

Бравый, Е. И. Условия всюду разрешимости для линейного функционально-дифференциального уравнения первого порядка / Е. И. Бравый // Прикладная математика и вопросы управления. – 2024. – № 3. – С. 38–52. DOI 10.15593/2499-9873/2024.3.03

Библиографическое описание согласно ГОСТ Р 7.0.100–2018

Бравый, Е. И. Условия всюду разрешимости для линейного функционально-дифференциального уравнения первого порядка / Е. И. Бравый. – Текст : непосредственный. – DOI 10.15593/2499-9873/2024.3.03 // Прикладная математика и вопросы управления / Applied Mathematics and Control Sciences. – 2024. – № 3. – С. 38–52.



ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
И ВОПРОСЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 3, 2024

<https://ered.pstu.ru/index.php/amcs>



Научная статья

DOI: 10.15593/2499-9873/2024.3.03

УДК 517.929



Условия всюду разрешимости для линейного функционально-дифференциального уравнения первого порядка

Е.И. Бравый

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 30 сентября 2024

Одобрена: 07 октября 2024

Принята к публикации:

08 ноября 2024

Финансирование

Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FSNM-2023-0003).

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Вклад автора

100 %.

Ключевые слова:

функционально-дифференциальное уравнение, нейтральное уравнение, запаздывание, экспоненциальная оценка, фундаментальное решение, функция Коши.

АННОТАЦИЯ

Рассматриваются линейные функционально-дифференциальные уравнения, которые могут служить основой для современного моделирования в различных областях науки, техники, экономики, в том числе при исследовании нейронных сетей и машинного обучения. Эти уравнения описывают широкий класс процессов, где скорость изменения некоторой величины зависит не только от значений в текущий момент времени, но и от значений в прошлом и будущем.

Целью работы является получение точных условий на параметры уравнения, при выполнении которых уравнение имеет решение при любой суммируемой правой части, что отражает существование моделируемого объекта при разумно большом классе внешних воздействий.

Показано, что для установления факта всюду разрешимости функционально-дифференциального уравнения первого порядка достаточно исследовать только три краевых задачи: периодическую краевую задачу, задачу Коши и задачу с краевым условием на правом конце.

В терминах значений норм положительной и отрицательной частей функционального оператора получены необходимые и достаточные условия того, что линейное функционально-дифференциальное уравнение первого порядка является всюду разрешимым. Если эти условия на нормы не выполнены, то найдется такой оператор с данными нормами положительной и отрицательной частей, что уравнение не будет иметь решений при некоторых суммируемых правых частях.

Разработанные методы исследования опираются на аппарат теории функционально-дифференциальных уравнений и могут быть применены для изучения других классов функциональных уравнений, в частности, для уравнений высших порядков.

Полученные результаты могут быть использованы для анализа и моделирования различных динамических систем, где присутствуют запаздывания и (или) опережения. Эти запаздывания и опережения могут описываться наиболее общими функциональными операторами, включающими и положительную, и отрицательную части, что соответствует рассмотрению систем и с положительной, и с отрицательной обратной связью. Это позволяет более точно описывать и прогнозировать поведение таких систем.

© Бравый Евгений Ильич – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник научно-исследовательского центра «Функционально-дифференциальные уравнения», e-mail: bravyi@perm.ru, ORCID 0000-0003-2203-8192.



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

Perm Polytech Style: Bravyi E.I. Conditions of everywhere solvability for a linear functional differential equation of the first order. *Applied Mathematics and Control Sciences*. 2024, no. 3, pp. 38–52. DOI: 10.15593/2499-9873/2024.3.03

MDPI and ACS Style: Bravyi, E.I. Conditions of everywhere solvability for a linear functional differential equation of the first order. *Appl. Math. Control Sci.* **2024**, **3**, 38–52. <https://doi.org/10.15593/2499-9873/2024.3.03>

Chicago/Turabian Style: Bravyi, Eugene I. 2024. “Conditions of everywhere solvability for a linear functional differential equation of the first order”. *Appl. Math. Control Sci.* no. 3: 38–52. <https://doi.org/10.15593/2499-9873/2024.3.03>



APPLIED MATHEMATICS
AND CONTROL SCIENCES

№ 3, 2024

<https://ered.pstu.ru/index.php/amcs>



Article

DOI: 10.15593/2499-9873/2024.3.03

UDC 517.929



Conditions of everywhere solvability for a linear functional differential equation of the first order

E.I. Bravyi

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 30 September 2023

Approved: 07 October 2024

Accepted for publication:

08 November 2024

Funding

This research was funded by Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Project № FSNM-2023-0003).

Conflicts of Interest

The author declares no conflict of interest.

Author Contributions

100 %.

Keywords:

functional differential equations, conditions of everywhere solvability, positive operators, periodic boundary value problem, modeling of dynamic systems.

ABSTRACT

This article discusses linear functional differential equations that can serve as the basis for modern modeling in various fields of science, technology, and economics, including the study of neural networks and machine learning. These equations describe a wide class of processes where the rate of change of a certain quantity depends not only on the values at the current time, but also on the values in the past and future.

The aim of the work is to obtain precise conditions on the parameters of the equation, under which the equation has a solution for any integrable right-hand side, which reflects the existence of the modeled object for a reasonably large class of external influences.

It is shown that to establish the fact of everywhere solvability of a first-order functional differential equation, it is sufficient to study only three boundary value problems: a periodic boundary value problem, a Cauchy problem, and a problem with a boundary condition at the right end.

In terms of the values of the norms of the positive and negative parts of the functional operator, necessary and sufficient conditions are obtained for a linear functional differential equation of the first order to be solvable everywhere. If these conditions on the norms are not satisfied, then there exists an operator with the given norms of the positive and negative parts such that the equation will have no solutions for some integrable right-hand sides.

The developed research methods are based on the apparatus of the theory of functional differential equations and can be applied to study other classes of functional equations, in particular, higher-order equations.

The results obtained can be used to analyze and model various dynamic systems with delays and (or) advances. These delays and advances can be described by the most general functional operators, including both positive and negative parts, which corresponds to the consideration of systems with both positive and negative feedback. This allows for a more accurate description and prediction of the behavior of such systems.

© Eugene I. Bravyi - DSc of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher of the Research Center of Functional Differential Equations, e-mail: bravyi@perm.ru, ORCID: 0000-0003-2203-8192.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

Введение, обозначения

Функционально-дифференциальные уравнения оказались очень полезным инструментом при моделировании в физике, технике, биологии, экономике [1–6], а также представляют интерес как самостоятельный математический объект [7–13]. Важнейшим аспектом исследования является изучение решений краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения. Теории краевых задач для таких уравнений посвящено множество работ [13–15]. С учетом широкого распространения моделирования во всех отраслях знаний функционально-дифференциальное уравнение может быть интересно и вне связи с конкретной краевой задачей. В этом случае в первую очередь интересен вопрос о существовании решения уравнения при любой правой части, только тогда уравнение может использоваться для адекватного моделирования. Например, когда моделируется некоторое экономическое явление, исследователь должен быть уверен, что решение существует при самых разных воздействиях внешней среды.

Рассматриваем линейные функционально-дифференциальные уравнения

$$(\mathcal{L}x)(t) = f(t), \quad t \in [0, 1], \quad (1)$$

где оператор $\mathcal{L}$ действует из пространства $\mathbf{AC}[0, 1]$ вещественных абсолютно непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций в пространство вещественных суммируемых функций $\mathbf{L}[0, 1]$ и определен равенством

$$(\mathcal{L}x)(t) \equiv \dot{x}(t) - (T^+x)(t) + (T^-x)(t), \quad t \in [0, 1].$$

Здесь T^+ , T^- — линейные ограниченные положительные операторы, действующие из пространства непрерывных функций $\mathbf{C}[0, 1]$ в пространство $\mathbf{L}[0, 1]$. Положительным называем линейный оператор $T: \mathbf{C}[0, 1] \rightarrow \mathbf{L}[0, 1]$, который отображает неотрицательные функции в почти всюду неотрицательные. Норма такого положительного оператора определена равенством

$$\|T\|_{\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{L}} = \int_0^1 (T\mathbf{1})(s) ds,$$

где $\mathbf{1}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ — единичная функция. При этом в пространствах $\mathbf{AC}[0, 1]$, $\mathbf{C}[0, 1]$, $\mathbf{L}[0, 1]$ используются стандартные нормы:

$$\|x\|_{\mathbf{AC}} = |x(0)| + \int_0^1 |\dot{x}(t)| dt, \quad \|x\|_{\mathbf{C}} = \max_{t \in [0, 1]} |x(t)|, \quad \|z\|_{\mathbf{L}} = \int_0^1 |z(t)| dt.$$

Решением уравнения (1) считаем любую функцию $x \in \mathbf{AC}^1[0, 1]$, удовлетворяющую уравнению (1) при почти всех $t \in [0, 1]$.

Определение 1. Назовем уравнение (1) всюду разрешимым, если оно имеет решение при всех $f \in \mathbf{L}[0, 1]$.

Определение 2. Линейной краевой задачей для уравнения (1) назовем систему, состоящую из уравнения (1) и краевого условия

$$\ell_1 x = c_1, \quad (2)$$

где $\ell_1: \mathbf{AC}[0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ — ненулевой линейный ограниченный функционал, $c_1 \in \mathbf{R}$ — заданное число.

Отметим, что теория краевых задач, в которых число краевых условий отлично от порядка уравнения, развита в работах Л. Ф. Рахматуллиной [16–18].

Определение 3. Краевая задача (1)–(2) называется фредгольмовой, если оператор $[\mathcal{L}, \ell_1]: \mathbf{AC}[0, 1] \rightarrow \mathbf{L}[0, 1] \times \mathbf{R}$ является нетеровым оператором нулевого индекса [17; 19].

Очевидно, что пространство $\mathbf{AC}[0, 1]$ непрерывно вложено в пространство $\mathbf{C}[0, 1]$, положительность операторов $T^+, T^-: \mathbf{C}[0, 1] \rightarrow \mathbf{L}[0, 1]$ позволяет доказать, что краевая задача (1)–(2) фредгольмова [17], таким образом, для ее однозначной разрешимости необходимо и достаточно, чтобы однородная краевая задача

$$\mathcal{L}x = 0, \quad \ell_1 x = 0,$$

имела в пространстве $\mathbf{AC}[0, 1]$ только тривиальное решение. Отметим, что в [17] показано, что и при более слабых естественных предположениях относительно оператора $\mathcal{L}$ краевая задача (1)–(2) является фредгольмовой, в частности в [20] показано, что достаточно ограниченности операторов $T^+, T^-: \mathbf{C}[0, 1] \rightarrow \mathbf{L}[0, 1]$.

Нас интересуют не условия разрешимости конкретных краевых задач для уравнения (1), а условия разрешимости самого уравнения (1). Мы не требуем вольтерровости [17, с. 81] операторов T^+, T^- , поэтому свойства уравнения могут не иметь прямых аналогов со свойствами линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых задача Коши однозначно разрешима, что обеспечивает всюду разрешимость. Нетрудно привести пример неразрешимого уравнения (1).

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = x(1) - x(0) + 1, \quad t \in [0, 1]. \quad (3)$$

Это уравнение имеет вид (1) при

$$(T^+x)(t) = x(1), \quad (T^-x)(t) = x(0), \quad t \in [0, 1],$$

таким образом, $\|T^+\| = 1, \|T^-\| = 1$. Так как для решения x уравнения (3) функция $\dot{x}$ должна быть постоянной, то $x(t) = A_0x_0(t) + A_1x_1(t), t \in [0, 1]$, при некоторых постоянных A_i и $x_i(t) = t^i, t \in [0, 1], i = 0, 1$. Легко проверить, что $\mathcal{L}x_i = 0$ при всех $i = 0, 1$, следовательно, в этом случае $\mathcal{L}x(t) \equiv 0 \neq 1$. Таким образом, уравнение (3) не имеет решения.

Этот пример неразрешимого уравнения легко обобщается на произвольный порядок n . Пусть дан упорядоченный набор точек $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} \leq 1$. Решение уравнение

$$x^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^{n+1} p_i x(t_i) + 1, \quad t \in [0, 1], \quad (4)$$

таково, что функция $x^{(n)}$ должна быть постоянной. Таким образом, $x(t) = \sum_{i=0}^n A_i x_i(t), t \in [0, 1]$, при некоторых постоянных A_i и $x_i(t) = t^i, t \in [0, 1], i = 0, 1, \dots, n$. Легко получить, что $\mathcal{L}x_i = 0$ при всех $i = 0, 1, \dots, n$, если

$$p_i = \frac{(-1)^{1+n+i} n!}{\prod_{j=1, j \neq i}^{n+1} |t_i - t_j|} = \frac{n!}{\prod_{j=1, j \neq i}^{n+1} (t_i - t_j)}, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Следовательно, $\mathcal{L}x(t) \equiv 0 \neq 1$ для такого оператора $\mathcal{L}$. Таким образом, уравнение (4) не имеет решения.

Отметим, что если положить $t_i = (i-1)/n, i = 1, 2, \dots, n+1$, то для оператора $\mathcal{L}$ уравнения (4) выполнены равенства $\|T^+\| = \|T^-\| = 2^{n-1}n^n$.

Наша цель — описать множество Ω таких пар значений норм операторов $(\mathcal{T}^+, \mathcal{T}^-)$, что
1) если

$$\|T^+\|_{C \rightarrow L} = \mathcal{T}^+, \quad \|T^-\|_{C \rightarrow L} = \mathcal{T}^-, \quad (5)$$

то уравнение (1) всюду разрешимо;

2) если же $(\mathcal{T}^+, \mathcal{T}^-) \notin \Omega$, то существуют такие линейные положительные операторы T^+ , $T^-: C[0, 1] \rightarrow L[0, 1]$ с данными нормами (выполнены равенства (5)), что уравнение (1) не является разрешимым при некоторой функции $f \in L[0, 1]$.

Назовем множество Ω множеством всюду разрешимости.

Задача о построении множества всюду разрешимости, по-видимому, не привлекала к себе внимания из-за того, что существует простое необходимое и достаточное условие всюду разрешимости оператора $\mathcal{L}$.

Теорема 1 [17]. *Эквивалентны следующие утверждения:*

- 1) уравнение (1) всюду разрешимо;
- 2) существует такой линейный ограниченный функционал $\ell_1: AC[0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, что краевая задача (1)–(2) однозначно разрешима;
- 3) пространство решений однородного уравнения $\mathcal{L}x = 0$ одномерно.

Выбирая различные функционалы ℓ_1 и находя условия разрешимости краевой задачи (1)–(2) в терминах норм операторов T^+ и T^- , с помощью теоремы 1 мы можем построить только подмножества множества всюду разрешимости Ω . Найти само множество всюду разрешимости — это, по-видимому, новая, еще не решенная в данной постановке задача. Ее решение может быть полезно при моделировании различных процессов, в том числе в экономике, когда требуется, чтобы решение существовало при каждом внешнем воздействии из рассматриваемого нами пространства (в данном случае это пространство суммируемых функций $L[0, 1]$).

Основной результат

Сформулируем основной результат.

Теорема 2. *Уравнение (1) всюду разрешимо при всех линейных положительных операторах T^+ , $T^-: C[0, 1] \rightarrow L[0, 1]$, удовлетворяющих равенствам (5), тогда и только тогда, когда неотрицательные числа $\mathcal{T}^+$, $\mathcal{T}^-$ удовлетворяют неравенствам*

$$\mathcal{T}^+ < 1, \quad \mathcal{T}^- < 2(1 + \sqrt{1 - \mathcal{T}^+}) \quad (6)$$

или неравенствам

$$\mathcal{T}^- < 1, \quad \mathcal{T}^+ < 2(1 + \sqrt{1 - \mathcal{T}^-}). \quad (7)$$

Таким образом, множество всюду разрешимости Ω можно представить в виде объединения

$$\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \{(\mathcal{T}^+, \mathcal{T}^-) : \mathcal{T}^+ \in [0, 1), \quad \mathcal{T}^- \in [0, 1)\}, \\ \Omega_1 &= \{(\mathcal{T}^+, \mathcal{T}^-) : \mathcal{T}^+ \in [0, 1), \quad \mathcal{T}^- \in [1, 2(1 + \sqrt{1 - \mathcal{T}^+}))\}, \\ \Omega_2 &= \{(\mathcal{T}^+, \mathcal{T}^-) : \mathcal{T}^- \in [0, 1), \quad \mathcal{T}^+ \in [1, 2(1 + \sqrt{1 - \mathcal{T}^-}))\}. \end{aligned}$$

При доказательстве будут использоваться три задачи: задача Коши

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (T^+x)(t) - (T^-x)(t) + f(t), & t \in [0, 1], \\ x(0) = c, \end{cases} \quad (8)$$

задача с краевым условием на правом конце отрезка

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (T^+x)(t) - (T^-x)(t) + f(t), & t \in [0, 1], \\ x(1) = c, \end{cases} \quad (9)$$

и периодическая задача

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (T^+x)(t) - (T^-x)(t) + f(t), & t \in [0, 1], \\ x(0) = x(1). \end{cases} \quad (10)$$

При доказательстве будет показано, что если пара норм $(\mathcal{T}^+, \mathcal{T}^-)$ операторов T^+ , T^- принадлежит множеству Ω_0 , то задача Коши (8) и задача (9) являются однозначно разрешимыми. Если $(\mathcal{T}^+, \mathcal{T}^-) \in \Omega_1$, то хотя бы одна из задач (8), (10) является однозначно разрешимой. Если $(\mathcal{T}^+, \mathcal{T}^-) \in \Omega_2$, то хотя бы одна из задач (9), (10) является однозначно разрешимой. Эти факты обеспечивают всюду разрешимость уравнения.

Доказательство теоремы 2 разобьем на 7 нижеследующих пунктов.

Пусть неотрицательные числа $\mathcal{T}^+$, $\mathcal{T}^-$ заданы.

1. Для доказательства теоремы 2 в части необходимости покажем, что если неравенства (6) и (7) не выполнены, то существуют такие линейные положительные операторы, удовлетворяющие (5), для которых однородное уравнение $\mathcal{L}x = 0$ имеет два линейно независимых решения. По теореме (1) тогда уравнение (1) не является всюду разрешимым.

2. Если $\mathcal{T}^+ \geq 1$, $\mathcal{T}^- \geq 1$, то таким уравнением (1) будет уравнение

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} -2x(0), & t \in [0, 1/2], \\ 2x(1), & t \in (1/2, 1], \end{cases} + p^+(t)x(1/2) - p^-(t)x(1/2), \quad t \in [0, 1], \quad (11)$$

где p^+ , $p^- \in \mathbf{L}[0, 1]$ — такие неотрицательные функции, что

$$\int_0^1 p^+(s) ds = \mathcal{T}^+ - 1, \quad \int_0^1 p^-(s) ds = \mathcal{T}^- - 1.$$

Для уравнения (11) имеем

$$(T^+x)(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1/2], \\ 2x(1), & t \in (1/2, 1], \end{cases} + p^+(t)x(1/2), \quad t \in [0, 1],$$

$$(T^-x)(t) = \begin{cases} 2x(0), & t \in [0, 1/2], \\ 0, & t \in (1/2, 1], \end{cases} + p^-(t)x(1/2), \quad t \in [0, 1],$$

условия (5) выполнены. Уравнение (11) имеет 2 линейно независимых решения

$$x_1(t) = \begin{cases} 1/2 - t, & t \in [0, 1/2], \\ 0, & t \in (1/2, 1]; \end{cases} \quad x_2(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1/2], \\ t - 1/2, & t \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

Следовательно, уравнение (11) не является всюду разрешимым.

3. При $\mathcal{T}^+ \in [0, 1]$, $\mathcal{T}^- \geq 2(1 + \sqrt{1 - \mathcal{T}^+}) \equiv \mathcal{T}^{*-}$ положим $0 < a < d < 1$ и рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} -\frac{1}{a}x(0), & t \in [0, a], \\ -\frac{\mathcal{T}^{*-}-1}{2(d-a)}x(1), & t \in (a, d], -p^-(t)x(a), \quad t \in [0, 1], \\ -\frac{\mathcal{T}^{*-}+1}{2(1-d)}x(d) + \frac{\mathcal{T}^+}{1-d}x(1), & t \in (d, 1], \end{cases} \quad (12)$$

где $p^- \in \mathbf{L}[0, 1]$ — такая неотрицательная функция, что

$$\int_0^1 p^-(s) ds = \mathcal{T}^- - \mathcal{T}^{*-}.$$

Для этого уравнения

$$(T^+x)(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, d], \\ \frac{\mathcal{T}^+}{1-d}x(1), & t \in (d, 1], \end{cases}$$

$$(T^-x)(t) = \begin{cases} \frac{1}{a}x(0), & t \in [0, a], \\ \frac{\mathcal{T}^{*-}-1}{2(d-a)}x(1), & t \in (a, d], +p^-(t)x(a), \quad t \in [0, 1], \\ \frac{\mathcal{T}^{*-}+1}{2(1-d)}x(d), & t \in (d, 1], \end{cases}$$

таким образом, равенства (5) выполнены. Уравнение (12) имеет два линейно независимых решения

$$x_1(t) = \begin{cases} a-t, & t \in [0, a], \\ 0, & t \in (a, 1], \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, a], \\ \frac{\mathcal{T}^{*-}-1}{2(d-a)}(a-t), & t \in (a, d], \\ -\frac{\mathcal{T}^{*-}-1}{2} + \frac{t-d}{1-d} \left(\frac{(\mathcal{T}^{*-})^2-1}{4} + \mathcal{T}^+ \right), & t \in (d, 1]. \end{cases}$$

Следовательно, уравнение (12) не является всюду разрешимым.

4. Если $\mathcal{T}^- \in [0, 1]$, $\mathcal{T}^+ \geq 2(1 + \sqrt{1 - \mathcal{T}^-}) \equiv \mathcal{T}^{+*}$, то положим $0 < d < a < 1$ и рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} \frac{\mathcal{T}^{++}+1}{2d}x(d) - \frac{\mathcal{T}^-}{d}x(0), & t \in [0, d], \\ \frac{\mathcal{T}^{++}-1}{2(a-d)}x(0), & t \in (d, a], +p^+(t)x(a), \quad t \in [0, 1], \\ \frac{1}{1-a}x(1), & t \in (a, 1], \end{cases} \quad (13)$$

где $p^+ \in \mathbf{L}[0, 1]$ — такая неотрицательная функция, что

$$\int_0^1 p^+(s) ds = \mathcal{T}^+ - \mathcal{T}^{+*}.$$

Для этого уравнения

$$(T^-x)(t) = \begin{cases} \frac{\mathcal{T}^-}{d}x(0), & t \in (d, 1], \\ 0, & t \in [d, 1], \end{cases}$$

$$(T^+x)(t) = \begin{cases} \frac{\mathcal{T}^{++}+1}{2d}x(d), & t \in [0, d], \\ \frac{\mathcal{T}^{++}-1}{2(a-d)}x(0), & t \in (d, a], +p^+(t)x(a), \quad t \in [0, 1], \\ \frac{1}{1-a}x(1), & t \in (a, 1], \end{cases}$$

таким образом, равенства (5) выполнены. Уравнение (13) имеет два линейно независимых решения

$$x_1(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, a], \\ t - a, & t \in (a, 1]; \end{cases} \quad x_2(t) = \begin{cases} -\frac{\mathcal{T}^{++}-1}{2} + \frac{d-t}{d} \left(\frac{(\mathcal{T}^{++})^2-1}{4} + \mathcal{T}^- \right), & t \in [0, d), \\ \frac{\mathcal{T}^{++}-1}{2(a-d)}(t-a), & t \in [d, a), \\ 0, & t \in [a, 1]. \end{cases}$$

Следовательно, уравнение (13) не является всюду разрешимым.

5. Докажем достаточность условий (6), (7) для всюду разрешимости уравнения (1).

Если $\mathcal{T}^+ < 1$ и $\mathcal{T}^- < 1$, то однозначно разрешима задача Коши (8) [21, теорема 1.3], следовательно, в этом случае уравнение всюду разрешимо.

6. Пусть

$$\mathcal{T}^+ < 1, \quad 1 \leq \mathcal{T}^- < 2 + 2\sqrt{1 - \mathcal{T}^+}, \quad (14)$$

то есть выполнены условия (6). Покажем, что в этом случае или периодическая задача, или задача Коши для уравнения (1) однозначно разрешима, следовательно, по теореме 1 уравнение всюду разрешимо.

Если периодическая задача (10) однозначно разрешима, то уравнение (1) всюду разрешимо. Если задача (10) не является однозначно разрешимой, то существует нетривиальное решение однородной периодической задачи

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (T^+x)(t) - (T^-x)(t), & t \in [0, 1], \\ x(0) = x(1). \end{cases} \quad (15)$$

Лемма 1. Пусть $\|T^+\| = \mathcal{T}^+$, $\|T^-\| = \mathcal{T}^-$ и выполнены условия (14), y — нетривиальное решение периодической задачи (15). Тогда $y(t) \neq 0$ при всех $t \in [0, 1]$.

Доказательство. Функция y удовлетворяет уравнению

$$\dot{y}(t) = p_1(t)y_1 + p_2(t)y_2, \quad t \in [0, 1], \quad (16)$$

где $y_1 = y(t_1)$, $y_2 = y(t_2)$ — точки минимума и максимума соответственно. Без потери общности полагаем, что $t_1 < t_2$, $p_1, p_2 \in \mathbf{L}[0, 1]$,

$$p_1(t) + p_2(t) = p^+(t) - p^-(t), \quad -p^-(t) \leq p_i(t) \leq p^+(t), \quad t \in [0, 1], \quad i = 1, 2,$$

$p^+, p^- \in \mathbf{L}[0, 1]$ — неотрицательные функции, такие, что

$$\int_0^1 p^+(t) dt = \mathcal{T}^+, \quad \int_0^1 p^-(t) dt = \mathcal{T}^-.$$

Из (16) следует, что хотя бы одно из чисел y_1, y_2 отлично от нуля и удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \left(\int_{t_1}^{t_2} p_1(t) dt + 1 \right) y_1 + \left(\int_{t_1}^{t_2} p_2(t) dt - 1 \right) y_2 = 0, \\ \int_0^1 p_1(t) dt y_1 + \int_0^1 p_2(t) dt y_2 = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Так как у этой системы есть нетривиальное решение, то

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \int_{t_1}^{t_2} p_1(t) dt + 1 & \int_{t_1}^{t_2} p_2(t) dt - 1 \\ \int_0^1 p_1(t) dt & \int_0^1 p_2(t) dt \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \int_{t_1}^{t_2} p_1(t) dt + 1 & \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt \\ \int_0^1 p_1(t) dt & \int_0^1 p(t) dt \end{vmatrix} = 0,$$

здесь $p = p^+ - p^-$.

Имеем $\int_{t_1}^{t_2} p_2(t) dt - 1 < 0$, так как $\int_{t_1}^{t_2} p_2(t) dt \leq \int_{t_1}^{t_2} p^+(t) dt \leq \int_0^1 p^+(t) dt = \mathcal{T}^+ < 1$.

Мы покажем, что

$$\int_{t_1}^{t_2} p_1(t) dt + 1 > 0. \quad (18)$$

Тогда решения системы (17) отличны от нуля и имеют один и тот же знак.

Имеем

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \int_{t_1}^{t_2} p_1(t) dt + 1 & \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt \\ \int_0^1 p_1(t) dt + \int_{t_2}^1 p_1(t) dt - 1 & \int_0^1 p(t) dt + \int_{t_2}^1 p(t) dt \end{vmatrix}$$

Введем обозначения

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} p^+(t) dt, \quad Q_2 = \mathcal{T}^+ - Q_1, \quad M_1 = \int_{t_1}^{t_2} p^-(t) dt, \quad M_2 = \mathcal{T}^- - M_1,$$

$$q_1 - m_1 = \int_{t_1}^{t_2} p_1(t) dt, \quad q_2 - m_2 = \int_0^1 p_1(t) dt + \int_{t_2}^1 p_1(t) dt;$$

тогда

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} q_1 - m_1 + 1 & Q_1 - M_1 \\ q_2 - m_2 - 1 & Q_2 - M_2 \end{vmatrix} = 0,$$

где $q_i \in [0, Q_i]$, $m_i \in [0, M_i]$, $i = 1, 2$.

Так как $\mathcal{T}^- \geq 1$, то $\mathcal{T}^+ - \mathcal{T}^- < 0$. Поэтому при $t_1 = t_2$ имеем $\Delta = \mathcal{T}^+ - \mathcal{T}^- < 0$. Таким образом, $\Delta = 0$ при некоторых $t_1 < t_2$ и некоторой функции p_1 только, если $\max_{\substack{-p^- \leq p_1 \leq p^+, \\ 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1}} \Delta \geq 0$.

Вычислим этот максимум.

В случае $Q_1 \geq M_1$, $Q_2 \leq M_2$ имеем $m_1 \leq M_1 \leq Q_1 \mathcal{T}^+ < 1$. Поэтому $q_1 - m_1 + 1 > 0$, то есть неравенство (18) выполнено.

Случай $Q_1 \geq M_1$, $Q_2 \geq M_2$ невозможен, так как $Q_1 + Q_2 = \mathcal{T}^+ < \mathcal{T}^- = M_1 + M_2$.

Если $Q_1 \leq M_1$, $Q_2 \leq M_2$, то максимальное значение Δ по $q_i, m_i, i = 1, 2$ принимается при $q_2 = Q_2, m_2 = 0, q_1 = 0, m_1 = M_1$ и равно $\Delta = \mathcal{T}^+ - \mathcal{T}^- + M_1 M_2 - Q_1 Q_2$. Если $\mathcal{T}^- = M_1 + M_2 \geq 2$, то $\max\{M_1, M_2\} \geq 1 > \mathcal{T}^+$, поэтому $\max(-Q_1 Q_2) = 0$. Таким образом, $\max \Delta \leq \mathcal{T}^+ - \mathcal{T}^- + (\mathcal{T}^-)^2/4$. Это значение неотрицательно при $\mathcal{T}^- \leq 2(1 + \sqrt{1 - \mathcal{T}^+})$, что противоречит условию (14), следовательно, периодическая задача (15) не имеет нетривиального решения. Если же $1 \leq \mathcal{T}^- < 2$ и условие (18) не выполнено, то $M_1 \leq m_1 \leq 1$, поэтому $M_1 M_2 \leq M_1(\mathcal{T}^- M_1) \leq \mathcal{T}^- 1$. Отсюда $\Delta \leq \mathcal{T}^+ - \mathcal{T}^- + M_1 M_2 - Q_1 Q_2 \leq \mathcal{T}^+ - 1 - Q_1 Q_2 < 0$. Следовательно, нетривиального решения задачи (15) не существует.

Остался случай $Q_1 \leq M_1$, $Q_2 \geq M_2$. Тогда $\Delta = (q_1 - m_1 + 1)(Q_2 - M_2) + (M_1 - Q_1)(q_2 - m_2 - 1)$. Таким образом, $\Delta = 0$ при невыполненном условии (18) только при $M_1 = Q_1$, но тогда $P_1 + P_2 \geq M_1 + M_2$, что противоречит условию $\mathcal{T}^+ < \mathcal{T}^-$.

Таким образом, во всех случаях условие (18) выполнено, поэтому минимальное и максимальное значения нетривиального решения (15) отличны от нуля и имеют один и тот же знак. $\square$

Лемма 2. Пусть $\|T^+\| = \mathcal{T}^+$, $\|T^-\| = \mathcal{T}^-$,

$$\mathcal{T}^+ < 1, \quad 1 \leq \mathcal{T}^- < 2 + 2\sqrt{1 - \mathcal{T}^+}, \quad (19)$$

и периодическая задача (10) не является однозначно разрешимой. Тогда задача Коши (8) однозначно разрешима.

Доказательство. Обозначим y — положительное решение задачи (15). Это решение существует по лемме 1. Предположим, что задача (8) не является однозначно разрешимой, обозначим тогда x — нетривиальное решение однородной задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (T^+x)(t) - (T^-x)(t), & t \in [0, 1], \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (20)$$

По лемме 1 $x(1) \neq 0$. Так как x и $-x$ одновременно являются решениями задачи (20), положим $x(1) < 0$.

Очевидно, что существует такое число $\lambda^* > 0$, что

$$\lambda^* y(t) - x(t) \equiv w(t) \geq 0, \quad t \in [0, 1],$$

причем

$$w(1) > w(0) > 0 \quad (21)$$

и функция w — решение задачи

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (T^+x)(t) - (T^-x)(t), & t \in [0, 1], \\ x(d) = 0 \end{cases}$$

при некотором $d \in (0, 1)$.

Пусть $\max_{t \in [0, 1]} w(t) = w(t_2)$. Тогда при некоторой функции $p_2 \in L[0, 1]$, такой, что $-p^-(t) \leq p_2(t) \leq p^+(t)$, $t \in [0, 1]$, где p^- , $p^+ \in L[0, 1]$ — некоторые такие неотрицательные функции, что

$$\int_0^1 p^+(s) ds = \mathcal{T}^+, \quad \int_0^1 p^-(s) ds = \mathcal{T}^-,$$

выполнено равенство

$$\dot{w}(t) = p_2(t)w(t_2), \quad t \in [0, 1]. \quad (22)$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству леммы 1.1 работы [22, с. 4] (см. также доказательство леммы 1 работы [23]).

Имеем

$$w(t_2) = \int_d^{t_2} \dot{w}(s) ds = \int_d^{t_2} p_2(s) ds w(t_2).$$

Так как $w(t_2) > 0$, то отсюда следует, что

$$\int_d^{t_2} p_2(s) ds = 1. \quad (23)$$

Рассмотрим два случая. Если $t_2 > d$, то

$$\int_d^{t_2} p_2(s) ds \leq \int_d^{t_2} p^+(s) ds \leq \int_0^1 p^+(s) ds = \mathcal{T}^+ < 1,$$

что противоречит неравенству (23).

Если $t_2 < d$, то $\int_{t_2}^d p_2(s) ds = -1$. Тогда из равенства (22) и неравенств (21) получаем

$$\int_0^1 \dot{w}(t) dt = \int_0^1 p_2(t) dt w(t_2) = w(1) - w(0) > 0.$$

Следовательно, $\int_0^1 p_2(t) dt > 0$ и

$$\int_0^{t_2} p_2(s) ds + \int_d^1 p_2(s) ds = \frac{w(1) - w(0)}{w(t_2)} + 1 > 1.$$

Таким образом, получаем противоречие

$$1 > \int_0^{t_2} p^+(s) ds + \int_d^1 p^+(s) ds \geq \int_0^{t_2} p_2(s) ds + \int_d^1 p_2(s) ds > 1,$$

которое показывает, что нетривиальных решений однородной задачи Коши (20) не существует. Таким образом, задача Коши (8) однозначно разрешима. $\square$

Итак, если выполнены условия (14), то или периодическая задача или задача Коши является однозначно разрешимой, следовательно, уравнение (1) всюду разрешимо.

7. Пусть выполнены условия

$$\mathcal{T}^- < 1, \quad 1 \leq \mathcal{T}^+ < 2 + 2\sqrt{1 - \mathcal{T}^-}, \quad (24)$$

то есть выполнены условия (7). Тогда с использованием аналогов лемм 1 и 2 показывается, что или периодическая задача, или задача (9) для уравнения (1) однозначно разрешима, следовательно, уравнение всюду разрешимо.

В аналоге леммы 1 условия (14) заменяются на симметричные условия (24).

Лемма 3. Пусть $\|T^+\| = \mathcal{T}^+$, $\|T^-\| = \mathcal{T}^-$, выполнены условия (24), y — нетривиальное решение периодической задачи (15). Тогда $y(t) \neq 0$ при всех $t \in [0, 1]$.

В аналоге леммы 2 условия (19) заменяются на симметричные условия (25), а задача Коши (8) заменяется на задачу (9).

Лемма 4. Пусть $\|T^+\| = \mathcal{T}^+$, $\|T^-\| = \mathcal{T}^-$,

$$\mathcal{T}^- < 1, \quad \mathcal{T}^+ < 2 + 2\sqrt{1 - \mathcal{T}^-}, \quad (25)$$

и существует положительное решение периодической задачи (15). Тогда задача (9) однозначно разрешима.

Список литературы

1. Азбелев, Н.В. Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения / Н.В. Азбелев, В.П. Максимов, П.М. Симонов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2009. — № 1. — С. 3–23.
2. Россовский, Л. Е. Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции / Л. Е. Россовский // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — Т. 54. — С. 3–138.
3. Corduneanu, C. Functional differential equations. Advances and applications / C. Corduneanu, Y. Li, M. Mahdavi. — Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2016. 368 p.
4. Agarwal, R. P., Berezansky L., Braverman E., Domoshnitsky A. I. Nonoscillation theory of functional differential equations with applications / R. P. Agarwal, L. Berezansky, E. Braverman, A. I. Domoshnitsky. — Berlin: Springer, 2012. 520 p.
5. Kolmanovskii, V. Introduction to the theory and applications of functional differential equations / V. Kolmanovskii, A. Myshkis. — Springer Science & Business Media, 2013.
6. Zappala, E. Neural integro-differential equations / E. Zappala, A. Fonseca, A. H. Moberly, M. J. Higley, C. Abdallah, J. A. Cardin, D. van Dijk // Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence. — 2023. — V. 37, № 9. — P. 11104–11112.
7. Максимов, В.П. О представлении решений линейного функционально-дифференциального уравнения / В.П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина // Дифференц. уравнения. — 1973. — Т. 9, № 6. — С. 1026–1036.
8. Максимов, В. П. Линейное функционально-дифференциальное уравнение, разрешенное относительно производной / В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина // Дифференц. уравнения. — 1973. — Т. 9, № 12. — С. 2231–2240.
9. Азбелев, Н.В. О линейном функционально-дифференциальном уравнении эволюционного типа / Н.В. Азбелев, Л. М. Березанский, Л. Ф. Рахматуллина // Дифференц. уравнения. — 1977. — Т. 13, № 11. — С. 1915–1925.
10. Азбелев, Н.В. Функционально-дифференциальные уравнения / Н.В. Азбелев, Л. Ф. Рахматуллина // Дифференц. уравнения. — 1978. — Т. 14, № 5. — С. 771–797.
11. Азбелев, Н.В. Методы современной теории линейных функционально-дифференциальных уравнений / Н.В. Азбелев, В.П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина. — М., Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000. 300 с.
12. Власов, В.В. Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории / В.В. Власов, Д. А. Медведев // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2008. — Т. 30. — С. 3–173.

13. Скубачевский, А. Л. Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения / А. Л. Скубачевский // Успехи математических наук. — 2016. — Т. 71, № 5 (431). — С. 3–112.
14. Azbelev, N. V. Introduction to the theory of functional differential equations: methods and applications / N. V. Azbelev, N. V. Maksimov, L. F. Rakhmatullina. — Hindawi Publishing Corporation, 2007. 318 p.
15. Hakl, R. Some boundary value problems for first order scalar functional differential equations / R. Hakl, A. Lomtatidze, J. Sremr. — Brno, 2002. 299 p.
16. Рахматуллина, Л. Ф. О регуляризации линейных краевых задач / Л. Ф. Рахматуллина // Изв. вузов. Матем. — 1987. — № 7. — С. 37–43.
17. Азбелев, Н. В., Максимов, В. П., Рахматуллина, Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений / Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина. — М: Наука, 1991. 280 с.
18. Рахматуллина, Л. Ф. Обобщенный оператор Грина переопределенной краевой задачи для линейного функционально-дифференциального уравнения / Л. Ф. Рахматуллина // Изв. вузов. Матем. — 1993. — № 5. — С. 95–100.
19. Крейн, С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. — М.: Наука, 1971. 104 с.
20. Bravyi, E. A note on the Fredholm property of boundary value problems for linear functional-differential equations / E. Bravyi // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. — 2000. — V. 20. — P. 133–135.
21. Bravyi, E. Optimal conditions for unique solvability of the Cauchy problem for first order linear functional differential equations / E. Bravyi, R. Hakl, A. Lomtatidze // Czechoslovak Mathematical Journal. — 2002. — V. 52, № 3. — P. 513–530.
22. Бравый, Е. И. Разрешимость краевых задач для линейных функционально-дифференциальных уравнений / Е. И. Бравый. — М., Ижевск: Регулярная и хаотическая механика, 2011. 372 с.
23. Bravyi, E. I. Solvability of the periodic problem for higher-order linear functional differential equations / E. I. Bravyi // Differential Equations. — 2015. — V. 51, № 5. — С. 571–585.

References

1. Azbelev N. V., Maksimov V. P., Simonov P. M. Functional differential equations and their applications. *Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer science*, 2009, no. 1, pp. 3–23.
2. Rossovsky L. E. Elliptic functional differential equations with compression and expansion of arguments of the unknown function. *Modern Mathematics. Fundamental directions*, 2014, vol. 54, pp. 3–138.
3. Corduneanu C., Li Y., Mahdavi M. Functional differential equations. Advances and applications. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2016, 368 p.

4. Agarwal R. P., Berezansky L., Braverman E., Domoshnitsky A. I. Nonoscillation theory of functional differential equations with applications. Berlin: Springer, 2012, 520 p.
5. Kolmanovskii V., Myshkis A. Introduction to the theory and applications of functional differential equations. Springer Science & Business Media, vol. 463, 2013.
6. Zappala E., Fonseca A., Moberly A., Higley M. J., Abdallah C., Cardin J. A., van Dijk D. Neural integro-differential equations. *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 2023, vol. 37, no. 9, pp. 11104–11112.
7. Maksimov V. P., Rakhmatullina L. F. On the representation of solutions of a linear functional-differential equation. *Differential Equations*, 1973, vol. 9, no. 6, pp. 1026–1036.
8. Maksimov V. P., Rakhmatullina L. F. Linear functional-differential equation resolved with respect to the derivative. *Differential Equations*, 1973, vol. 9, No. 12, pp. 2231–2240.
9. Azbelev N. V., Berezanskii L. M., Rakhmatullina L. F. On a linear functional-differential equation of evolutionary type. *Differential Equations*, 1977, vol. 13, No. 11, pp. 1915–1925.
10. Azbelev N. V., Rakhmatullina L. F. Functional-differential equations. *Differential Equations*, 1978, vol. 14, № 5, pp. 771–797.
11. Azbelev N. V., Maksimov V. P., Rakhmatullina L. F. *Methods of Modern Theory of Linear Functional-Differential Equations*, M.-Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2000, 300 p.
12. Vlasov V. V., Medvedev D. A. Functional-Differential Equations in Sobolev Spaces and Related Questions of Spectral Theory. *Modern Mathematics. Fundamental directions*, 2008, vol. 30, pp. 3–173.
13. Skubachevsky A. L. Boundary value problems for elliptic functional-differential equations and their applications. *Advances in Mathematical Sciences*, 2016, vol. 71, no. 5 (431), pp. 3–112.
14. Azbelev N. V., Maksimov V. P., Rakhmatullina L. F. Introduction to the theory of functional differential equations: methods and applications. Hindawi Publishing Corporation, 2007, vol. 3, 318 p.
15. Hakl R., Lomtatidze A., Srem J. *Some boundary value problems for first order scalar functional differential equations*, Brno, 2002, 299 p.
16. Rakhmatullina L. F. On regularization of linear boundary value problems. *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 1987, vol., 31, no. 7, pp. 46–55.
17. Azbelev N. V., Maksimov V. P., Rakhmatullina L. F. *Introduction to the theory of functional-differential equations*, Moscow: Nauka, 1991, 280 p.
18. Rakhmatullina L. F. Generalized Green operator of overdetermined boundary value problem for linear functional-differential equation. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1993, vol. 37, no. 5, pp. 85–89.
19. Krein S. G. *Linear equations in a Banach space*, M: Nauka, 1971, 104 p.
20. Bravyi E. A note on the Fredholm property of boundary value problems for linear functional-differential equations. *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*, 2000, vol. 20, pp. 133–135.

21. Bravyi E., Hakl R., Lomtatidze A. Optimal conditions for unique solvability of the Cauchy problem for first order linear functional differential equations. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 2002. vol. 52, № 3, pp. 513–530.
22. Bravyi E. I. *Solvability of boundary value problems for linear functional-differential equations*, Moscow, Izhevsk: Regular and Chaotic Mechanics, 2011, 372 p.
23. Bravyi E. I. Solvability of the periodic problem for higher-order linear functional differential equations. *Differ. Equations*, 2015, vol. 51, no. 5, pp. 571–585.