Постаногова, И. Ю. Об обратимости оператора при производной для дифференциального уравнения нейтрального типа / И. Ю. Постаногова // Прикладная математика и вопросы управления. – 2024. – № 3. – С. 73–90. DOI 10.15593/2499-9873/2024.3.06

Библиографическое описание согласно ГОСТ Р 7.0.100–2018
Постаногова, И. Ю. Об обратимости оператора при производной для дифференциального уравнения нейтрального типа / И. Ю. Постаногова. – Текст : непосредственный. – DOI 10.15593/2499-9873/2024.3.06 // Прикладная математика и вопросы управления / Applied Mathematics and Control Sciences. – 2024. – № 3. – С. 73–90.

пермский политех

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ВОПРОСЫ УПРАВЛЕНИЯ
№ 3, 2024
https://ered.pstu.ru/index.php/amcs

Научная статья
DOI: 10.15593/2499-9873/2024.3.06
УДК 517.929

Об обратимости оператора при производной для дифференциального уравнения нейтрального типа

И.Ю. Постаногова

Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Российская Федерация
Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 26 сентября 2024
Одобрена: 07 октября 2024
Принята к публикации: 08 ноября 2024

Финансирование
Исследование не имело спонсорской поддержки.
Конфликт интересов
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.
Вклад автора
100 %.

Ключевые слова:
функционально-дифференциальное уравнение, уравнение нейтрального типа, устойчивость по Ляпунову, экспоненциальная устойчивость, спектр оператора, функция Коши.

АННОТАЦИЯ

Рассматривается функционально-дифференциальное уравнение нейтрального типа с двумя несоизмеримыми запаздываниями при производной и исследуются вопросы его устойчивости, изучается обратимость оператора при производной в лебеговых пространствах L_p и исследуется расположение корней его характеристического уравнения на комплексной плоскости.

Для определения обратимости оператора при производной найден спектр оператора S внутренней суперпозиции, а также дано его описание в терминах коэффициентов исходного уравнения. Полученное описание спектра позволяет сформулировать условия, при которых обратим оператор при производной. В свою очередь, обратимость оператора при производной даёт возможность найти критерии экспоненциальной устойчивости и неустойчивости.

Установлена связь между значениями коэффициентов оператора S, типом устойчивости исходного уравнения, обратимостью оператора $I-S$ в любом из лебеговых функциональных пространств и расположением корней характеристического уравнения.

Показано, что наличие корней характеристического уравнения справа от мнимой оси равносильно неустойчивости уравнения нейтрального типа и необратимости оператора при производной. Если же все корни характеристического уравнения лежат слева от мнимой оси и отделены от неё, то оператор при производной обратим, а уравнение нейтрального типа экспоненциально устойчиво. Эти условия оказались эффективно проверяемыми в терминах коэффициентов исходного уравнения.

Был также описан «критический» случай, при котором корни характеристического уравнения лежат слева от мнимой оси, но не отделены от неё, то есть существует вертикальная цепь корней, приближающаяся к мнимой оси на сколь угодно близкое расстояние. В этом случае оператор при производной необратим, а уравнение нейтрального типа не может быть экспоненциально устойчивым.

© **Постаногова Ирина Юрьевна** – ассистент института компьютерных наук и технологий ПГНИУ, аспирант кафедры «Вычислительная математика, механика и биомеханика» ПНИПУ, e-mail: ipostanogova@psu.ru, ORCID: 0009-0003-7014-2426.

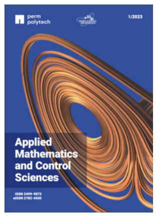
Perm Polytech Style: Postanogova I.Yu. On invertibility of the operator at a derivative in the neutral type differential equation with two incommensurable delays. *Applied Mathematics and Control Sciences.* 2024, no. 3, pp. 73–90. DOI: 10.15593/2499-9873/2024.3.06

MDPI and ACS Style: Postanogova, I.Yu. On invertibility of the operator at a derivative in the neutral type differential equation with two incommensurable delays. *Appl. Math. Control Sci.* **2024, 3**, 73–90. https://doi.org/10.15593/2499-9873/2024.3.06

Chicago/Turabian Style: Postanogova, Irina Yu. 2024. "On invertibility of the operator at a derivative in the neutral type differential equation with two incommensurable delays". *Appl. Math. Control Sci.* no. 3: 73–90. https://doi.org/10.15593/2499-9873/2024.3.06

perm polytech

APPLIED MATHEMATICS
AND CONTROL SCIENCES
№ 3, 2024
https://ered.pstu.ru/index.php/amcs



Article
DOI: 10.15593/2499-9873/2024.3.06
UDC 517.929

On invertibility of the operator at a derivative in the neutral type differential equation with two incommensurable delays

I.Yu. Postanogova

Perm State University, Perm, Russian Federation
Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 26 September 2023
Approved: 07 October 2024
Accepted for publication: 08 November 2024

Funding
This research received no external funding.

Conflicts of Interest
The author declares no conflict of interest.

Author Contributions
100 %.

Keywords:
difference equations, exponential stability, uniform stability, *D*-decomposition.

ABSTRACT

This article considers a neutral type functional differential equation with two incommensurable delays at the derivative, with focusing on stability issues. The invertibility of the operator at the derivative in Lebesgue spaces L_p is investigated, and the location of the roots of its characteristic equation on the complex plane is analyzed.

To study the invertibility of the operator at the derivative, the spectrum of the internal superposition operator S is defined, and its description is provided in terms of coefficients of the original equation. The resulting description of the spectrum allows formulating the conditions under which the operator at the derivative is invertible. Further, the invertibility of this operator facilitates the identification of criteria for exponential stability and instability.

A connection between the coefficients of the operator S, the type of stability of the original equation, and the invertibility of the operator $I-S$ in arbitrary Lebesgue functional space, as well as the location of roots of the characteristic equation, is established.

It has been demonstrated that the presence of roots of the characteristic equation to the right of the imaginary axis is equivalent to the instability of the original neutral type equation and the non-invertibility of the operator at the derivative. Conversely, if all the roots of the characteristic equation are located to the left of the imaginary axis and are separated from it, then the operator at the derivative is invertible, and the neutral type equation is exponentially stable. These conditions have been shown to be effectively verifiable in terms of the coefficients of the original equation.

A "critical" case has also been described, when the roots of the characteristic equation lie to the left of the imaginary axis but are not separated from it; specifically, a vertical chain of roots approaches arbitrarily close to the imaginary axis. In this scenario, it is established that the operator at the derivative is non-invertible, and the neutral type equation cannot be exponentially stable.

© **Irina Yu. Postanogova** – Teaching Assistant of Institute of Computer Science and Technologies at PSU; Ph. D. Student of the Department of Computational Mathematics, Mechanics and Biomechanics at PNRPU; e-mail: ipostanogova@psu.ru, ORCID: 0009-0003-7014-2426.

Введение

Рассматривается автономное функционально-дифференциальное уравнение нейтрального типа с двумя линейно независимыми сосредоточенными запаздываниями при производной и ограниченным запаздыванием произвольного вида при неизвестной функции. В этой работе продолжаются и углубляются исследования, начатые в [1–3]. Наша работа опирается на результаты и следует традициям научной школы Н. В. Азбелева [4]. Уравнение записывается в операторной форме, начальные условия считаются частью внешнего возмущения, а общий вид решения записывается с помощью формулы Коши, содержащей интегральный оператор, ядром которого является функция Коши. Эта функция содержит в себе всю информацию о решении уравнения, в том числе о его асимптотических свойствах, поэтому является центральным объектом при изучении устойчивости функционально-дифференциальных уравнений.

Как показано в [1], задача об экспоненциальной устойчивости линейного автономного дифференциального уравнения нейтрального типа сводится к двум задачам: об обратимости оператора при производной $I - S$ в пространствах суммируемых функций $L_p(\mathbb{R}_+)$ и расположении нулей характеристического уравнения на комплексной плоскости. А именно для нулей характеристического уравнения необходимо установить, будут ли все они лежать слева от мнимой оси, и если да, то будет ли мнимая ось их точной границей.

Ситуация, когда оператор при производной представляет собой линейную комбинацию операторов сдвига на кратные величины, достаточно хорошо изучена. В [2] показано, что вопрос об обратимости оператора $I - S$ сводится к нахождению корней многочлена, число корней характеристического уравнения всегда конечно и существуют эффективные методы, позволяющие исследовать их расположение относительно мнимой оси. Среди них — методы Шура — Кона [5; 6] и Джури [7].

Картина резко и качественно меняется, когда запаздывания при производной становятся несоизмеримыми. Теперь характеристическое уравнение представляет собой квазиполином, число корней которого бесконечно, и, кроме того, появляются бесконечные почти вертикальные цепи корней. Поэтому возможна ситуация, когда все корни характеристического уравнения лежат слева от мнимой оси, но не отделены от неё [3; 8]. В этой работе рассматривается уравнение с двумя несоизмеримыми запаздываниями. Для ответа на вопрос об обратимости оператора $I - S$ исследуется спектр оператора S, а для характеристического уравнения определяется точная правая граница корней. Записав спектр оператора S и определив положение точной правой границы корней в терминах коэффициентов исходного уравнения нейтрального типа, можно сделать выводы об асимптотическом поведении решений этого уравнения.

1. Обозначения

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных, $\mathbb{Z}$ — целых, $\mathbb{Q}$ — рациональных, $\mathbb{R}$ — вещественных, $\mathbb{C}$ — комплексных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $L_p(E)$, $1 \le p < \infty$, — лебегово пространство суммируемых со степенью p функций, заданных на множестве E, $L_\infty(E)$ — пространство ограниченных в существенном на E функций. Нормы в пространствах $L_p(E)$, $1 \le p \le \infty$, задаются естественным образом. Если $E = \mathbb{R}_+$, то для сокращения записи будем опускать этот параметр и записывать просто L_p. Характеристическая функция множества M обозначается $\chi_M(t)$ и равна 1, если $t \in M$, и 0 в противном случае.

2. Постановка задачи

Рассмотрим записанное в операторном виде [4] функционально-дифференциальное уравнение нейтрального типа:

$$(I - S)\,\dot{x}(t) = Tx(t) + f(t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где

$$(Sy)(t) = \sum_{k=1}^{K} a_k\,(S_{h_k}y)\,(t), \quad (Ty)(t) = \int\limits_0^{\omega} (S_{\xi}y)\,(t)\,dr(\xi);$$
$$(S_h y)(t) = \begin{cases} y(t-h), & t \geq h; \\ 0, & t < h; \end{cases}$$

$\omega \in \mathbb{R}_+$, функция $r\colon [0,\omega] \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию, интеграл понимается в смысле Римана — Стилтьеса, функция $f(t)$ суммируема на каждом конечном отрезке.

Операторы S_h будем называть *операторами сдвига*, а S — *оператором внутренней суперпозиции*. Как известно [4], в этих предположениях уравнение (1) с заданными начальными условиями однозначно разрешимо в классе абсолютно непрерывных на каждом конечном отрезке функций и его решение представляется в виде формулы Коши:

$$x(t) = X(t)x(0) + \int\limits_0^t Y(t-s)\,f(s)\,ds, \tag{2}$$

где $X\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — *фундаментальное решение*, а $Y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — *функция Коши* уравнения (1).

При изучении асимптотических свойств уравнения (1) важную роль играет обратимость оператора $I - S$ в лебеговых пространствах заданных на полуоси функций.

Обозначим через

$$g(p) = p\left(1 - \sum_{k=1}^{K} a_k e^{-h_k p}\right) - \int\limits_0^{\omega} e^{-p\xi}\,dr(\xi), \quad p \in \mathbb{C},$$

характеристическую функцию уравнения (1).

Предложение 1 [1, теорема 1]. *Функция Коши уравнения* (1) *имеет оценку*

$$|Y(t)| \leq Me^{-\gamma t}, \quad M, \gamma > 0, \tag{3}$$

тогда и только тогда, когда оператор $I - S$ *имеет обратный в пространстве* L_p, $1 \leq p \leq \infty$, *и все нули функции* g *лежат слева от мнимой оси.*

Обратим внимание, что в этой теореме условие обратимости оператора при производной не накладывается априори, как это делают большинство авторов, изучающих уравнение нейтрального типа [9–11], а появляется как необходимое условие экспоненциальной устойчивости. Кроме того, здесь для проверки экспоненциальной устойчивости не требуется проверка условия отделённости нулей функции g от мнимой оси, что, как правило, очень трудоёмко.

Замечание 1. В работе [12, следствие 2.2.12] показано, что обратимость оператора $I - S$ хотя бы при одном p, $1 \le p \le \infty$, эквивалентна его обратимости при всех p. Поэтому для того, чтобы доказать справедливость экспоненциальной оценки (3) для функции Коши, достаточно проверить расположение нулей функции g и обратимость оператора $I-S$ в *одном* из пространств L_p. Обратно, если для функции Коши верна оценка (3), отсюда следует обратимость оператора $I - S$ в пространствах L_p *при любом* p.

3. Уравнения с двумя несоизмеримыми запаздываниями

Известно [1; 2], что задача об обратимости оператора $I-S$ в случае кратных запаздываний сводится к исследованию корней многочлена. Несоизмеримость же запаздываний при производной качественно меняет картину, значительно усложняя исследование. Даже для случая двух несоизмеримых слагаемых задача оказывается содержательной.

Пусть дано уравнение нейтрального типа с двумя несоизмеримыми запаздываниями (1), где

$$S = aS_1 + bS_\alpha, \quad \alpha > 1, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Характеристическая функция уравнения (1) задаётся формулой [1; 2]:

$$g(p) = p(1 - g_S(p)) - g_T(p), \quad p \in \mathbb{C},$$

где

$$g_S(p) = ae^{-p} + be^{-\alpha p},$$

$$g_T(p) = \int_0^\omega e^{-p\xi}\, dr(\xi).$$

Обратимость оператора $I - S$ зависит от расположения корней уравнения $1 - g_S(p) = 0$ на комплексной плоскости. Назовём это уравнение *характеристическим*. В данном случае оно выглядит следующим образом:

$$1 - ae^{-p} - be^{-\alpha p} = 0. \tag{4}$$

Такие уравнения изучались в работах [1; 2; 13]. Показано, что в случае кратных показателей экспонент множество всех корней уравнения (4) представляет собой объединение конечного числа строго вертикальных цепей. Если показатели несоизмеримы, корни этого уравнения распределены в некоторой вертикальной полосе в комплексной плоскости или двух таких полосах таким образом, что их вещественные части лежат всюду плотно на некотором отрезке или объединении двух отрезков [13]. Следовательно, возможны ситуации, когда существует почти вертикальная цепь корней, бесконечно приближающаяся к мнимой оси. В [1] показано, что для обратимости оператора $I - S$ оказывается существенным условие отделённости корней уравнения (4) от мнимой оси.

Исследуем, как расположены корни уравнения (4) относительно мнимой оси, а именно:

1. При каких условиях на коэффициенты a и b все корни лежат слева от мнимой оси?
2. Является ли мнимая ось точной границей корней, или корни уравнения (4) отделены от неё?

Получив ответы на эти вопросы, мы сможем сделать выводы об устойчивости уравнения нейтрального типа (1).

4. Расположение корней характеристического уравнения на комплексной плоскости

Введем вспомогательные функции

$$g_1(p) = |a|e^{-p} + |b|e^{-\alpha p}, \quad p \in \mathbb{C};$$
$$g_2(\xi) = |a|e^{-\xi} + |b|e^{-\alpha\xi}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Они получены из $g_S(p)$ заменой всех коэффициентов их абсолютными значениями и отличаются друг от друга областью определения. Заметим, что функция $g_2(\xi)$ непрерывна при всех $\xi \in \mathbb{R}$, причём $\lim\limits_{\xi\to-\infty} g_2(\xi) = +\infty$, $\lim_{\xi\to+\infty} g_2(\xi) = 0$, а $g_3'(\xi) < 0$ при всех $\xi \in \mathbb{R}$. Следовательно, уравнение $1 - g_2(\xi) = 0$ имеет на вещественной оси ровно один корень. Обозначим его ξ_0. Поскольку $g_2(0) = |a| + |b|$, то

1) $\xi_0 > 0$, если и только если $|a| + |b| > 1$;
2) $\xi_0 = 0$, если и только если $|a| + |b| = 1$;
3) $\xi_0 < 0$, если и только если $|a| + |b| < 1$.

Примеры графиков функции $1 - g_2(\xi)$ приведены на рис. 1. Следующие утверждения (леммы 1–2 и теоремы 1–3) верны для более общего случая — когда коэффициенты a, b являются комплексными числами.

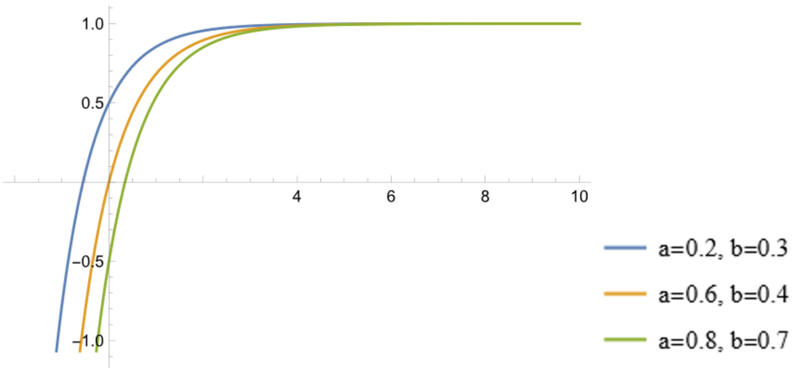


Рис. 1. Примеры графиков функции $1 - g_2(\xi)$ для $\alpha = \sqrt{2}$ и некоторых значений a и b

Лемма 1. *Уравнение* (4) *не имеет корней справа от прямой* $\operatorname{Re} p = \xi_0$.

Доказательство. Покажем, что

$$|1 - g_s(p)| \geq |1 - g_2(\operatorname{Re} p)|.$$

Действительно, применяя обратное неравенство треугольника, получаем

$$|1 - g_s(p)| = \left|1 - |a|e^{-i\operatorname{Arg} a - p} - |b|e^{-i\operatorname{Arg} b - \alpha p}\right| \geq \left|1 - |a|\left|e^{-i\operatorname{Arg} a - p}\right| - |b|\left|e^{-i\operatorname{Arg} a - \alpha p}\right|\right| =$$
$$= \left|1 - |a|e^{\operatorname{Re} p} - |b|e^{\alpha \operatorname{Re} p}\right| = |1 - g_2(\operatorname{Re} p)|.$$

Значит, при $\operatorname{Re} p > \xi_0$ функция $1 - g_s(p)$ не имеет нулей. □

Для доказательства следующей леммы нам потребуется одно из следствий теоремы Кронекера [14, с. 41–44].

Определение 1. Числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ называются линейно независимыми (относительно целых чисел), если равенство $l_1\lambda_1 + l_2\lambda_2 + \ldots + l_n\lambda_n = 0$ возможно лишь в том случае, когда $l_1 = l_2 = \ldots = l_n = 0$.

В частности, два числа 1 и α линейно независимы, если α иррационально.

Предложение 2. *Пусть числа* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *линейно независимы, и* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ *— произвольные действительные числа. Тогда система неравенств*

$$|\lambda_k t - \theta_k| < \delta \pmod{2\pi}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

разрешима при любом $\delta > 0$*, причём существуют сколь угодно большие решения* t*.*

Систему (5) можно записать в эквивалентном виде:

$$\left|e^{-i\lambda_k t} - e^{-i\theta_k}\right| < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{6}$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольное число.

Покажем, что системы неравенств (5) и (6) действительно эквиваленты. При любом $k = 1, 2, \ldots, n$ для левой части системы (6) имеем:

$$\left|e^{-i\lambda_k t} - e^{-i\theta_k}\right| = \sqrt{(\cos\lambda_k t - \cos\theta_k)^2 + (\sin\lambda_k t - \sin\theta_k)^2} = \sqrt{2 - 2\cos(\lambda_k t - \theta_k)} < \varepsilon,$$

или

$$\cos(\lambda_k t - \theta_k) > 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Отсюда

$$-\arccos\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) + 2\pi n < \lambda_k t - \theta_k < \arccos\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Так как число $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\arccos\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right)$ — тоже произвольно малое положительное число. Поэтому можно обозначить $\delta = \arccos\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right)$, и тогда разрешимость системы (6) при произвольном $\varepsilon > 0$ будет эквивалентна разрешимости системы (5) при любом $\delta > 0$. $\square$

Теперь мы можем переформулировать предложение 2 в более удобной для нас форме.

Предложение 3. *Пусть числа* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *линейно независимы и* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ *— произвольные действительные числа. Тогда система неравенств* (6) *разрешима при любом* $\varepsilon > 0$*, причём у неё существуют сколь угодно большие решения.*

Вернемся к уравнению (4). В нем $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, т. е. условия предложения 3 выполнены.

Лемма 2. *Существует последовательность корней уравнения* (4) $p_k = \xi_k + i\eta_k$ *такая, что* $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_k = \xi_0$*, а* $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\eta_k\right| = \infty$*.*

Доказательство. Функция $g_1(p)$ аналитическая, поэтому её нули изолированы. Следовательно, найдётся такое число $\varepsilon > 0$, что в круге $|z| < \varepsilon$ функция

$$1 - g_1(\xi_0 + z)$$

имеет единственный нуль $z = 0$, а на его границе — окружности $|z| = \varepsilon$ будет выполнено неравенство

$$|1 - g_1(\xi_0 + z)| \geq \mu > 0.$$

Заметим, что при $|z| \leq \varepsilon$ функция $g_1(\xi_0 + z)$ ограничена. Действительно,

$$|g_1(\xi_0 + z)| \leq |a|e^{-\xi_0}\left|e^{-z}\right| + |b|e^{-\alpha\xi_0}\left|e^{-\alpha z}\right| \leq |a|e^{\varepsilon-\xi_0} + |b|e^{\alpha(\varepsilon-\xi_0)} = M.$$

Выберем $\delta < \min\left(\frac{\mu}{2M}, 1\right)$. По следствию из теоремы Кронекера (предложение 3) при любом $\delta > 0$ система неравенств

$$\begin{cases} \left|e^{-iy} - e^{-i\operatorname{Arg} a}\right| < \delta, \\ \left|e^{-i\alpha y} - e^{-i\operatorname{Arg} b}\right| < \delta \end{cases}$$

имеет последовательность решений $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, где y_k — сколь угодно большие числа.

Положим $p_k = \xi_0 + iy_k$ и рассмотрим функцию

$$1 - g_s(p_k + z) = (1 - g_1(\xi_0 + z)) + (g_1(\xi_0 + z) - g_s(p_k + z)), \ z \in \mathbb{C}.$$

При $|z| \leq \varepsilon$ имеем

$$\begin{aligned} |1 - g_1(\xi_0 + z)| &\geq \mu; \\ |g_1(\xi_0 + z) - g_s(p_k + z)| &= |a|\, e^{-(\xi_0+z)}e^{i\operatorname{Arg} a}\left(e^{-i\operatorname{Arg} a} - e^{-iy_k}\right) + \\ &+ |b|\, e^{-\alpha(\xi_0+z)}e^{i\operatorname{Arg} b}\left(e^{-i\operatorname{Arg} b} - e^{-i\alpha y_k}\right)| \leq \\ &\leq |a|\, e^{-\xi_0}\left|e^{-z}\right|\left|e^{-i\operatorname{Arg} a} - e^{-iy_k}\right| + |b|e^{-\alpha\xi_0}\left|e^{-\alpha z}\right|\left|e^{-i\operatorname{Arg} b} - e^{-i\alpha y_k}\right| \\ &< |g_1(\xi_0 + z)|\,\delta = M\delta < \frac{\mu}{2}. \end{aligned}$$

Итак, на границе круга $|z| = \varepsilon$ выполнено неравенство

$$|g_1(\xi_0 + z) - g_s(p_k + z)| < \mu \leq |1 - g_1(\xi_0 + z)|,$$

следовательно, по теореме Руше функции $1 - g_1(\xi_0 + z)$ и $g_1(\xi_0 + z) - g_s(p_k + z)$ в круге $|z| < \varepsilon$ имеют одинаковое количество нулей (то есть один). Это значит, что во всех кругах $|p_k - z| < \varepsilon$ при $k \in \mathbb{N}$ существуют точки, где $1 - g_s(z) = 0$. □

Замечание 2. В доказательстве леммы 1 не существенна линейная независимость запаздываний. Поэтому ξ_0 будет правой границей корней характеристического уравнения и в случае кратных запаздываний, однако тогда эта граница не будет точной.

Мы показали, что прямая $\operatorname{Re} z = \xi_0$ является точной правой границей корней уравнения (4), причём эта прямая лежит справа от мнимой оси, если $|a|+|b| > 1$, слева, если $|a|+|b| < 1$, и совпадает с мнимой осью, если $|a| + |b| = 1$. Таким образом,

- если $|a| + |b| < 1$, то все корни уравнения (4) лежат слева от мнимой оси и отделены от неё;
- если $|a| + |b| = 1$, то либо у уравнения (4) есть корни на мнимой оси, либо все корни слева от мнимой оси, но не отделены от нее;
- если $|a| + |b| > 1$, то у уравнения (4) существует бесконечное множество корней справа от мнимой оси.

5. Спектр оператора S

Доказанные утверждения о расположении корней уравнения (4) относительно мнимой оси позволяют дать описание спектра оператора S.

Теорема 1 (о спектре оператора S). *Спектр оператора S представляет собой круг*

$$\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \le |a| + |b|\}.$$

Первое доказательство теоремы 1. Пусть $\lambda \neq 0$. Рассмотрим оператор

$$\lambda I - S = \lambda\left(I - \frac{a}{\lambda}S_1 - \frac{b}{\lambda}S_\alpha\right).$$

Нетрудно видеть, что $\|S\| = |a + b| \le |a| + |b|$.

Если $|\lambda| > |a| + |b|$, то оператор обратим, так как

$$\left\|\frac{S}{\lambda}\right\| \le \frac{|a| + |b|}{|\lambda|} < 1.$$

Пусть теперь $|\lambda| < |a| + |b|$. Тогда в силу лемм 1 и 2 можно утверждать, что у уравнения $\frac{a}{\lambda}e^{-p} + \frac{b}{\lambda}e^{-p\alpha} = 1$ существуют корни, лежащие справа от мнимой оси. Обозначим один из них p_0 и возьмём $e^{p_0 t}$ в качестве начальной функции в уравнении

$$y(t) - \frac{a}{\lambda}y(t-1) - \frac{b}{\lambda}y(t-\alpha) = 0 \tag{7}$$

или, в операторном виде,

$$(I - S)(y) = 0.$$

Очевидно, функция $y = e^{p_0 t}$ является решением уравнения (7) на полуоси $t \ge 0$. В этом уравнении правая часть $f(t) \equiv 0$ является элементом пространства L_1, а найденное решение $y \notin L_1$. Следовательно, оператор $I - \frac{a}{\lambda}S_1 - \frac{b}{\lambda}S_\alpha$ не обратим в пространстве L_1, а число λ, удовлетворяющее неравенству $0 < |\lambda| < |a| + |b|$, является точкой спектра. Но спектр — замкнутое множество, следовательно, и граница $|\lambda| = |a| + |b|$, и точка $\lambda = 0$ также принадлежат спектру. Все точки, лежащие вне замкнутого круга, как было показано выше, регулярные. □

Приведём ещё одно, более конструктивное доказательство этой теоремы. Для него нам потребуется исследовать поведение последовательности $C^n_{n+m}a^n b^m$, где $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Лемма 3. *Если $|a|+|b| > 1$, то последовательность $H(n,m) = C^n_{n+m}|a|^n|b|^m$ не ограничена.*

Доказательство. Очевидно, что если хотя бы один из коэффициентов a, b по модулю больше единицы, то последовательность $H(n,m)$ содержит бесконечно большую подпоследовательность $H(n,0)$ или $H(0,m)$.

Пусть $|a| < 1$ и $|b| < 1$, но $|a| + |b| > 1$. Рассмотрим подпоследовательность $H(n, kn)$, $k \in \mathbb{N}$:

$$H(n, kn) = C^n_{n+nk}a^n b^{kn} = \frac{((k+1)n)!}{n!(kn)!}a^n b^{kn}.$$

Воспользуемся формулой Стирлинга для оценки асимптотических свойств этой последовательности:

$$H^{*}(n)=H(n,kn)\sim\sqrt{\frac{k+1}{2\pi k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\left(\frac{(k+1)^{(k+1)}\cdot ab^{k}}{k^{k}}\right)^{n}.$$

Здесь символом $\sim$ обозначено асимптотическое равенство функций, то есть $f(n)\sim g(n)$, если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=1$. Исследуем поведение последовательности $H^{*}(n)$ при $n\to\infty$. Оно зависит от выражения в скобках. Обозначим

$$F_{k}\left(a,b\right)=\left|\frac{(k+1)^{k+1}\,ab^{k}}{k^{k}}\right|.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}|H(n,kn)|=\begin{cases}0, & F_{k}(a,b)\leq 1;\\ +\infty, & F_{k}(a,b)>1.\end{cases}$$

Исследуем функцию

$$f(x)=\left|\frac{(x+1)^{x+1}ab^{x}}{x^{x}}\right|,\quad x\in\mathbb{R},$$

рассматривая a и b как параметры из промежутка $(-1,1)$. Стандартными методами можно установить, что $f(x)$ имеет единственный максимум в точке

$$x_{0}=\frac{|b|}{1-|b|}.$$

При этом значение функции в этой точке равно

$$f_{max}=\frac{|a|}{1-|b|}.$$

Если $|a|+|b|>1$, то $f_{max}>1$, и из непрерывности $f(x)$ следует, что $f(x)>1$ в некоторой окрестности точки x_0. Выберем в этой окрестности рациональное число $\frac{p}{q}$. Тогда

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=\left|\frac{\left(\frac{p}{q}+1\right)^{\frac{p}{q}+1}ab^{\frac{p}{q}}}{\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{q}}}\right|=\left|\frac{(p+q)^{p+q}a^{q}b^{p}}{p^{p}q^{q}}\right|^{\frac{1}{q}}>1.$$

Следовательно,

$$r=\frac{(p+q)^{p+q}a^{q}b^{p}}{p^{p}q^{q}}>1.$$

Рассмотрим подпоследовательность $H(qn,pn)$ последовательности $H(n,m)$, $n\in\mathbb{N}_0$, и оценим её элементы, используя формулу Стирлинга:

$$H(qn,pn)=C_{qn+pn}^{qn}a^{qn}b^{pn}\sim\sqrt{\frac{p+q}{2\pi pq}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\left(\frac{(p+q)^{p+q}a^{q}b^{p}}{p^{p}q^{q}}\right)^{n}=\sqrt{\frac{p+q}{2\pi pq}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot r^{n}\to+\infty.$$

Итак, если $|a|+|b|>1$, то в последовательности $H(n,m)=C_{n+m}^{n}|a|^{n}|b|^{m}$ можно найти бесконечно большую подпоследовательность, следовательно, $H\left(n,m\right)$ не ограничена. □

Лемма 4. *Функция $y(t)$, задаваемая формулами*

$$y(t)=\begin{cases}C_{n+m}^{n}a^{n}b^{m}, & t=n+m\alpha;\\ 0, & t\neq n+m\alpha;\end{cases}$$

где $n,m\in\mathbb{N}_0$, является решением разностного уравнения

$$y(t) - ay(t-1) - by(t-\alpha) = 0 \tag{8}$$

с начальными условиями $y(0) = 1,\ y(t) = 0,\ t < 0.$

Доказательство. Очевидно, что уравнение (8) имеет ровно одно решение. Если $t = n + m\alpha\ (n, m \in \mathbb{N})$, то

$$\begin{aligned} ay(t-1) + by(t-\alpha) &= ay((n-1) + m\alpha) + by(n + (m-1)\alpha) = \\ &= a \cdot C_{(n-1)+m}^{n-1} a^{n-1} b^m + b \cdot C_{n+(m-1)}^{n} a^n b^{m-1} = \\ &= \left(C_{n+m-1}^{n-1} + C_{n+m-1}^{n}\right) a^n b^m = C_{n+m}^{n} a^n b^m. \end{aligned}$$

При $t = n,\ n \in \mathbb{N}$ (учитывая, что $y(t-\alpha) = 0$)):

$$ay(t-1) + by(t-\alpha) = ay(n-1) = a \cdot a^{n-1} = a^n = y(t);$$

аналогично при $t = m\alpha$, $m \in \mathbb{N}$, имеем $y(t) = b^m = by(t-\alpha)$ (так как $ay(t-1) = 0$).

Если же t не представляется в виде $n + m\alpha$, то $y(t-1) = 0$ и $y(t-\alpha) = 0$, следовательно, и $y(t) = 0$. □

Второе доказательство теоремы 1. Пусть $0 < |\lambda| < |a| + |b|$. Рассмотрим уравнение (7). Если в качестве начальных условий выбрать $y(0) = 1$, $y(t) = 0$, $t < 0$, то согласно лемме 4 его решением будет функция, равная в точках $t = n + m\alpha$ $(n, m \in \mathbb{N}_0)$ величине

$$|y(n + m\alpha)| = C_{n+m}^{n} \left|\frac{a}{\lambda}\right|^n \left|\frac{b}{\lambda}\right|^m.$$

Поскольку

$$\left|\frac{a}{\lambda}\right| + \left|\frac{b}{\lambda}\right| = \frac{|a| + |b|}{|\lambda|} > 1,$$

то из леммы 3 следует, что $y(t)$ не ограничена. Итак, так же, как и в первом доказательстве, мы построили неограниченное решение уравнения (7), откуда следует, что $\lambda \in \sigma(S)$, если $0 < |\lambda| < |a| + |b|$. Из замкнутости спектра следует, что $\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \le |a| + |b|\}$. □

6. Основные результаты

Сформулируем полученные результаты в виде теорем. Напомним, что все корни уравнения (4) лежат слева от некоторой прямой $\operatorname{Re} z = \xi_0$, причём эта прямая является их точной границей.

Теорема 2. *Следующие утверждения эквивалентны.*

1. $|a| + |b| < 1$.
2. *Оператор* $I - S$ *обратим в* L_p *при* $1 \le p \le \infty$.
3. *Все корни уравнения* (4) *лежат слева от мнимой оси и отделены от неё.*
4. $\xi_0 < 0$.

Теорема 3. *Следующие утверждения эквивалентны.*

1. $|a| + |b| \ge 1$.
2. *Оператор* $I - S$ *не обратим в* L_p *при* $1 \le p \le \infty$.
3. *Либо у уравнения* (4) *есть корни справа или на мнимой оси, либо все корни слева от мнимой оси, но не отделены от нее.*
4. $\xi_0 \ge 0$.

Замечание 3. Из неравенства $|a| + |b| < 1$ вытекает обратимость $I - S$ в любом из пространств L_p без дополнительных предположений об α, но в случае $\alpha \in \mathbb{Q}$ это условие не является необходимым.

Сопоставляя теорему 2 с предложением 1, можно получить необходимое условие экспоненциальной устойчивости.

Следствие 1. *Если уравнение* (1) *экспоненциально устойчиво, то* $|a| + |b| < 1$.

В теореме 3 интересно разделить случаи $|a| + |b| > 1$ и $|a| + |b| = 1$.

Теорема 4. *Если* $|a| + |b| > 1$*, то справедливы следующие утверждения.*

1. *Оператор* $I - S$ *не обратим в* L_p *при* $1 \leq p \leq \infty$.
2. *Уравнение* (4) *имеет бесконечное количество корней справа от мнимой оси.*
3. $\xi_0 > 0$ — *точная граница корней уравнения* (4).

Отсюда можно вывести, что исходное уравнение нейтрального типа (1) не будет даже равномерно устойчивым. Докажем этот факт.

Теорема 5. *Если* $|a| + |b| > 1$*, то уравнение* (1) *неустойчиво.*

Доказательство. В этом случае из теоремы 4 следует, что уравнение (4) имеет корень r_0 с положительной действительной частью. Тогда, как показано в [1, сл. 2], существует последовательность $\{p_k\}$ нулей функции $g(p)$ таких, что $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{Re} p_k = \operatorname{Re} r_0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{Im} p_k = \infty$. Это значит, что существует нуль p_0 функции $g(p)$, лежащий справа от мнимой оси.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{y}(t) - a\dot{y}(t-1) - b\dot{y}(t-\alpha) = \int\limits_0^{\omega} y(t-\xi)\, dr(\xi), \tag{9}$$

в котором доопределим решение начальными условиями $\varphi(\xi) = e^{p_0\xi}$, $\psi(\xi) = \dot{\varphi}(\xi)$, $\xi \in [-\omega, 0]$. Его можно привести к неоднородному уравнению (1), где

$$f(t) = (T\varphi - (I-S)\,T\psi)\,(t) =$$
$$= a\psi(t-1)\chi_{(-\infty,1)}(t) + b\psi(t-\alpha)\chi_{(-\infty,\alpha)}(t) + \int\limits_0^{t} \varphi(t-\xi)\chi_{(-\infty,\xi)}(t)\, dr(\xi).$$

С помощью непосредственной подстановки можно убедиться, что уравнение (9) с такими начальными условиями имеет неограниченное решение $y(t) = e^{p_0 t}$.

Очевидно, что $f_1(t) \in L_p$ при любом p $(1 \leq p \leq \infty)$. Если бы уравнение (9) было равномерно устойчивым, то по определению равномерной устойчивости его функция Коши была бы ограниченной: $|Y(t)| \leq K_1$, а как известно из [1], $X = (I - S)Y$, так что фундаментальное решение тоже было бы ограниченным $|X(t)| \leq K_2$. Но тогда из формулы (2) следовало бы, что

$$|x(t)| = \left| X(t)x(0) + \int\limits_0^t Y(t-s)f_1(s)\, ds \right| \leq K_1|x(0)| + K_2 \int\limits_0^t |f_1(s)|\, ds \leq K_3,$$

что противоречит неограниченности $x(t)$. Следовательно, уравнение (9), а значит, и (1) неустойчиво. □

Если $|a| + |b| = 1$, то все корни уравнения (4) лежат слева от мнимой оси и мнимая ось является их точной границей. Исследуем вопрос, есть ли у этого уравнения корни на мнимой оси. Предположим, что это так и уравнение (4) имеет корень, лежащий на мнимой оси. Подставим $p_0 = i\varphi$ в уравнение (4) и отделим действительную и мнимую части. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} a\cos\varphi + b\cos\alpha\varphi = 1; \\ a\sin\varphi + b\sin\alpha\varphi = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Возведём оба уравнения в квадрат и сложим:

$$a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha - 1)\varphi = 1;$$
$$ab\cos(\alpha - 1)\varphi = \frac{1}{2}\left(1 - a^2 - b^2\right).$$

Учитывая, что $|a| + |b| = 1$, имеем:

$$ab\cos(\alpha - 1)\varphi = \frac{1}{2}(1 - a^2 - (1 - |a|)^2 = |a|(1 - |a|) = |a|\,|b|. \tag{11}$$

Рассмотрим различные случаи, соответствующие разным комбинациям знаков чисел a и b. Если a и b — числа одного знака, то из (11) получаем

$$\cos(\alpha - 1)\varphi = 1,$$

или

$$\varphi_m = \frac{2\pi m}{\alpha - 1}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Подставим это значение во второе уравнение системы (10):

$$a\sin\varphi_m + b\sin\alpha\varphi_m = a\sin\frac{2\pi m}{\alpha - 1} + b\sin\left(\frac{2\pi m}{\alpha - 1} + 2\pi m\right) = (a + b)\sin\frac{2\pi m}{\alpha - 1} = 0.$$

Числа a и b имеют один знак, поэтому $a + b \neq 0$, следовательно, это равенство возможно лишь в случае, если

$$\sin\frac{2\pi m}{\alpha - 1} = 0.$$

Но из несоизмеримости чисел m и α следует, что это равенство верно, только если $m = 0$. Очевидно, что значение $\varphi = 0$ является решением системы (10) только в случае $a > 0$, $b > 0$. Итак, если $|a| + |b| = 1$ и $a, b > 0$, характеристическое уравнение (4) имеет единственный корень на мнимой оси: $p = 0$. Если же $|a| + |b| = 1$, но $a, b < 0$, то у этого уравнения корней на мнимой оси нет.

Пусть теперь a и b имеют разные знаки. Тогда из (11) получаем

$$\cos(\alpha - 1)\varphi = -1,$$

или

$$\varphi_m = \frac{(2m + 1)\pi}{\alpha - 1}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Подставляя это значение во второе уравнение системы (10), получаем

$$a\sin\varphi_m + b\sin\alpha\varphi_m = a\sin\frac{(2m+1)\pi}{\alpha-1} + b\sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{\alpha-1} + (2m+1)\pi\right) =$$
$$= (a-b)\sin\frac{(2m+1)\pi}{\alpha-1} = 0.$$

Это равенство невозможно ни при каком целом m, так как $a-b \neq 0$, а α иррационально. Следовательно, если a и b имеют разные знаки, характеристическое уравнение (4) не имеет корней на мнимой оси.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 6. *Пусть* $|a|+|b|=1$. *Тогда:*

1. *Если* $a>0$ *и* $b>0$, *то характеристическое уравнение* (4) *имеет ровно один корень* $p=0$ *на мнимой оси.*
2. *Если хотя бы одно из чисел* a, b *отрицательно, уравнение* (4) *не имеет корней на мнимой оси.*
3. *Все ненулевые корни уравнения* (4) *лежат слева от мнимой оси.*
4. *Мнимая ось является точной границей корней уравнения* (4).

Следствие 2. *Если* $a>0$ *и* $b>0$, *то на прямой* $\mathrm{Re}\,z=\xi_0$ *лежит ровно один корень характеристического уравнения* (4): $p=\xi_0$. *Если хотя бы одно из чисел* a, b *отрицательно, то на прямой* $\mathrm{Re}\,z=\xi_0$ *нет корней характеристического уравнения.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $|a|+|b|\neq 1$. Выполнив в уравнении (4) замену переменных $p=\mu-\xi_0$, получаем:

$$1-(ae^{-\xi_0})e^{-\mu}-\left(be^{-\alpha\xi_0}\right)e^{-\alpha\mu}=0,$$

где сумма модулей коэффициентов равна единице, так как ξ_0 является корнем уравнения $1-g_s(\xi)=0$. Остается применить теорему 6. □

Сопоставляя теорему 6 с предложением 1, получим следующий факт.

Следствие 3. *Если* $|a|+|b|=1$, *то уравнение* (1) *не будет экспоненциально устойчивым.*

Замечание 4. Будет ли при $|a|+|b|=1$ равномерная устойчивость или асимптотическая, не совпадающая с экспоненциальной, — открытый вопрос. Напомним, что в случае соизмеримых запаздываний, если функция Коши стремится к нулю, то только по экспоненциальному закону. Отдельные решения (например, фундаментальное) могут стремиться к нулю и не по экспоненте.

Замечание 5. Если запаздывания соизмеримы, то характеристическое уравнение (4) может иметь неограниченно много корней на мнимой оси. При этом можно подобрать пример, когда эти корни не будут равны по модулю $2\pi ni$.

Пример 1. Рассмотрим уравнение $1-ae^{-mp}-(1-a)e^{-2mp}=0$, где $a\in(0,1)$, $m\in\mathbb{N}$, $m>1$. Заменой $z=e^{-p}$ оно приводится к виду $1-az^m-(1-a)z^{2m}=0$, откуда находим:

1) $z=\sqrt[m]{-1}=\cos\frac{\pi(1+2k)}{m}+i\sin\frac{\pi(1+2k)}{m}$, $k\in\{0,1,\ldots,m-1\}$ (корни, равные 1 по модулю);

2) $z=\sqrt[m]{\frac{1}{1-a}}$ (корни, не равные 1 по модулю).

Выполняя обратную замену, получаем, что корни, равные 1 по модулю, переходят в бесконечное множество корней на мнимой оси:

$$p = \frac{\pi(1+2k)}{m}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Следствие 4. *Если* $|a| + |b| = 1$ *и квазиполином* $1 - ae^{-p} - be^{-\alpha p} = 0$ *имеет на мнимой оси ненулевой корень, то* $\alpha \in \mathbb{Q}$.

7. Уравнения с $K > 2$ запаздываниями

В случае, если запаздываний больше двух и среди них есть несоизмеримые, ситуация усложняется. Например, возможны случаи, когда сумма модулей коэффициентов характеристического уравнения равна или даже больше 1, но корни отделены от мнимой оси.

Пример 2. Пусть оператор S задан формулой

$$S = \frac{1}{2}S_1 + \frac{1}{3}S_{\sqrt{2}} - \frac{1}{6}S_{1+\sqrt{2}}.$$

Для него все запаздывания попарно несоизмеримы (но линейно зависимы) и сумма модулей коэффициентов равна $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$. Его характеристическое уравнение:

$$1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda} - \frac{1}{3}e^{-\sqrt{2}\lambda} + \frac{1}{6}e^{-(1+\sqrt{2})\lambda} = 0.$$

Решение этого уравнения легко найти, так как левая часть раскладывается на множители:

$$\left(1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda}\right)\left(1 - \frac{1}{3}e^{-\sqrt{2}\lambda}\right) = 0,$$

откуда находим

$$p = -\ln 2 + 2\pi n i; \quad p = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\ln 3 + 2\pi n i), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 3. Аналогично для уравнения

$$\left(1 - \frac{2}{3}e^{-\lambda}\right)\left(1 - \frac{3}{4}e^{-\sqrt{2}\lambda}\right) = 0,$$

сумма модулей коэффициентов которого больше 1, находим

$$p = -\ln 2 + 2\pi n i; \quad p = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\ln 3 + 2\pi n i), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

В обоих случаях корни характеристического уравнения лежат слева от мнимой оси и отделены от неё, что было бы невозможно в случае двух запаздываний.

Заключение

Были исследованы критерии обратимости оператора $I - S$ при производной в автономном дифференциальном уравнении нейтрального типа в функциональных пространствах L_p. Найден общий вид спектра оператора S и определено расположение корней характеристического уравнения на комплексной плоскости для случая двух несоизмеримых запаздываний. Это позволяет сформулировать признаки устойчивости уравнения в терминах его коэффициентов. Итак,

1. Если $|a| + |b| < 1$, то оператор $I - S$ обратим, необходимое условие экспоненциальной устойчивости выполнено, при этом обратимость оператора запрещает асимптотическую устойчивость, не совпадающую с экспоненциальной.
2. Если $|a| + |b| > 1$, то уравнение 1 неустойчиво (даже по Ляпунову).
3. Если $|a| + |b| = 1$, то уравнение 1 не является экспоненциально устойчивым.

Может ли в последнем случае быть асимптотическая устойчивость, отличная от экспоненциальной? Для случая кратных запаздываний ответ известен — не может [15; 16], причём соизмеримость запаздываний в слагаемых без производной несущественна, они могут быть и сосредоточенными, и распределёнными. Для несоизмеримых же запаздываний — эта возможность не исключена, но вопрос пока открыт.

Список литературы

1. Баландин, А. С. Экспоненциальная устойчивость автономных дифференциальных уравнений нейтрального типа. I / А. С. Баландин // Изв. вузов. Матем. — 2023. — № 3. — С. 12–28.

2. Баландин, А. С. Экспоненциальная устойчивость автономных дифференциальных уравнений нейтрального типа. II / А. С. Баландин // Изв. вузов. Матем. — 2023. — № 4. — С. 3–14.

3. Чистяков, А. В. К вопросу о множестве корней квазиполинома с несоизмеримыми показателями / А. В. Чистяков // Краевые задачи: межвуз. сб. науч. тр. — Пермь: Перм. политехн. ин-т, 1986. — С. 32–36.

4. Азбелев, Н. В. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений / Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина. — М.: Наука, 1991. — 280 с.

5. Schur, I. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitkreises beschränkt sind / I. Schur // J. Reine Angew. Math. — 1918. — № 148. — S. 122–145.

6. Cohn, A. Über die Anzahl der Wurzein einer algebraische Gleichung in einem Kreise / A. Cohn // Math. Zeit. — 1922. — № 14. — S. 111–148.

7. Джури, Э. Инноры и устойчивость динамических систем / Э. Джури. — М.: Наука, 1979. — 300 с.

8. Беллман, Р. Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К. Л. Кук. — М.: Мир, 1967. — 548 с.

9. Колмановский, В. Б. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием / В. Б. Колмановский, В. Р. Носов. — М.: Наука, 1981. — 441 с.

10. Agarwal, R.P. Nonoscillation theory of functional differential equations with applications / R. P. Agarwal, L. Berezansky, E. Braverman, A. Domoshnitsky. — New York: Springer-Verlag, 2012. — 520 p.

11. Хейл, Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений / Дж. Хейл. — М.: Мир, 1984. — 424 с.

12. Курбатов, В. Г. Линейные дифференциально-разностные уравнения / В. Г. Курбатов. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1990. — 168 с.

13. Симонов, П. М. Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных систем / П. М. Симонов, А. В. Чистяков // Изв. вузов. Матем. — 1997. — С. 37–49.

14. Левитан, Б. М. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения / Б. М. Левитан, В. В. Жиков. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. — 205 с.

15. Малыгина, В. В. Об асимптотических свойствах функции Коши автономного функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа / В. В. Малыгина, К. М. Чудинов // Прикладная математика и вопросы управления. — 2020. — № 3. — С. 7–31.

16. Постаногова, И. Ю. Об асимптотических свойствах функции Коши автономного функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа с распределённым запаздыванием / И. Ю. Постаногова // Прикладная математика и вопросы управления. — 2024. — № 1. — С. 8–28.

References

1. Balandin A. S. Exponential stability of autonomous differential equations of neutral type. I. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2023, vol. 67, no. 3, pp. 9–22. DOI: 10.3103/S1066369X23030027.

2. Balandin A. S. Exponential stability of autonomous differential equations of neutral type. II. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2023, vol. 67, no. 4, pp. 1–10. DOI: 10.3103/S1066369X23040011.

3. Chistyakov A. V. K voprosu o mnozhestve kornej kvazipolinoma s nesoizmerimymi pokazatelyami [On the question of the set of roots of a quasi-polynomial with incommensurable exponents]. *Boundary Value Problems: interuniversity collection of scientific papers*, Perm: Perm Polytechnic Institute, 1986, pp. 32–36.

4. Azbelev N. V., Maksimov V. P., and Rahmatullina L. F. Introduction to the Theory of Functional Differential Equations (Advanced Series in Mathematical Science and Engineering, 3). Atlanta: World Federation Pub. Inc., 1995, 172 p.

5. Schur I. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitkreises beschränkt sind. *J. Reine Angew. Math.*, 1918, No. 148, pp. 122–145.

6. Cohn A. Über die Anzahl der Wurzein einer algebraische Gleichung in einem Kreise. *Math. Zeit.*, 1922, No. 14, pp. 111–148.

7. Jury E. I. Inners and stability of dynamic systems. New York: Wiley Interscience, 1976, 168 p.

8. Bellman R. and Cooke K. L. *Differential-Difference Equations*. London: Academic Press, 1963, 548 p.

9. Kolmanovskiy V. B. and Nosov V. R. Ustojchivost’ i periodicheskie rezhimy reguliruemyh sistem s posledejstviem [Stability and periodic modes of adjustable systems with aftereffect]. Moscow: Nauka, 1981, 441 p.

10. Agarwal R. P., Berezansky L., Braverman E. and Domoshnitsky A. Nonoscillation theory of functional differential equations with applications. New York: Springer-Verlag, 2012, 520 p.

11. Hale J. Theory of Functional Differential Equations. New York, Springer-Verlag, 1977, 424 p.

12. Kurbatov V. G. Linejnye differencial’no-raznostnye uravneniya [Linear differential-difference equations]. Voronezh: Izdatel’stvo Voronezhskogo Universiteta, 1990, 168 p.

13. Simonov P. M. and Chistyakov A. V. On exponential stability of linear difference-differential systems. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1997, vol. 41, no. 6, pp. 34–45.

14. Levitan B. M., Zhikov V. V. Pochti-periodicheskie funkcii i differencial’nye uravneniya [Almost periodic functions and differential equations]. Moscow: Izdatel’stvo Moskovskogo Universiteta, 1978, 205 p.

15. Malygina V. V. and Chudinov K. M. On asymptotic properties of the Cauchy function for autonomous functional differential equation of neutral type. *Appl. Math. Control Sci.*, 2020, No. 3, pp. 7–31.

16. Postanogova I. Yu. On asymptotic properties of the Cauchy function for autonomous functional differential equation of neutral type with distributed delay. *Appl. Math. Control Sci.*, 2024, No. 1, pp. 8–28.