \in \mathbb{R}_+$ и фундаментальное решение X уравнения* (2) *положительно, то функция Коши Y уравнения* (2) *положительна.*

Доказательство. Вытекает из теоремы 1 и леммы 1.

Характеристическая функция уравнения (2):

$$g(p) = p(1 - ae^{-p}) - b - ce^{-p}, \quad p \in \mathbb{C}.$$

Далее нам понадобится лемма о дифференциальном неравенстве [14, с. 65–66]. Обобщим её на уравнение (2).

Лемма 3. *Пусть $a \in \mathbb{R}_+$, существует такая положительная абсолютно непрерывная функция v, что $v(t) > 0$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$, $v(\xi) = 0$ при $\xi < 0$ и*

$$(Lv)(t) = \dot{v}(t) - a(S\dot{v})(t) - bv(t) - c(Sv)(t) \leqslant 0$$

при почти всех $t \in \mathbb{R}_+$. Тогда $X(t) \geqslant v(t)/v(0)$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$(Lv)(t) = \eta(t).$$

Используя (3), запишем

$$v(t) = X(t)v(0) + \int_0^t Y(t-s)\eta(s)\,ds. \tag{6}$$

Допустим, что существует t_0 такое, что $X(t_0) = 0$. В силу теоремы 1 и леммы 1 из положительности функции X на $[0, t_0)$ вытекает положительности функции Y на $[0, t_0)$. Тогда

$$v(t_0) = \int_0^{t_0} Y(t_0 - s)\eta(s)\,ds \leqslant 0.$$

Это противоречит положительности функции v на $\mathbb{R}_+$. Следовательно, фундаментальное решение X положительно на $\mathbb{R}_+$.

Следствие 1. *Если выполнены условия леммы 3, то $X(t) \geqslant \frac{v(t)}{v(0)}$.*

Доказательство. Так как функция X положительна и η неположительна, то неравенство $X(t) \geqslant \frac{v(t)}{v(0)}$ вытекает из равенства (6).

Теорема 3. *Пусть $a \in \mathbb{R}_+$, $c \in \mathbb{R}_-$, $\{a, -b, c\} \in D$. Если функция g имеет хотя бы один вещественный корень, то фундаментальное решение X и функция Коши Y уравнения* (2) *положительны на $\mathbb{R}_+$.*

Доказательство. Пусть $g(p_0) = 0$ при некотором $p_0 \in \mathbb{R}$. Точка $\{a, -b, c\} \in D$, поэтому $p_0 < 0$. Заметим, что

$$p_0 - b = e^{-p_0}(ap_0 + c) \leqslant 0,$$

причём равенство возможно только при $a = c = 0$.

Положим $v(t) = e^{p_0 t} > 0$. При $t \in [0, 1)$ имеем

$$(Lv)(t) = e^{p_0 t}(p_0 - b) \leqslant 0.$$

При $t \geqslant 1$

$$(Lv)(t) = e^{p_0 t}(p_0 - ap_0 e^{-p_0} - b - ce^{-p_0}) = e^{p_0 t} g(p_0) = 0.$$

Тогда, по следствию 1, $X(t) \geqslant e^{p_0 t} > 0$. Значит, $Y(t) > 0$.

Рассмотрим в декартовой системе координат $Ou_a u_b u_c$ поверхность $u_c = \phi(u_a, u_b)$, заданную параметрически

$$u_b = -u_a e^{-\theta} + 1 + \theta, \quad u_c = u_a(1 - \theta) - e^{\theta}, \quad u_a \in [0, 1),$$

где $\theta \in (\theta_0, 0)$, θ_0 — корень уравнения $u_a(1 - \theta) = e^{\theta}$, $\theta < 0$ при $u_a = 0$.

Обозначим через P область, определённую неравенствами $\phi(u_a, u_b) \leqslant u_c < -u_b$, $u_a \in [0, 1)$. На рис. 3 изображены сечения области D (закрашенная область, границы которой выделены синим цветом) и сечения множества P (при $u_c \geqslant 0$ совпадает с D, при $u_c < 0$ закрашена красным цветом) при различных значениях коэффициента u_a.

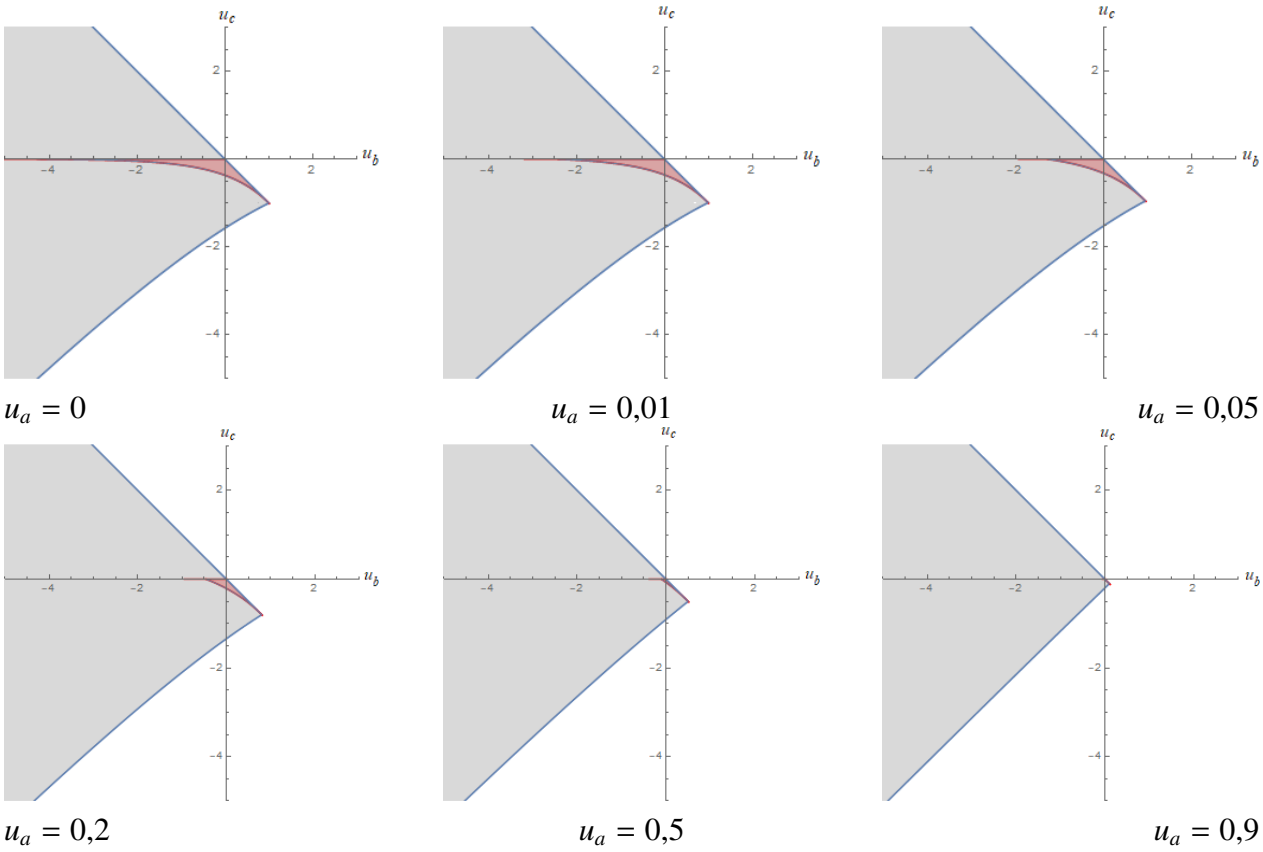


Рис. 2. Сечения области D (закрашенная область, границы которой выделены синим цветом) и сечения множества P (при $u_c \geqslant 0$ совпадает с D, при $u_c < 0$ закрашена красным цветом) при различных значениях коэффициента u_a

Лемма 4. *Пусть* $\{a, -b, c\} \in D$, $a > 0$, $c < 0$, $\tilde{b} > b$, $\tilde{c} > c$, $\{a, -\tilde{b}, \tilde{c}\} \in D$. *Тогда если фундаментальное решение* X *уравнения* (2) *положительно на* $\mathbb{R}_+$, *то фундаментальное решение уравнения*

$$\dot{x}(t) - a(S\dot{x})(t) = \tilde{b}x(t) + \tilde{c}(Sx)(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{7}$$

положительно на $\mathbb{R}_+$.

Доказательство. Обозначим через $\tilde{X}$ фундаментальное решение уравнения (7).

Положим $v(t) = X(t)$ и оценим

$$\dot{X}(t) - a(S\dot{X})(t) - \tilde{b}X(t) - \tilde{c}(SX)(t) = \dot{X}(t) - a(S\dot{X})(t) - bX(t) - c(SX)(t) +$$
$$+ (b - \tilde{b})X(t) + (c - \tilde{c})(SX)(t) \leqslant \dot{X}(t) - a(S\dot{X})(t) - bX(t) - c(SX)(t) = 0.$$

Значит, по лемме 3 функция $\tilde{X}$ положительна на $\mathbb{R}_+$.

Лемма 5. *Если точка* $M(a, b, c) \in P$, *то фундаментальное решение* X *и функция Коши* Y *положительны на* $\mathbb{R}_+$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $c \in \mathbb{R}_-$. Пусть $a = u_a^0$, $b = u_b^0$, $c = u_c^0$ и положим, что точка $M_0\{u_a^0, u_b^0, u_c^0\}$ принадлежит области P. Тогда $u_c^0 \geqslant \phi(u_a^0, u_b^0)$. Проведём прямую $\{u_a = u_a^0, u_b = u_b^0\}$ до пересечения с графиком функции ϕ, обозначим точку пересечения $M\{u_a^0, u_b^0, u_c'\}$. Из равенства $u_c' = \phi(u_a^0, u_b^0)$ следует существование такого параметра θ', что $u_b^0 = -u_a^0 e^{-\theta'} + 1 + \theta'$, $u_c' = u_a^0(1 - \theta') - e^{\theta'}$. Откуда вытекает, что $\theta'(1 - u_a^0 e^{-\theta'}) - u_b^0 - u_c' e^{-\theta'} = 0$. Но $u_c' \leqslant u_c^0$, поэтому $\theta'(1 - u_a^0 e^{-\theta'}) - u_b^0 - u_c^0 e^{-\theta'} \leqslant 0$. Учитывая $\lim\limits_{\zeta \to -\infty} g(\theta) = +\infty$, видим, что функция g имеет вещественный корень. Значит, по теореме 3 функция X положительна на $\mathbb{R}_+$.

В силу леммы 4 при $c > 0$ функция X также положительна на $\mathbb{R}_+$. По теореме 1 и лемме 1 из положительности функции X на $\mathbb{R}_+$ вытекает положительности функции Y на $\mathbb{R}_+$.

Пусть $\{a, b, c\} \in P$, $c \in \mathbb{R}_-$ (данное множество выделено красным на рис. 3). Обозначим наибольший вещественный корень функции g через $-\omega$, $\omega > 0$.

4. Вспомогательное уравнение

Сделаем замену переменных $x(t) = e^{-\omega t} y(t)$ в уравнении (2). Тогда y является решением уравнения

$$\dot{y}(t) - a_\omega(S\dot{x})(t) = b_\omega y(t) + c_\omega(Sx)(t) + \sigma(t-1)e^{\omega t}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{8}$$

где $a_\omega = ae^\omega$, $b_\omega = b + \omega$, $c_\omega = (c - a\omega)e^\omega$.

Обозначим через X_0 фундаментальное решение уравнения (8), а через G его характеристическую функцию

$$G(p) = p(1 - ae^\omega e^{-p}) - (b + \omega) - (c - a\omega)e^\omega e^{-p}, \quad p \in \mathbb{C}.$$

Так как функции g и G связаны соотношением $g(p - \omega) = G(p)$, то вещественному корню $p = -\omega$ функции g соответствует корень $p = 0$ функции G.

Обозначим через $\operatorname{int} P$ множество внутренних точек множества P.

Лемма 6. *Если* $\{a, b, c\} \in \operatorname{int} P$, $c \leqslant 0$, *то фундаментальное решение уравнения* (8) *возрастает на* $\mathbb{R}_+$.

Доказательство. В условиях леммы $G(0) = 0$, $G'(0) > 0$. При $t \in [0, 1)$ имеем $\dot{X}_0(t) = b_\omega X_0(t)$. Следовательно, $X_0(t) = e^{b_\omega t} > 0$. Из $G(0) = 0$ следует

$$0 = b_\omega + c_\omega = b_\omega + (c - a\omega)e^\omega < b_\omega.$$

(Равенство возможно только при $a = c = 0$, этот случай рассмотрен в начале статьи.) Поэтому $\dot{X}_0(t) = b_\omega e^{b_\omega t} > 0$, т. е. X_0 возрастает при $t \in [0, 1)$.

Допустим, что при $t \geqslant 1$ существует t_0, для которого $\dot{X}_0(t_0) = 0$. Тогда при $t < t_0$ $X_0(t)$ возрастает. Значит,

$$\dot{X}_0(t_0) = a_\omega \dot{X}_0(t_0 - 1) + b_\omega X_0(t_0) + c_\omega X_0(t_0 - 1) > a_\omega \dot{X}_0(t_0 - 1) + (b_\omega + c_\omega)X_0(t_0) > 0,$$

что противоречит допущению. Значит, функция X_0 строго возрастает при $t > 0$.

Следующая лемма даёт ответ на вопрос о количестве комплексных нулей функции G на мнимой оси и справа от неё.

Лемма 7. *Если* $\{a, b, c\} \in \operatorname{int} P$, $c \leqslant 0$, *то функция* G *не имеет нулей в полуплоскости* $\Pi = \{p \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re} \lambda \geqslant 0\}$ *за исключением точки* $p = 0$.

Доказательство. В условиях леммы $G(0) = -(b_\omega + c_\omega) = 0$, $G'(0) = 1 - a_\omega + c_\omega > 0$, $a_\omega \in [0, 1)$. Значит, в силу [13, п. 4.1, с. 20] справедливо утверждение данной леммы.

5. Оценки фундаментального решения и функции Коши

Определим

$$g_X(\gamma) = \frac{-\gamma(1 - ae^\gamma) - b - ce^\gamma}{1 - ae^\gamma}, \quad \gamma \in \mathbb{R},$$

и

$$G_X(\gamma) = \frac{-\gamma(1 - a_\omega e^\gamma) - b_\omega - c_\omega e^\gamma}{1 - a_\omega e^\gamma}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Данные функции связаны соотношением $g_X(\gamma - \omega) = G_X(\gamma)$.

Лемма 8. *Если* $\{a, b, c\} \in \operatorname{int} P$, $c \in \mathbb{R}_-$, *то фундаментальное решение уравнения* (8)

1) *возрастает на полуоси* $[0, +\infty)$,
2) *имеет предел* $\lim\limits_{t \to +\infty} X_0(t) = \frac{1}{G'_X(0)}$,
3) *имеет двустороннюю оценку*

$$1 < X_0(t) < \frac{1}{G'_X(0)}, \quad t > 0. \tag{9}$$

Доказательство. Первое утверждение следует из леммы 6.

В условиях леммы $G(0) = -(b_\omega + c_\omega) = 0$, $G'(0) = 1 - a_\omega + c_\omega > 0$, $a_\omega \in [0, 1)$. Значит, в силу [13, теорема 8, с. 20–21] справедливо второе утверждение данной леммы.

Третье утверждение вытекает из первого и второго.

Замечание 1. Из леммы 8 следует, что если уравнение (8) рассматривать на полуоси $[T, +\infty)$, где $T > 0$, то оценка (9) может быть заменена на

$$X_0(T) < X_0(t) < \frac{1}{G'_X(0)}, \quad t > T,$$

при увеличении T разность $\frac{1}{G'(0)} - X_0(T)$ можно сделать сколь угодно малой.

Применяя лемму 8, получаем следующий результат.

Теорема 4. *Если* $\{a, b, c\} \in \operatorname{int} P$, $c \in \mathbb{R}_-$, *то фундаментальное решение* X *уравнения* (2) *имеет двустороннюю оценку*

$$e^{-\omega t} \leqslant X(t) < -\frac{1}{g'_X(\omega)} e^{-\omega t}, \quad t \geqslant 0, \tag{10}$$

и, кроме того, $\lim\limits_{t\to\infty} X(t)e^{\omega t} = -1/g'_X(\omega)$.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из леммы 8, поскольку фундаментальные решения уравнений (2) и (8) связаны равенством $X(t) = e^{-\omega t}X_0(t)$, а характеристические функции — соотношением $g_X(p - \omega) = G_X(p)$.

Замечание 2. Показатель экспоненты и постоянные 1 и $-1/g'_X(\omega)$ в оценке (10) точные. Это следует из второго утверждения леммы 8 и свойства $X(0) = 1$. Показатель ω в (10) не может быть увеличен, так как оценка двусторонняя.

Лемма 9. *Если* $\{a, b, c\} \in \operatorname{int} P$, $c \in \mathbb{R}_-$, *то функция Коши* Y_0 *уравнения* (8)

1) *возрастает на полуоси* $[0, +\infty)$,
2) *имеет предел* $\lim\limits_{t\to+\infty} Y_0(t) = \frac{1}{G'(0)}$,
3) *имеет двустороннюю оценку*

$$1 < Y_0(t) < \frac{1}{G'(0)}, \quad t > 0.$$

Доказательство. Поскольку

$$Y_0(t) = (I - a\omega S)^{-1}X_0(t) = X_0(t) + a\omega(SX_0)(t) + a\omega^2(S^2X_0)(t) + \dots$$

— на каждом конечном отрезке конечная сумма возрастающих функций, то первое утверждение леммы доказано.

В условиях леммы $G(0) = -(b_\omega + c_\omega) = 0$, $G'(0) = 1 - a_\omega + c_\omega > 0$, $a_\omega \in [0, 1)$. Значит, в силу [13, теорема 8, с. 20–21] справедливо второе утверждение данной леммы.

Третье утверждение вытекает из первого и второго.

Теорема 5. *Если* $\{a, b, c\} \in \operatorname{int} P$, $c \in \mathbb{R}_-$, *то функция Коши уравнения* (2) *имеет двустороннюю оценку*

$$e^{-\omega t} \leqslant Y(t) < \frac{1}{g'(-\omega)} e^{-\omega t}, \quad t \geqslant 0, \tag{11}$$

и, кроме того, $\lim\limits_{t\to\infty} Y(t)e^{\omega t} = 1/g'(-\omega)$.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из леммы 9, поскольку функции Коши уравнений (2) и (8) связаны равенством $Y(t) = e^{-\omega t}Y_0(t)$, а характеристические функции — соотношением $g(p - \omega) = G(p)$.

Замечание 3. Показатель экспоненты и постоянные 1 и $1/g'(-\omega)$ в (11) точные. Это следует из второго утверждения леммы 9 и свойства $Y(0) = 1$. Показатель ω в (10) не может быть увеличен, так как оценка двусторонняя.

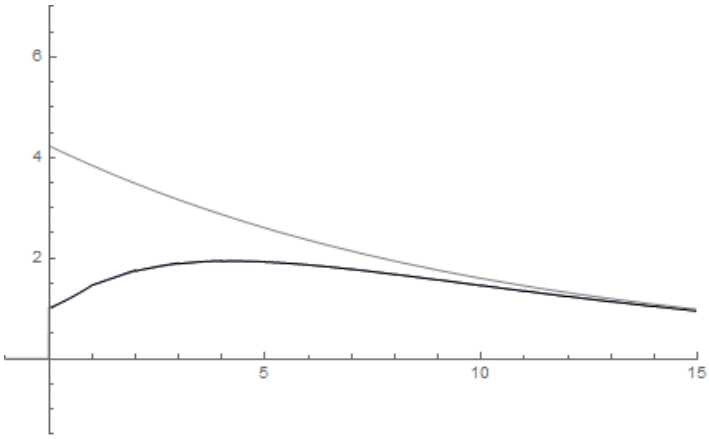


Рис. 3. Фундаментальное решение X и его оценка

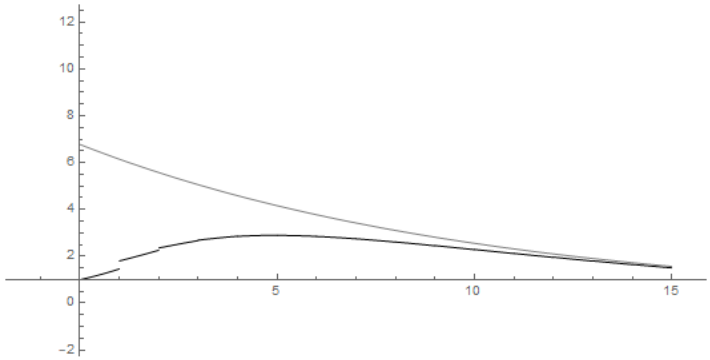


Рис. 4. Функция Коши Y и её оценка

6. Пример

Найдём точные оценки фундаментального решения и функции Коши уравнения

$$\dot{x}(t) - 0{,}34\dot{x}(t-1) - 0{,}38x(t) + 0{,}4x(t-1) = f(t), \quad t \geqslant 0. \tag{12}$$

Выпишем его характеристическую функцию

$$g(p) = p(1 - 0{,}34e^{-p}) - 0{,}38 + 0.4e^{-p}, \quad p \in \mathbb{C},$$

и производную

$$g'(p) = 1 - 0{,}74e^{-p} + 0{,}34pe^{-p}, \quad p \in \mathbb{C}.$$

Численно решая уравнение $g(p) = 0$, найдём наибольший вещественный корень $p \approx -0{,}0976$. Полагаем $\omega \approx 0{,}0976$, вычислим $\frac{1}{g'(-\omega)} \approx 6{,}776$ и с помощью теоремы 5 получаем

$$e^{-0{,}098t} \leqslant Y(t) < 6{,}776e^{-0{,}097t}.$$

Применив теорему 4, получаем

$$e^{-0.098t} \leqslant X(t) < 3.842e^{-0.097t}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

На рис. 3 и 4 изображены фундаментальное решение X и функция Коши Y уравнения (12), построенные по шагам, и их оценки.

Список литературы

1. Diekmann, O. On the characteristic equation $\lambda = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3\lambda)e^{-\lambda}$ and its use in the context of a cell population model / O. Diekmann, P. Getto, Y. Nakata // J. Math. Biol. — 2016. — Vol. 72. — P. 877–908.

2. Putelat, T. Wave-modulated orbits in rate-and-state friction / T. Putelat, J. R. Willis, J. H. R. Dawes // International Journal of Non-Linear Mechanics. — 2012. — Vol. 47. — P. 258–267.

3. Junca, S. Interaction between periodic elastic waves and two contact nonlinearities / S. Junca, B. Lombard // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. — 2012. — Vol. 22, no. 4. — 41 p.

4. Ожиганова, И. А. Определение области асимптотической устойчивости для дифференциального уравнения первого порядка с отклоняющимся аргументом / И. А. Ожиганова // Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Ун-т Дружбы народов. — 1962. — Т. 1. — С. 52–62.

5. Громова, П. С. О тригонометрических рядах, суммой которых является непрерывная неограниченная на числовой оси функция — решение уравнения с отклоняющимся аргументом / П. С. Громова, А. М. Зверкин // Дифференц. уравнения. — 1968. — Т. 4, № 10. — С. 1774–1784.

6. Junca, S. Stability of a critical nonlinear neutral delay differential equation / S. Junca, B. Lombard // J. Differential Equations. — 2014. — Vol. 256, no. 7. — P. 2368–2391.

7. Čermák, J. Delay-dependent stability criteria for neutral delay differential and difference equations / J. Čermák, J. Hrabalová // Discrete and Continuous Dynamical Systems. — 2014. — Vol. 34, no. 11. — P. 4577–4588.

8. Liao, X. Stability of a neutral delay neuron system in the critical case / X. Liao, N. Mu // 2014 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN). — Beijing, China, 2014. — P. 1221–1224.

9. Liao, X. Asymptotic stability of a class of neutral delay neuron system in a critical case / X. Liao // IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems. — 2015. — V. 26, no. 12. — P. 3320–3325.

10. Азбелев, Н. В. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений / Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина. — М.: Наука, 1991. — 280 с.

11. Баландин, А. С. О связи между фундаментальным решением и функцией Коши для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа / А. С. Баландин // Прикладная математика и вопросы управления. — 2018. — № 1. — С. 13–25.

12. Баландин, А. С. Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа / А. С. Баландин, В. В. Малыгина // Изв. вузов. Матем. — 2007. — № 7. — С. 17–27.

13. Баландин, А. С. Асимптотические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений нейтрального типа / А. С. Баландин, В. В. Малыгина // Математические труды. — 2020. — Т. 23, № 2. — С. 3–49.

14. Азбелев, Н. В. Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными / Н. В. Азбелев, П. М. Симонов. — Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2001. — 230 с.

15. Малыгина, В. В. Оценка показателя экспоненты для устойчивых решений одного класса дифференциально-разностных уравнений / В. В. Малыгина // Изв. вузов. Матем. — 2021. — № 12. — С. 67–79.

16. Малыгина, В. В. О точных двусторонних оценках устойчивых реше-ний автономных функционально-дифференциальных уравнений / В. В. Малыгина, К. М. Чудинов // Сиб. матем. журн. — 2022. — Т. 63, № 2. — С. 360–378.

References

1. Diekmann O., Getto P., Nakata Y. On the characteristic equation $\lambda = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3\lambda)e^{-\lambda}$ and its use in the context of a cell population model. *J. Math. Biol.*, 2016, vol. 72, pp. 877–908.

2. Putelat T., Willis J. R., Dawes J. H. P. Wave-modulated orbits in rate-and-state friction. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2012, vol. 47, pp. 258–267.

3. Junca S., Lombard B. Interaction between periodic elastic waves and two contact nonlinearities. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2012, vol. 22, no. 4, 41 p.

4. Ozhiganova I. A. Opredelenie oblasti asimptoticheskoj ustojchivosti dlya differentsial'nykh uravnenij pervogo poryadka s otklonyushhimsya argumentom [Determination of the region of asymptotic stability for a first-order differential equation with deviating argument]. *Proceedings of Seminar on Theory of Differential Equations with Deviating Argument*, University of People Friendship, 1962, vol. 1, pp. 52–62.

5. Gromova P. S., Zverkin A. M. O trigonometricheskikh ryadakh, summoj kotorykh yavlyautsya nepreryvnaya neogranichennaya na chislovoj osi funktsiya — reshenie uravneniya s otklonyayushchimsya argumentom [Trigonometric series whose sum is a continuous unbounded function on the real axis is a solution of an equation with deviating argument]. *Differential Equations*, 1968, vol. 4, no. 10, pp. 1774–1784.

6. Junca S., Lombard B. Stability of a critical nonlinear neutral delay differential equation. *J. Differential Equations*, 2014, vol. 256, no. 7, pp. 2368–2391.

7. Čermák J., Hrabalová J. Delay-dependent stability criteria for neutral delay differential and difference equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2014, vol. 34, no. 11, pp. 4577–4588.

8. Liao X., Mu N. Stability of a neutral delay neuron system in the critical case. *International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN)*, Beijing, China, 2014, pp. 1221–1224.

9. Liao X. Asymptotic stability of a class of neutral delay neuron system in a critical case, *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2015, vol. 26, no. 12, pp. 3320–3325.

10. Azbelev N. V., Maksimov V. P., Rakhmatullina L. F. Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravnenij [Introduction to the theory of functional differential equations]. Moscow: Nauka, 1991, 280 p.

11. Balandin A. S. O svyazi mezhdu fundamental'nym resheniem i funktsiej Koshi dlya funktsional'no-differentsial'nykh uravnenij nejtral'nogo tipa [On relationship between the fundamental soluiton and the Cauchy function for neutral functional differential equations]. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2018, no. 1, pp. 13–25.

12. Balandin A. S., Malygina V. V. On exponential stability of linear differential-difference equations of neutral type. *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*, 2007, vol. 51, no. 7, pp. 15–24.

13. Balandin A. S., Malygina V. V. Asymptotic properties of solutions to differential equations of neutral type. *Siberian Advances in Mathematics*, 2021, vol. 31, pp. 79–111.

14. Azbelev N. V., Simonov P. M. Ustoichivost' reshenii uravnenii s obyknovennymi proizvodnymi [Stability of differential equations with aftereffect]. Perm: Perm. Univ., 2001, 230 p.

15. Malygina V. V. Exponent estimation for stable solutions of a certain class of differential-difference equations. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2021, vol. 65, no. 12, pp. 56–67.

16. Malygina V. V., Chudinov K. M. About exact two-sided estimates for stable solutions to autonomous functional differential equations. *Siberian Math. J.*, 2022, vol. 63, no. 2, pp. 299–315.