

Румянцев, А. Н. К конструктивному исследованию асимптотических свойств одного класса дифференциальных уравнений с запаздыванием и периодическими параметрами / А. Н. Румянцев // Прикладная математика и вопросы управления. – 2024. – № 3. – С. 91–98. DOI 10.15593/2499-9873/2024.3.07

Библиографическое описание согласно ГОСТ Р 7.0.100–2018

Румянцев, А. Н. К конструктивному исследованию асимптотических свойств одного класса дифференциальных уравнений с запаздыванием и периодическими параметрами / А. Н. Румянцев. – Текст : непосредственный. – DOI 10.15593/2499-9873/2024.3.07 // Прикладная математика и вопросы управления / Applied Mathematics and Control Sciences. – 2024. – № 3. – С. 91–98.



ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
И ВОПРОСЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 3, 2024

<https://ered.pstu.ru/index.php/amcs>



Научная статья

DOI: 10.15593/2499-9873/2024.3.07

УДК 517.929, 517.925



К конструктивному исследованию асимптотических свойств одного класса дифференциальных уравнений с запаздыванием и периодическими параметрами

А.Н. Румянцев

Пермский государственный национальный исследовательский университет,
Пермь, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 25 сентября 2024
Одобрена: 03 октября 2024
Принята к публикации:
08 ноября 2024

Финансирование

Исследование не имело спонсорской поддержки.

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Вклад автора

100 %.

Ключевые слова:

стабилизируемость решения задачи Коши к периодической функции, дифференциальное уравнение с запаздыванием и периодическими параметрами, кусочно-линейное запаздывание, конструктивный подход, матрица Коши.

АННОТАЦИЯ

Рассматривается конструктивное исследование стабилизируемости решения задачи Коши к периодической функции для системы дифференциальных уравнений с запаздыванием и периодическими параметрами. Полученные в работе результаты естественным образом продолжают исследования в этой области (см., например, работы Ж.С.П. Мунембе). Предлагаемый метод исследования основан на использовании матрицы Коши рассматриваемой системы. Знание матрицы Коши позволяет построить некоторую вспомогательную числовую матрицу и свести задачу к оценке спектрального радиуса этой матрицы. Выполнение условия, что спектральный радиус указанной матрицы меньше единицы гарантирует наличие свойства стабилизируемости к периодической функции.

Источником эффективной реализации предложенного метода исследования рассматриваемой задачи является возможность точного построения матрицы Коши системы дифференциальных уравнений с кусочно-линейным запаздыванием на основе подхода, предложенного автором.

В качестве иллюстрации в статье рассмотрен один пример задачи Коши для дифференциального уравнения с кусочно-линейным запаздыванием и периодическими параметрами. Для заданного уравнения с использованием программных средств точных вычислений построена функция Коши, а также доказано, что решение задачи Коши обладает свойством стабилизируемости к периодической функции.

© Румянцев Александр Николаевич – доктор физико-математических наук, e-mail: arymyanzev@gmail.com, ORCID: 0009-0001-2610-3441.



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

Perm Polytech Style: Rumyantsev A.N. To constructive study of asymptotic properties of the delay differential equation with periodic parameters. *Applied Mathematics and Control Sciences*. 2024, no. 3, pp. 91–98. DOI: 10.15593/2499-9873/2024.3.07

MDPI and ACS Style: Rumyantsev, A.N. To constructive study of asymptotic properties of the delay differential equation with periodic parameters. *Appl. Math. Control Sci.* **2024**, **3**, 91–98. <https://doi.org/10.15593/2499-9873/2024.3.07>

Chicago/Turabian Style: Rumyantsev, Aleksandr N. 2024. “To constructive study of asymptotic properties of the delay differential equation with periodic parameters”. *Appl. Math. Control Sci.* no. 3: 91–98. <https://doi.org/10.15593/2499-9873/2024.3.07>



APPLIED MATHEMATICS
AND CONTROL SCIENCES

№ 3, 2024

<https://ered.pstu.ru/index.php/amcs>



Article

DOI: 10.15593/2499-9873/2024.3.07

UDC 517.929, 517.925



To constructive study of asymptotic properties of the delay differential equation with periodic parameters

A.N. Rumyantsev

Perm State University, Perm, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 25 September 2023
Approved: 03 October 2024
Accepted for publication:
08 November 2024

Funding

This research received
no external funding.

Conflicts of Interest

The author declares no conflict
of interest.

Author Contributions

100 %.

Keywords:

stabilizability of the solution of the
Cauchy problem, differential equation
with delay and periodic parameters,
piecewise linear delay, constructive
approach, Cauchy matrix.

ABSTRACT

The article is devoted to the constructive study of the stabilizability of the solution of the Cauchy problem to a periodic function for system of differential equations with delay and periodic parameters. The results obtained in this paper are natural continuation of research in this area (see, for example, the works of J.S.P. Munembe). The proposed research method is based on the use of the Cauchy matrix of the system under consideration. Knowledge of the Cauchy matrix allows us to construct an auxiliary numerical matrix and reduce the problem to estimating the spectral radius of this matrix. Fulfillment of the condition that spectral radius of the specified matrix is less than one guarantees the presence of the stabilizability property.

The source of the effective implementation of the proposed method for studying the problem under consideration is the possibility of accurately constructing the Cauchy matrix of a differential equation with piecewise linear delay based on the approach proposed by the author.

As an illustration, the article considers an example of the Cauchy problem for a differential equation with piecewise linear delay and periodic parameters. For a given equation, the Cauchy function is constructed using precision computing software, and it is also proved that the solution of the Cauchy problem has the property of stabilizability to a periodic function.

© Aleksandr N. Rumyantsev – DSc of Physical and Mathematical Sciences, e-mail: arymyanzev@gmail.com, ORCID: 0009-0001-2610-3441.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

Введение

Проведено конструктивное исследование стабилизируемости решения задачи Коши к периодической функции для системы дифференциальных уравнений с запаздыванием и периодическими параметрами.

Полученные в работе результаты естественным образом продолжают исследования в этой области (см., например, [1]). Предлагаемый метод исследования основан на использовании матрицы Коши рассматриваемой системы. Знание матрицы Коши позволяет построить некоторую вспомогательную числовую матрицу и свести задачу к оценке спектрального радиуса этой матрицы. Выполнение условия, что спектральный радиус указанной матрицы меньше единицы, гарантирует наличие свойства стабилизируемости.

Очевидно, эффективность проверки условий конкретного асимптотического поведения, сформулированных в терминах матрицы Коши (см., например, [2–4]), существенно зависит от полноты доступной информации о ней. Для решения этой проблемы автором был предложен подход [5], предоставляющий возможность точного построения матрицы Коши для системы дифференциальных уравнений с кусочно-линейным запаздыванием.

В силу ограниченности размера статьи в качестве иллюстрации рассмотрен пример задачи Коши для скалярного дифференциального уравнения с кусочно-линейным запаздыванием и периодическими параметрами. Для заданного уравнения с использованием программных средств точных вычислений построена функция Коши, а также доказано, что решение задачи Коши обладает свойством стабилизируемости к периодической функции.

Содержание статьи следующее. В разделе 1 приводятся постановка задачи и описание метода исследования. В разделе 2 для выбранного примера построена функция Коши, а также приведены результаты численного эксперимента.

1. Постановка задачи

Следуя [1], будем рассматривать задачу Коши для системы функционально-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + P(t)x[h(t)] &= f(t), \quad t \in [0, \infty); \\ x(\xi) &= 0, \quad \xi < 0; \\ x(0) &= \alpha \in \mathbb{R}^n; \end{aligned} \tag{1}$$

в предположении, что столбцы $n \times n$ -матрицы $P: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ и функция $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ являются T -периодическими и суммируемыми на периоде, запаздывание $h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ измеримо, $h(t + T) = h(t) + T$, $T > 0$.

Определение. Будем говорить, что решение $x(t, \alpha)$ задачи (1) стабилизируется к T -периодической функции $y: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, если

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \max_{t \in [(v-1)T, vT]} \|x(t, \alpha) - y(t)\|_{\mathbb{R}^n} = 0.$$

Приведем один способ проверки наличия свойства стабилизируемости функции $x(t, \alpha)$ [6, с. 255–256]. Обозначим через $C(t, s)$ матрицу Коши системы

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + P(t)x[h(t)] &= f(t), \quad t \in [0, T], \\ x(\xi) &= 0, \quad \xi < 0. \end{aligned}$$

Пусть $h(t) \equiv c \in (-T, 0)$ на множестве $\mathcal{H} = \{t \in [0, T] : h(t) \notin [0, T]\}$, $d = c + T$. Обозначим $\mathcal{D}(t) = \int_0^t C(t, s) P(s) \chi_{\mathcal{H}}(s) ds$, где $\chi_{\mathcal{H}}$ есть характеристическая функция множества $\mathcal{H}$.

Определим $2n \times 2n$ матрицу $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} C(T, 0) & \mathcal{D}(T) \\ C(d, 0) & \mathcal{D}(d) \end{pmatrix}.$$

Функция $x(t, \alpha)$ обладает свойством стабилизируемости к периодической функции, если спектральный радиус $\rho(\mathcal{F})$ матрицы $\mathcal{F}$ меньше единицы. В свою очередь, условие $\rho(\mathcal{F}) < 1$ выполняется, если $\max |\lambda_i| < 1$, $i = 1, \dots, n$, где λ_i суть корни характеристического уравнения матрицы $\mathcal{F}$

$$g(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0.$$

Для проверки условия $\max |\lambda_i| < 1$, $i = 1, \dots, n$ можно воспользоваться способом, изложенным в [7]. В частности, для $n = 2$ условие $|\lambda_i| < 1$ выполнено, если справедливы неравенства

$$\begin{aligned} 1 + a_1 + a_0 &> 0, \\ 1 - a_1 + a_0 &> 0, \\ 1 - a_0 &> 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Отметим, что ключевым фактором в успешном применении предлагаемого подхода к исследованию является точное построение матрицы Коши $C(t, s)$.

2. Конструктивное исследование

В этом разделе приводится пример эффективной реализации предложенного выше способа исследования наличия свойства стабилизируемости решения $x(t, \alpha)$ задачи Коши (1) к периодической функции. Ввиду ограниченности объема статьи (комментарий см. ниже) был подготовлен иллюстрирующий пример для скалярного уравнения с кусочно-линейным запаздыванием, который, однако, в должной степени демонстрирует возможности предлагаемого метода исследования.

Рассматривается задача Коши

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + p(t)x[h(t)] &= f(t), \quad t \in [0, \infty); \\ x(\xi) &= 0, \quad \xi < 0, \\ x(0) &= \alpha; \end{aligned} \tag{3}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ — T -периодическая, суммируемая на периоде функция,

$$\begin{aligned} p(t) &= \begin{cases} -\frac{1}{6}(t - kT)^3, & t \in [kT, kT + 2); \\ \frac{1}{2}(t - kT)^2 + \frac{1}{2}, & t \in (kT + 2, kT + 3); \\ -\frac{1}{10}(t - kT)^3 + \frac{11}{4}, & t \in (kT + 3, kT + T]; \end{cases} \\ h(t) &= \begin{cases} h_1(t) = -\frac{3}{4}(t - kT) + \frac{3}{2} + kT, & t \in [kT + 1, kT + 2); \\ h_2(t) = \frac{41}{56}(t - kT) - \frac{37}{28} + kT, & t \in (kT + 2, kT + 3); \\ h_3(t) = 2 + kT, & t \in (kT + 3, kT + T]; \\ -(1 + kT), & t \in [kT, kT + 1); \end{cases} \\ T &= 4, \quad d = 3, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Первоначально на основании подхода, предложенного в [5], построим функцию Коши уравнения

$$\dot{x}(t) + p(t)x[h(t)] = f(t), \quad t \in [0, T]; \quad x(\xi) = 0, \quad \xi < 0.$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + p(t)x[h(t)] &= f(t), \quad t \in [0, T]; \quad x(\xi) = 0, \quad \xi < 0; \\ x(0) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Решение x задачи (4) может быть представлено в виде

$$x(t) = \sum_{q=1}^4 \kappa_{\mathcal{I}_q}(t) x_q(t), \quad t \in [0, T],$$

где $\kappa_{\mathcal{I}_q}(t)$ есть характеристическая функция множества $\mathcal{I}_q$, $\mathcal{I}_1 = [0, 1)$, $\mathcal{I}_2 = [1, 2)$, $\mathcal{I}_3 = [2, 3)$, $\mathcal{I}_4 = [3, 4]$; $x_q(t)$ есть, в свою очередь, решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + p(t)x[h(t)] &= f(t), \quad t \in \mathcal{I}_q; \\ x(\xi) &= 0, \quad \xi < 0; \\ x(t_{q-1}) &= x_{q-1}(t_{q-1}), \quad t_{q-1} = q-1, \quad q = 1, \dots, 4; \\ x_0(0) &= 0. \end{aligned}$$

Исходя из заданных параметров p , h , искомые функции $x_q(t)$, где $q = 1, 2, 3, 4$, находятся следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \int_0^t f(s) ds, \quad t \in \mathcal{I}_1; \\ x_2(t) &= x_1(1) + \int_1^t -p(s) x_1[h_1(s)] ds + \int_1^t f(s) ds, \quad t \in \mathcal{I}_2; \\ x_3(t) &= x_2(2) + \int_2^t -p(s) x_2[h_2(s)] ds + \int_2^t f(s) ds, \quad t \in \mathcal{I}_3; \\ x_4(t) &= x_3(3) + \int_3^t -p(s) x_3[h_3(s)] ds + \int_3^t f(s) ds, \quad t \in \mathcal{I}_4. \end{aligned} \quad (5)$$

С другой стороны, решение x может быть представлено в виде

$$x(t) = \int_0^t C(t, s) f(s) ds, \quad t \in [0, T],$$

где $C(t, s)$ — функция Коши, при этом

$$C(t, s) = \sum_{q=1}^4 \kappa_{\mathcal{I}_q}(t) C_q(t, s), \quad 0 \leq s \leq t, \quad t \in [0, T],$$

откуда следует представление

$$x_q(t) = \int_0^t C_q(t, s) f(s) ds, \quad 0 \leq s \leq t, \quad t \in \mathcal{I}_q, \quad q = 1, \dots, 4. \quad (6)$$

Далее $\chi_{[\varphi_1(t), \varphi_2(t)]}(s)$ будет обозначать характеристическую функцию множества

$$\{(t, s) : \varphi_1(t) \leq s \leq \varphi_2(t)\}.$$

Последовательно подставляя представление (6) для $x_q(t)$ в выражение (5), будем строить функции $C_q(t, s)$, $q = 1, \dots, 4$:

a) $q = 1, t \in \mathcal{I}_1$.

$$C_1(t, s) = \chi_{[0, t]}(s).$$

b) $q = 2, t \in \mathcal{I}_2$.

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \int_0^1 f(s) ds + \int_1^t f(s) ds + \int_1^t -p(s) \int_0^{h_1(s)} f(\tau) d\tau ds, \\ \int_1^t -p(s) \int_0^{h_1(s)} f(\tau) d\tau ds &= \int_0^{h_1(t)} p_2^1(t) f(s) ds + \int_{h_1(t)}^{h_1(1)} p_2^2(t, s) f(s) ds, \\ p_2^1(t) &= \int_1^t -p(s) ds, \quad p_2^2(t, s) = \int_1^{t - \frac{4(s-h_1(t))}{3}} -p(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем

$$C_2(t, s) = \chi_{[0, 1]}(s) + \chi_{[1, t]}(s) + \chi_{[0, h_1(t)]}(s) p_2^1(t) + \chi_{[h_1(t), h_1(1)]}(s) p_2^2(t, s).$$

c) $q = 3, t \in \mathcal{I}_3$.

$$\begin{aligned} x_3(t) &= \int_0^2 C_2(2, s) f(s) ds + \int_2^t f(s) ds + \int_2^t -p(s) \int_0^{h_2(s)} f(\tau) d\tau ds, \\ \int_2^t -p(s) \int_0^{h_2(s)} f(\tau) d\tau ds &= \int_0^{h_2(2)} p_3^1(t) f(s) ds + \int_{h_2(2)}^{h_2(t)} p_3^2(t, s) f(s) ds, \\ p_3^1(t) &= \int_2^t -p(s) ds, \quad p_3^2(t, s) = \int_{2 + \frac{56(s-h_2(2))}{41}}^t -p(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} C_3(t, s) &= \chi_{[0, 1]}(s) + \chi_{[1, 2]}(s) + \chi_{[0, h_1(2)]}(s) p_2^1(2) + \\ &+ \chi_{[h_1(2), h_1(1)]}(s) p_2^2(2, s) + \chi_{[2, t]}(s) + \\ &+ \chi_{[0, h_2(2)]}(s) p_3^1(t) + \chi_{[h_2(2), h_2(t)]}(s) p_3^2(t, s). \end{aligned}$$

d) $q = 4, t \in \mathcal{I}_4$.

$$x_4(t) = \int_0^3 C_3(3, s) f(s) ds + \int_3^t f(s) ds + \int_0^1 p_4^1(t) f(s) ds,$$

$$p_4^1(t) = \int_3^t -p(s) ds.$$

Откуда следует, что

$$C_4(t, s) = \chi_{[0,1]}(s) + \chi_{[1,2]}(s) + \chi_{[0,h_1(2)]}(s)p_2^1(2) +$$

$$+ \chi_{[h_1(2),h_1(1)]}(s)p_2^2(2, s) + \chi_{[2,3]}(s) +$$

$$+ \chi_{[0,h_2(2)]}(s)p_3^1(3) + \chi_{[h_2(2),h_2(3)]}(s)p_3^2(3, s) +$$

$$+ \chi_{[3,t]}(s) + \chi_{[0,1]}(s)p_4^1(t).$$

График функции Коши $C(t, s)$ приведен на рис. 1.

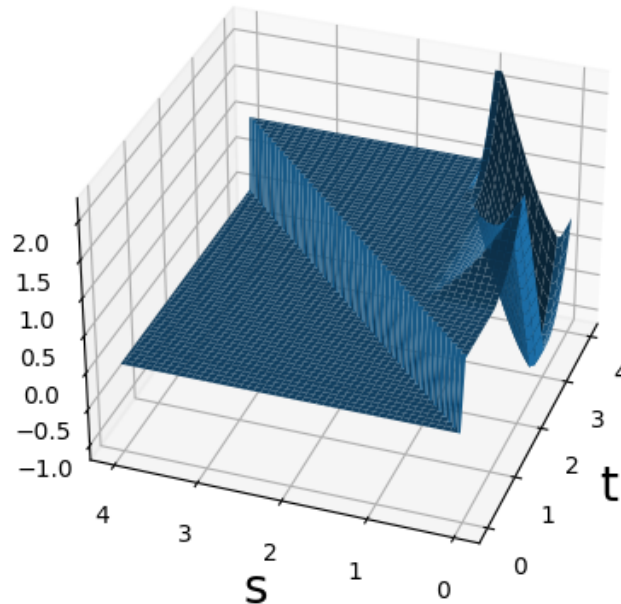


Рис. Функция Коши $C(t, s)$

В ходе проведенных вычислений были получены следующие результаты.

1. Построена матрица $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \frac{73}{176} & -\frac{3996593079}{34617425920} \\ -\frac{13}{16} & -\frac{121934469}{3147038720} \end{pmatrix}.$$

2. Найдены коэффициенты характеристического уравнения a_0, a_1 :

$$a_0 = -\frac{7607115783}{69234851840}, \quad a_1 = -\frac{13017085001}{34617425920}.$$

3. Установлено, что условия (2) выполнены.

Таким образом, было доказано, что решение $x(t, \alpha)$ задачи (3) обладает свойством стабилизированности к 4-периодической функции.

Приведенный выше пример наглядно показывает практическую нереализуемость рассмотрения в рамках данной статьи примера для системы уравнений, так как это потребовало бы существенного увеличения её размера.

Список литературы

1. Мунембе, Ж. С. П. К вопросу об асимптотическом поведении решений системы линейных функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием и периодическими параметрами / Ж. С. П. Мунембе // Изв. вузов. Матем. — 2000. — №. 4. — С. 28–35.
2. Малыгина, В. В. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими переменными запаздываниями. I / В. В. Малыгина, К. М. Чудинов // Изв. вузов. Матем. — 2013. — №. 6. — С. 25–36.
3. Сабатулина, Т. Л. Об устойчивости линейного дифференциального уравнения с ограниченным последствием / Е. Л. Сабатулина, В. В. Малыгина // Изв. вузов. Матем. — 2014. — №. 4. — С. 25–41.
4. Малыгина, В. В. О локальной устойчивости одной модели динамики популяции с тремя стадиями развития / В. В. Малыгина, М. В. Мулюков // Изв. вузов. Матем. — 2017. — №. 4. — С. 35–42.
5. Rumyantsev, A. N. On exact construction of the Cauchy function for a differential equation with linear delay / A. N. Rumyantsev // Functional Differential Equations. — 2021. — Vol. 28, no 1-2. — P. 11–17.
6. Азбелев, Н. В. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений: методы и приложения / Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина. — Москва, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, 2002. — 384 с.
7. Цыпкин, Я. З. Теория линейных импульсных систем / Я. З. Цыпкин. — М.: Физматгиз, 1983. — 968 с.

References

1. Munembe J.S.P. On the asymptotic behavior of solutions of a system of linear functional-differential equations with delay and periodic parameters. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2000, vol. 44, no. 4, pp. 26–33.
2. Malygina V.V., Chudinov K.M. Stability of solutions to differential equations with several variable delays. I. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2013, vol. 57, no. 6, pp. 21–31.
3. Sabatulina T.L., Malygina V.V. On stability of a differential equation with aftereffect. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2014, vol. 58, no. 4, pp. 20–34.
4. Malygina V.V., Mulyukov M.V. On local stability of a population dynamics model with three development stages. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2017, vol. 61, no. 4, pp. 29–34.
5. Rumyantsev A.N. On exact construction of the Cauchy function for a differential equation with linear delay. *Functional Differential Equations*, 2021, vol. 28, no 1-2, pp. 11–17.
6. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. Introduction to the theory of functional differential equations: Methods and applications. New York, Cairo: Hindawi Publishing Corporation, 2007, 324 p.
7. Tsypkin Ya.Z. Teoriya lineynykh impul'snykh sistem [Theory of linear impulse systems]. Moscow: Fizmatgiz, 1983, 968 p.