

Библиографическое описание согласно ГОСТ Р 7.0.100–2018

Максимов, В. П. Матрица Коши для системы с дробной производной и последствием / В. П. Максимов. – Текст : непосредственный. – DOI 10.15593/2499-9873/2024.3.04 // Прикладная математика и вопросы управления / Applied Mathematics and Control Sciences. – 2024. – № 3. – С. 53–63.



ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
И ВОПРОСЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 3, 2024

<https://ered.pstu.ru/index.php/amcs>



Научная статья

DOI: 10.15593/2499-9873/2024.3.04

УДК 517.929



Матрица Коши для системы с дробной производной и последствием

В.П. Максимов

Пермский государственный национальный исследовательский университет,
Пермь, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 01 сентября 2024
Одобрена: 07 октября 2024
Принята к публикации:
08 ноября 2024

Финансирование

Исследование не имело спонсорской поддержки.

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Вклад автора

100 %.

Ключевые слова:

функционально-дифференциальные уравнения, системы с производными дробного порядка, представление решений.

АННОТАЦИЯ

Изучается система линейных функционально-дифференциальных уравнений с дробной производной и последствием. Исследуется вопрос о представлении решений, доказано существование матрицы Коши как ядра интегрального представления, выведены основные определяющие соотношения для матрицы Коши.

Используется известное определение дробной производной Капуто порядка $\alpha \in (0, 1)$. Исследуемая система включает, кроме производной Капуто, линейный вольтерров оператор общего вида. С помощью оператора дробного интегрирования Римана – Лиувилля исходная система сводится к линейному интегральному уравнению Вольтерра, для которого устанавливаются сходимость ряда Неймана и интегральное представление решения с использованием резольвентного интегрального оператора. Показано, что матрица Коши выражается в явном виде через резольвентное ядро этого оператора. В случае перехода к целому порядку производной полученное определяющее соотношение для матрицы Коши совпадает с известным. Использование матрицы Коши открывает широкие возможности исследования систем с производными дробного порядка в части получения эффективных признаков разрешимости краевых задач, задач управления и описания асимптотического поведения решений подобно тому, как это сделано для широких классов систем с целыми производными.

В основе всех построений – использование основных положений теории абстрактных функционально-дифференциальных уравнений, разработанной руководителями Пермского семинара профессорами Н.В. Азбелевым и Л.Ф. Рахматуллиной.

© Максимов Владимир Петрович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Информационные системы и математические методы в экономике», e-mail: maksimov@econ.psu.ru, ORCID 0000-0002-0051-3696.



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

Perm Polytech Style: Maksimov V.P. The Cauchy matrix of a system with fractional derivative and aftereffect. *Applied Mathematics and Control Sciences*. 2024, no. 3, pp. 53–63. DOI: 10.15593/2499-9873/2024.3.04

MDPI and ACS Style: Maksimov, V.P. The Cauchy matrix of a system with fractional derivative and aftereffect. *Appl. Math. Control Sci.* **2024**, *3*, 53–63. <https://doi.org/10.15593/2499-9873/2024.3.04>

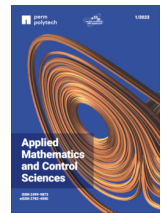
Chicago/Turabian Style: Maksimov, Vladimir P. 2024. “The Cauchy matrix of a system with fractional derivative and aftereffect”. *Appl. Math. Control Sci.* no. 3: 53–63. <https://doi.org/10.15593/2499-9873/2024.3.04>



APPLIED MATHEMATICS
AND CONTROL SCIENCES

№ 3, 2024

<https://ered.pstu.ru/index.php/amcs>



Article

DOI: 10.15593/2499-9873/2024.3.04

UDC 517.929



The Cauchy matrix of a system with fractional derivative and aftereffect

V.P. Maksimov

Perm State University, Perm, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 01 September 2023
Approved: 07 October 2024
Accepted for publication:
08 November 2024

Funding

This research received
no external funding.

Conflicts of Interest

The author declares no conflict
of interest.

Author Contributions

100 %.

Keywords:

functional differential equations,
conditions of everywhere solvability,
positive operators, periodic bounda-
ry value problem, modeling of dy-
namic systems.

ABSTRACT

A system of linear functional differential equations with fractional derivative and aftereffect is considered. The question of the representation of solutions is investigated, the existence of the Cauchy matrix as the kernel of an integral representation is proved, and the main defining relationships for the Cauchy matrix are derived.

The well-known definition of the fractional Caputo derivative of the order $\alpha \in (0, 1)$ is used. The system under study includes, in addition to the Caputo derivative, a linear Volterra operator of a general form. Using the Riemann–Liouville fractional integration operator the initial system is reduced to a linear integral Volterra equation, for which the convergence of the Neumann series and the integral representation of the solution using a resolvent integral operator are established. It is shown that the Cauchy matrix is expressed explicitly through the resolvent kernel of this operator. In the case of a transition to the integer order of the derivative, the obtained defining relationship for the Cauchy matrix coincides with the known one. The use of the Cauchy matrix opens up wide possibilities for the study of fractional systems in terms of obtaining effective conditions of solvability of boundary value problems, control problems and the description of asymptotic behavior of solutions similar to how it is done for wide classes of systems with integer derivatives.

All the constructions are based on the use of the basic statements of the theory of abstract functional differential equations developed by the heads of the Perm seminar, Professors N.V. Azbelev and L.F. Rakhmatullina.

© Vladimir P. Maksimov – DSc of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics, e-mail: maksimov@econ.psu.ru, ORCID: 0000-0002-0051-3696.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

Введение

Работа руководителей Пермского семинара Николая Викторовича Азбелева и Лины Фазыловны Рахматуллиной [1] заложила основы теории абстрактного функционально-дифференциального уравнения (АФДУ), систематическое изложение и некоторые приложения которой представлены в их монографической работе [2]. Объектом теории АФДУ являются уравнения/системы с фазовым пространством $\mathbf{D}$, изоморфным прямому произведению банахова пространства $\mathbf{B}$ и конечномерного пространства $\mathbb{R}^m$ ($\mathbf{D} \simeq \mathbf{B} \times \mathbb{R}^m$). В рамках общей теории АФДУ получены результаты о краевых задачах, задачах управления, вариационных задачах и задачах устойчивости решений. Центральная идея приложений теории АФДУ состоит в рациональном выборе пространства $\mathbf{D}$ для каждого конкретного класса моделей и каждой из упомянутых задач. Такой выбор при наличии общей теории позволяет применять стандартные схемы и теоремы анализа к задачам, исследование которых требовало ранее индивидуального подхода и специальных построений. Значительная свобода выбора пространства $\mathbf{D}$ позволила к настоящему моменту охватить содержательными результатами следующие классы функционально-дифференциальных уравнений с обыкновенными производными целого порядка: системы с последействием, сингулярные системы, системы с импульсным воздействием, гибридные системы [3; 4]. В последние 5–10 лет обращает на себя внимание активный и неослабевающий интерес исследователей к уравнениям с дробными производными, находящим самые разнообразные приложения.

Как отмечено в известном обзоре [5], существует ряд сложных и глубоко проработанных моделей поведения вязкоупругих сред, основанных на использовании дробного исчисления, для которых продемонстрировано более точное соответствие с экспериментом и физическим смыслом по сравнению с моделями, использующими только дифференциальные уравнения целого порядка. В середине XX в. появились публикации, касающиеся вопросов релаксации в диэлектриках и поведения электрохимических сред. Были проведены эксперименты, показавшие наличие феномена памяти в процессах зарядки-разрядки конденсаторов и электрохимических ячеек. В дальнейшем этот подход был успешно применен для построения моделей разных процессов в физике полупроводников, физике плазмы, астрофизике и т. д. Во второй половине XX в. исследователи обратили внимание на возможность использования моделей с дробными производными в теории систем и сигналов. Это касается также микро- и наноструктурированных сред, детерминированных и хаотических процессов в природе и технике. В последнее время появляются работы о применении моделей с дробными производными в задачах экономической динамики [6–8].

Представляется целесообразным развитие теории уравнений с дробными производными на основе теории АФДУ применительно к краевым задачам, задачам управления и задачам устойчивости.

Напомним некоторые факты из теории АФДУ.

Пусть $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ — банаховы пространства, при этом $\mathbf{D}$ изоморфно прямому произведению $\mathbf{B} \times \mathbb{R}^n$ ($\mathbf{D} \simeq \mathbf{B} \times \mathbb{R}^n$). Уравнение

$$\mathcal{L}x = f \quad (1)$$

с линейным ограниченным оператором $\mathcal{L}: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}$ называется линейным абстрактным функционально-дифференциальным уравнением. Теория уравнения (1) систематически изложена в монографиях [2; 3]. Зафиксируем изоморфизм $J = \{\Lambda, Y\}: \mathbf{B} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{D}$ и введем обозначение для обратного оператора $J^{-1} = [\delta, r]$. Здесь $\Lambda: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{D}$, $Y: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{D}$ и $\delta: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}$, $r: \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ — соответствующие компоненты операторов J и J^{-1} :

$$J\{z, \beta\} = \Lambda z + Y\beta \in \mathbf{D}, \quad z \in \mathbf{B}, \quad \beta \in \mathbb{R}^n;$$

$$J^{-1}x = \{\delta x, rx\} \in \mathbf{B} \times \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbf{D}.$$

Система

$$\delta x = z, \quad rx = \beta \quad (2)$$

называется главной краевой задачей. Таким образом, для любого $\{z, \beta\} \in \mathbf{B} \times \mathbb{R}^n$ элемент

$$x = \Lambda z + Y\beta \quad (3)$$

является решением уравнения (2). Равенство (3) приводит к представлению оператора $\mathcal{L}: \mathcal{L}x = \mathcal{L}(\Lambda z + Y\beta) = \mathcal{L}\Lambda z + \mathcal{L}Y\beta = Qz + A\beta$, где так называемая главная часть оператора $\mathcal{L}$, оператор $Q: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ и конечномерный оператор $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{D}$ определены равенствами $Q = \mathcal{L}\Lambda$ и $A = \mathcal{L}Y$. Общая теория уравнения (1) предполагает фредгольмовость оператора Q (т. е. Q — нётеров оператор с нулевым индексом). Общая краевая задача

$$\mathcal{L}x = f, \quad \ell x = \gamma, \quad (4)$$

где $\ell = [\ell^1, \dots, \ell^N]: \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}^N$ — линейный ограниченный вектор-функционал, является центральным объектом исследования в теории АФДУ. В случае, когда $N = n$ и задача (4) однозначно разрешима для любого $\{f, \gamma\} \in \mathbf{B} \times \mathbb{R}^n$, имеет место представление

$$x = Gf + X\gamma, \quad (5)$$

в котором G — оператор Грина, X — фундаментальный вектор уравнения (1).

Приведем в качестве примера конкретной реализации пространства $\mathbf{D}$ пространство $AC_p = AC_p^n[0, T]$ абсолютно непрерывных на конечном отрезке $[0, T]$ функций $x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, имеющих производную из пространства $L_p = L_p^n[0, T]$, $0 \leq p \leq \infty$, со стандартной нормой $\|\cdot\|_{L_p}$. Норма в $AC_p^n[0, T]$ определена равенством $\|x\|_{AC_p} = |x(0)| + \|\dot{x}\|_{L_p}$, где $|\cdot|$ — норма в $\mathbb{R}^n$. Естественный изоморфизм $AC_p^n[0, T] \simeq L_p^n[0, T] \times \mathbb{R}^n$ определяется равенством

$$x(t) = \int_0^t \dot{x}(s) ds + x(0).$$

При этом для равенства $x = \Lambda \delta x + Yrx$ имеем

$$\delta x = \dot{x}, \quad rx = x(0), \quad (\Lambda z)(t) = \int_0^t z(s) ds, \quad Y = E$$

(E — единичная $(n \times n)$ -матрица).

В случае $p = \infty$ в общую схему укладывается случай с другими операторами Λ и δ , охватывающий системы с дробными производными порядка $\alpha \in (0, 1)$, а именно

$$\delta x = \mathcal{D}^\alpha x, \quad \Lambda z = \mathcal{J}^\alpha z,$$

где $\mathcal{D}^\alpha$ — дробная производная Капуто [9; 10]:

$$(\mathcal{D}^\alpha x)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{(t-s)^\alpha} ds,$$

$\mathcal{J}^\alpha$ — оператор дробного интегрирования Римана — Лиувилля [9, 10]:

$$(\mathcal{J}^\alpha z)(t) = (\Lambda z)(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} z(s) ds.$$

Отметим, что название «производная Капуто» распространено в зарубежной литературе, хотя эта дробная производная была введена в работе А. Н. Герасимова [11] на двадцать лет раньше, чем у М. Капуто.

Для широкого класса линейных систем с дробной производной и последствием мы получим представление решения задачи Коши с нулевым начальным состоянием, которая здесь выступает в роли главной краевой задачи, и выведем определяющие соотношения для ядра соответствующего интегрального оператора Коши (оператора Грина задачи Коши), — полного аналога матрицы Коши, подробно изученной для систем с последствием и производной целого порядка [12; 13]. Использование матрицы Коши открывает широкие возможности исследования дробных систем в части получения эффективных признаков разрешимости краевых задач, задач управления и описания асимптотического поведения решений подобно тому, как это сделано для широких классов систем с целыми производными, см., например, [4; 14].

Матрица Коши системы с дробной производной

Рассмотрим линейную систему

$$\mathcal{D}^\alpha x = \mathcal{T}x + f, \quad (6)$$

где $\mathcal{T}: AC_\infty^n[0, T] \rightarrow L_\infty^n[0, T]$ — линейный ограниченный вольтерров оператор, удовлетворяющий условию: существует такое $\rho > 0$, что неравенство

$$|(\mathcal{T}x)(t)| \leq \rho \max_{s \in [0, t]} |x(s)|, \quad t \in [0, T],$$

выполняется для любого $x \in AC_\infty^n[0, T]$. Всюду ниже считаем, что норма $|\cdot|$ в $\mathbb{R}^n$ обладает свойством монотонности: для любых $\alpha = \text{col}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = \text{col}(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$, таких, что $|\alpha_i| \leq |\beta_i|$, $i = 1, \dots, n$, имеем $|\alpha| \leq |\beta|$.

Приведем примеры таких операторов:

$$(\mathcal{T}x)(t) = P(t)x_h(t), \quad h(t) \leq t, \quad (7)$$

где столбцы $(n \times n)$ -матрицы P принадлежат пространству L_∞ ,

$$x_h(t) = \begin{cases} x[h(t)], & t \in [0, T], \\ 0, & t \notin [0, T], \end{cases} \quad (8)$$

функция $h: [0, T] \rightarrow R$ измерима; более общий случай

$$(\mathcal{T}x)(t) = \sum_{i=1}^k P_i(t)x_{h_i}(t), \quad h_i(t) \leq t; \quad (9)$$

и, наконец, интегральный оператор

$$(\mathcal{T}x)(t) = \int_0^t P(t, s) x(s) ds \quad (10)$$

при естественных предположениях относительно ядра $P(t, s)$.

С помощью оператора дробного интегрирования $\mathcal{J}^\alpha: L_\infty^n[0, T] \rightarrow AC_\infty^n[0, T]$, обладающего свойством

$$(\mathcal{J}^\alpha \mathcal{D}^\alpha x)(t) = x(t) - x(0),$$

запишем уравнение (6) в эквивалентной интегральной форме

$$x = \mathcal{J}^\alpha \mathcal{T} x + \mathcal{J}^\alpha f + x(0)$$

и рассмотрим случай $x(0) = 0$:

$$x = \mathcal{J}^\alpha \mathcal{T} x + \mathcal{J}^\alpha f.$$

Подействуем на обе части этого уравнения оператором $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T}x = \mathcal{T} \mathcal{J}^\alpha \mathcal{T} x + \mathcal{T} \mathcal{J}^\alpha f.$$

Обозначив $z = \mathcal{T}x$, получаем для z уравнение

$$z = \mathcal{T} \mathcal{J}^\alpha z + \mathcal{T} \mathcal{J}^\alpha f. \quad (11)$$

Определим оператор $K: L_\infty^n[0, T] \rightarrow L_\infty^n[0, T]$ равенством

$$(Kz)(t) = (\mathcal{T} \mathcal{J}^\alpha z)(t).$$

Лемма. Оператор $I - K$ обратим, при этом обратный оператор $(I - K)^{-1}$ представим в виде суммы ряда Неймана:

$$(I - K)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} K^i.$$

Доказательство. Оценим последовательно образы степеней оператора K . Для первой степени имеем

$$\begin{aligned} |(Kz)(t)| &= |(\mathcal{T} \mathcal{J}^\alpha z)(t)| \leq \rho \max_{s \in [0, t]} \left| \int_0^s \frac{(s - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} z(\tau) d\tau \right| \leq \\ &\leq \rho \max_{s \in [0, t]} \int_0^s \frac{(s - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |z(\tau)| d\tau \leq \rho \int_0^t \frac{(t - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} d\tau \|z\|_\infty \leq \rho \|z\|_\infty (\mathcal{J}^\alpha \mathbf{1})(t). \end{aligned}$$

Здесь и ниже функция $\mathbf{1}(t)$ принимает значение 1 для любого $t \in [0, T]$. Далее для второй степени:

$$\begin{aligned} |(K^2 z)(t)| &= |(\mathcal{T} \mathcal{J}^\alpha \mathcal{T} \mathcal{J}^\alpha z)(t)| \leq \rho \max_{s \in [0, t]} \left| \int_0^s \frac{(s - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{T} \mathcal{J}^\alpha z(\tau) d\tau \right| \leq \\ &\leq \rho \max_{s \in [0, t]} \int_0^s \frac{(s - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |(\mathcal{T} \mathcal{J}^\alpha z)(\tau)| d\tau \leq \\ &\leq \rho^2 \|z\|_\infty \max_{s \in [0, t]} \int_0^s \frac{(s - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (\mathcal{J}^\alpha \mathbf{1})(\tau) d\tau \leq \\ &\leq \rho^2 \|z\|_{L_\infty} (\mathcal{J}^\alpha (\mathcal{J}^\alpha \mathbf{1}))(t) = \rho^2 (\mathcal{J}^{2\alpha} \mathbf{1})(t) \|z\|_{L_\infty}. \end{aligned}$$

В последнем равенстве используется полугрупповое свойство оператора интегрирования $\mathcal{J}^\alpha$: $\mathcal{J}^\alpha \mathcal{J}^\alpha = \mathcal{J}^{2\alpha}$.

Повторяя выкладки, проведенные выше для первой и второй степеней оператора K , по индукции получаем

$$|(K^n z)(t)| \leq \rho^n (\mathcal{J}^{n\alpha} \mathbf{1})(t) \|z\|_{L_\infty}.$$

Отсюда

$$\|K^n\|_{L_\infty \rightarrow L_\infty} \leq \rho^n (\mathcal{J}^{n\alpha} \mathbf{1})(T).$$

Отметим, что

$$(\mathcal{J}^{n\alpha} \mathbf{1})(T) \leq \frac{(T^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha + 1)},$$

и соответствующий степенной ряд сходится для любого T (см. разложение функции Миттаг-Леффлера [15]). В нашем случае это означает сходимость ряда Неймана. $\square$

Ниже всюду предполагается, что оператор K — регулярный интегральный оператор Вольтерра (это так для указанных случаев (7)–(10)):

$$(Kz)(t) = \int_0^t K(t, s) z(s) ds.$$

Замечание. Заметим, что в таком случае интегральным вольтерровым оператором является и резольвентный оператор $R = \sum_{i=1}^{\infty} K^i$ [16, теорема 2.2, с. 119]:

$$(Rf)(t) = \int_0^t R(t, s) f(s) ds$$

с резольвентным ядром $R(t, s)$, дающий представление $(I - K)^{-1} = I + R$.

Теорема 1. Задача Коши для системы (6) с начальным условием $x(0) = 0$ однозначно разрешима при любом $f \in L_\infty^n[0, T]$, и ее решение $x \in AC_\infty^n[0, T]$ представимо в виде

$$x(t) = \int_0^t C(t, s) f(s) ds, \quad t \in [0, T], \quad (12)$$

где матрица Коши $C(t, s)$ определяется равенством

$$C(t, s) = \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E + \int_s^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} R(\tau, s) d\tau, \quad (13)$$

$R(t, s)$ — резольвентное ядро, соответствующее ядру $K(t, s)$ интегрального оператора K , $(Kz)(t) = (\mathcal{T} \mathcal{J}^\alpha z)(t)$.

Доказательство. В силу Леммы решение z -уравнения (11) существует, единственно и имеет представление

$$z = \mathcal{T} \mathcal{J}^\alpha f + R \mathcal{T} \mathcal{J}^\alpha f.$$

Отсюда для решения уравнения (10) (т. е. решения задачи Коши для уравнения (6) с начальным условием $x(0) = 0$) имеем

$$x = \mathcal{J}^\alpha z + \mathcal{J}^\alpha f = \mathcal{J}^\alpha \mathcal{T} \mathcal{J}^\alpha f + \mathcal{J}^\alpha R \mathcal{T} \mathcal{J}^\alpha f + \mathcal{J}^\alpha f = \mathcal{J}^\alpha (K + RK) f + \mathcal{J}^\alpha f.$$

Учитывая известное тождество $K + RK = R$, получаем

$$x(t) = \mathcal{J}^\alpha(f + Rf)(t),$$

или

$$x(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s) ds + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s R(s, \tau) f(\tau) d\tau ds.$$

Отсюда после изменения порядка интегрирования в двойном интеграле получаем

$$x(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s) ds + \int_0^t \int_\tau^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} R(s, \tau) ds f(\tau) d\tau.$$

После вынесения за скобки общего множителя — правой части уравнения (6), приходим к представлению

$$x(t) = \int_0^t \left\{ \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E + \int_s^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} R(\tau, s) d\tau \right\} f(s) ds.$$

Здесь выражение в фигурных скобках совпадает с правой частью равенства (13) и определяет матрицу Коши $C(t, s)$ уравнения (6):

$$C(t, s) = \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E + \int_s^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} R(\tau, s) d\tau. \quad \square$$

Для сравнения напомним, что в случае $\alpha = 1$ выражение для матрицы Коши имеет вид [12]

$$C(t, s) = E + \int_s^t R(\tau, s) d\tau.$$

В заключение отметим, что, используя матрицу Коши, можно получить выражение для фундаментальной матрицы $X(t)$ однородного уравнения (6). Действительно, при $f = 0$ имеем для $x(t)$

$$x(t) = (\mathcal{J}^\alpha \mathcal{T}x)(t) + x(0).$$

При этом z -подстановка $z = \mathcal{T}x$ приводит к уравнению

$$z = \mathcal{T} \mathcal{J}^\alpha z + \mathcal{T} x(0),$$

решение которого имеет вид

$$z = (I + R) \mathcal{T} x(0).$$

Отсюда для x получаем

$$\begin{aligned} x &= \mathcal{J}^\alpha z + x(0) = \mathcal{J}^\alpha \mathcal{T} x(0) + \mathcal{J}^\alpha R \mathcal{T} x(0) + x(0) = \\ &= (\mathcal{J}^\alpha \mathcal{T} E + \mathcal{J}^\alpha R \mathcal{T} E x(0) + E) x(0), \end{aligned}$$

или

$$x(t) = (E + (C \mathcal{T} E)(t)) x(0) = X(t) x(0).$$

Таким образом, фундаментальная матрица для системы (6) имеет вид

$$X(t) = E + \int_0^t C(t, s)(\mathcal{T}E)(s) ds,$$

а абстрактное представление (5) для дробной системы (6) с учетом (12) принимает классический вид

$$x(t) = \int_0^t C(t, s) f(s) ds + X(t)\gamma, \quad t \in [0, T].$$

В случае, когда оператор $\mathcal{T}$ не обладает памятью, $(\mathcal{T}x)(t) = P(t)x(t)$, вопрос о представлении решений системы линейных дифференциальных уравнений с дробной производной исследован в [17].

Список литературы

1. Азбелев, Н. В. Абстрактное функционально-дифференциальное уравнение / Н. В. Азбелев, Л. Ф. Рахматуллина // Функционально-дифференциальные уравнения: межвуз. сб. науч. тр. — 1987. — Пермь: Изд-во Перм. политех. ин-та. — С. 3–11.
2. Azbelev, N. V. Theory of linear abstract functional differential equations and applications / N. V. Azbelev, L. F. Rakhmatullina // Mem. Differential Equations Math. Phys. — 1996. — Vol. 8. — P. 1–102.
3. Азбелев, Н. В. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения / Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина. — М.: Ин-т компьютерн. иссл., 2002. — 384 с.
4. Bravyi, E. I. Some economic dynamics problems for hybrid models with aftereffect / E. I. Bravyi, V. P. Maksimov, P. M. Simonov // Mathematics. — 2020. — Vol. 8, no. 1832. DOI: 10.3390/math8101832.
5. Бутковский, А. Г. Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. II. Дробные динамические системы: моделирование и аппаратная реализация / А. Г. Бутковский, С. С. Постнов, Е. А. Постнова // Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 5. — С. 3–34. DOI: 10.1134/S0005117913050019.
6. Tarasov, V. E. Non-linear macroeconomic models of growth with memory / V. E. Tarasov // Mathematics. — 2020. — Vol. 8. — No. 2078. DOI:10.3390/math8112078.
7. Тарасова, В. В. Неприятие риска для инвесторов с памятью: эредитарные обобщения меры Эрроу — Пратта / В. В. Тарасова, В. Е. Тарасов // Финансовый журнал. — 2017. — № 2. — С. 46–63. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=28966889>.
8. Rahaman, M. Arbitrary-order economic production quantity model with and without deterioration: generalized point of view / M. Rahaman, S. P. Mondal, A. A. Shaikh, A. Ahmadian, N. Senu, S. Salahshour // Advances in Difference Equations. — 2020. — Vol. 16. — P. 1–30. DOI: 10.1186/s13662-019-2465-x.
9. Нахушев, А. И. Элементы дробного исчисления и их приложения / А. И. Нахушев. — Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2000. — 298 с.

10. Kilbas, A. A. Theory and applications of fractional differential equations / A. A. Kilbas, H. H. Srivastava, J. J. Trujillo. — Amsterdam: Elsevier, 2006. — 523 p.
11. Герасимов, А. Н. Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения / А. Н. Герасимов // АН СССР. Прикладная математика и механика. — 1948. — Т. 12. — С. 529–539.
12. Максимов, В. П. О формуле Коши для функционально-дифференциального уравнения / В. П. Максимов // Дифференц. уравнения. — 1977. — Т. 13, № 4. — С. 601–606.
13. Максимов, В. П. Вопросы общей теории функционально-дифференциальных уравнений. Избранные труды / В. П. Максимов. — Пермь: ПГУ, ПСИ, ПССГК, 2003. — 306 с.
14. Сабатулина, Т. Л. Об устойчивости линейного дифференциального уравнения с ограниченным последствием / Т. Л. Сабатулина, В. В. Малыгина // Изв. вузов. Матем. — 2020. — № 4. — С. 25–41. DOI: 10.3103/S1066369X14040045.
15. Gorenflo, R. Mittag-Leffler functions, related topics and applications / R. Gorenflo, A. A. Kilbas, F. Mainardi, S. V. Rogosin. — New York: Springer, 2014. — 540 p. DOI: 10.1007/978-3-662-43930-2.
16. Забрейко, П. П. Интегральные уравнения / П. П. Забрейко, А. И. Кошелев, М. А. Красносельский, С. Г. Михлин, Л. С. Раковщик, В. Я. Стеценко. — М.: Наука, 1968. — 449 с.
17. Gomoyunov, M. I. On representation formulas for solutions of linear differential equations with Caputo fractional derivatives / M. I. Gomoyunov // Fract. Calc. Appl. Anal. — 2020. — Vol. 23, no. 4. — P. 1141–1160. DOI: 10.1515/fca-2020-0058.

References

1. Azbelev N. V., Rakhmatullina L. F. Abstraktnoe funktsional'no-differentsial'noe uravnenie [Abstract functional differential equation]. *Functional Differential Equations: interuniversity collection of scientific papers*, 1987, Perm: Perm Polytechnic Institute, pp. 3–11.
2. Azbelev N. V., Rakhmatullina L. F. Theory of linear abstract functional differential equations and applications. *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, 1996, vol. 8, pp. 1–102.
3. Azbelev N. V., Maksimov V. P., Rakhmatullina L. F. Introduction to the theory of functional differential equations: methods and applications (Contemporary Mathematics and Its Applications Series, 3). New York, Cairo: Hindawi Publishing Corporation, 2007, 324 p.
4. Bravyi E. I., Maksimov V. P., Simonov P. M. Some economic dynamics problems for hybrid models with aftereffect. *Mathematics*, 2020, vol. 8, no. 1832. DOI: 10.3390/math810831.
5. Butkovskii A. G., Postnov S. S., Postnova E. A. Fractional integro-differential calculus and its control-theoretical applications. II. Fractional dynamic systems: Modeling and hardware implementation. *Autom Remote Control*, 2013, vol. 74, pp. 725–749. DOI: 10.1134/S0005117913050019.
6. Tarasov V. E. Non-linear macroeconomic models of growth with memory. *Mathematics*, 2020, vol. 8, no. 2078. DOI: 10.3390/math8112078.

7. Tarasova V.V., Tarasov V.E. Nepriyatie riska dlya investor s pamyat'yu: ereditarnye oboshcheniya mery Errou-Pratta [Risk aversion for investors with memory: hereditary generalizations of Arrow–Pratt measure]. *Financial Journal*, 2017, no. 2, pp. 46–63. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=28966889>.
8. Rahaman M., Mondal S. P., Shaikh A. A. et al. Arbitrary-order economic production quantity model with and without deterioration: generalized point of view. *Advances in Difference Equations*, 2020, vol. 16, pp. 1–30. DOI: 10.1186/s13662-019-2465-x.
9. Nakhushev A.I. Elementy drobnogo ischisleniya i ikh prilogeniya [Elements of fractional calculus and their applications]. Nal'chik, NII PMA KBNC RAN, 2000, 298 p.
10. Kilbas A. A., Srivastava H. H., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006, 523 p.
11. Gerasimov A.N. Obobshchenie lineinykh zakonov deformacii i ikh prilogenie k zadacham vnutrennego treniya [Generalization of linear deformation laws and their application to problems of internal friction]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1948, vol. 12, pp. 529–539.
12. Maksimov V.P. O formule Koshi dlya funkcional'no-differencial'nogo uravneniya [On the Cauchy formula for a functional differential equation]. *Differential Equations*, 1977, vol. 13, no. 4, pp. 601–606.
13. Maksimov V.P. Voprosy obshchei teorii funkcional'no-differencial'nykh uravnenii. Izbrannye trudy [Issues of general theory of functional differential equations. Selected works]. Perm: PSU, PSI, PSSSK, 2003, 306 p.
14. Sabatulina T. L., Malygina V. V. On stability of a differential equation with aftereffect. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2014, vol. 58, no. 4, p. 20–34. DOI: 10.3103/S1066369X14040045.
15. Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F., Rogosin S. V. Mittag–Leffler functions, related topics and applications. New York: Springer, 2014, 540 p. DOI: 10.1007/978-3-662-43930-2.
16. Zabreiko P. P., Koshelev A. I., Krasosel'skii M. A., Mikhlin S. G., Rakovshchik L.S., Stetsenko V.Ya. Integral'nye uravneniya [Integral equations]. Moscow: Nauka, 1968, 449 p.
17. Gomoyunov, M.I. On representation formulas for solutions of linear differential equations with Caputo fractional derivatives. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2020, vol. 23, no. 4, pp. 1141–1160. DOI: 10.1515/fca-2020-0058.