Сабатулина, Т. Л. Об оценках решений систем линейных автономных функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа / Т. Л. Сабатулина // Прикладная математика и вопросы управления. – 2024. – № 3. – С. 99–112. DOI 10.15593/2499-9873/2024.3.08

Библиографическое описание согласно ГОСТ Р 7.0.100–2018
Сабатулина, Т. Л. Об оценках решений систем линейных автономных функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа / Т. Л. Сабатулина. – Текст : непосредственный. – DOI 10.15593/2499-9873/2024.3.08 // Прикладная математика и вопросы управления / Applied Mathematics and Control Sciences. – 2024. – № 3. – С. 99–112.

пермский политех

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ВОПРОСЫ УПРАВЛЕНИЯ
№ 3, 2024
https://ered.pstu.ru/index.php/amcs

Научная статья
DOI: 10.15593/2499-9873/2024.3.08
УДК 517.929

Об оценках решений систем линейных автономных функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа

Т.Л. Сабатулина

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 18 сентября 2024
Одобрена: 07 октября 2024
Принята к публикации:
08 ноября 2024

Финансирование
Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FSNM-2023-0005).

Конфликт интересов
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Вклад автора
100 %.

Ключевые слова:
системы функционально-дифференциальных уравнений, экспоненциальная устойчивость, фундаментальная матрица, оценка скорости решения, монотонные операторы.

АННОТАЦИЯ

Рассматриваются системы линейных автономных функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа, причём коэффициенты в системе могут быть любого знака. Указанные системы ФДУ включают в себя уравнения с различными видами последействия, в том числе сосредоточенные и распределённые запаздывания.

Цель настоящей работы – получение новых эффективных признаков экспоненциальной устойчивости для систем линейных автономных ФДУ запаздывающего типа. Исследование базируется на идее построения вспомогательной системы, так называемой «системы сравнения», которая, с одной стороны, имеет более простую структуру, а с другой стороны, те же асимптотические свойства, что и исходная система. Система сравнения также может содержать запаздывания, причём не только сосредоточенные, но и распределённые. Система сравнения строится таким образом, что все компоненты её фундаментальной матрицы неотрицательны. Так как матрицы коэффициентов в системе сравнения являются диагональными, то её можно рассматривать как совокупность независимых скалярных уравнений. Для фундаментальных решений таких уравнений в работах В.В. Малыгиной и К.М. Чудинова были получены точные двусторонние экспоненциальные оценки, также дающие экспоненциальную оценку для фундаментальной матрицы системы сравнения.

Для автономных ФДУ запаздывающего типа, как известно, стремление к нулю всегда происходит по экспоненциальному закону, что означает существование таких положительных постоянных N и α, что $|x(t)| \le Ne^{-\alpha t}$. Однако без указания оценок на коэффициент N и показатель экспоненты α или алгоритма их эффективного вычисления задача об экспоненциальной устойчивости не может считаться до конца решённой. В предлагаемом исследовании наряду с новыми признаками экспоненциальной устойчивости найдены оценки скорости стремления компонент фундаментальной матрицы изучаемой системы линейных автономных ФДУ к нулю. Эффективность полученных результатов иллюстрируется несколькими примерами, в которых в качестве систем сравнения выбираются ФДУ с различными видами последействия.

© **Сабатулина Татьяна Леонидовна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Вычислительная математика, механика и биомеханика», e-mail: tlsabatulina@list.ru, ORCID 0000-0003-4570-4207.

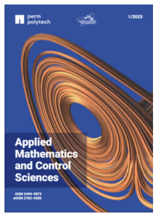
Perm Polytech Style: Sabatulina T.L. On estimates of solutions to systems of linear autonomous functional differential equations of delayed type. *Applied Mathematics and Control Sciences.* 2024, no. 3, pp. 99–112. DOI: 10.15593/2499-9873/2024.3.08

MDPI and ACS Style: Sabatulina, T.L. On estimates of solutions to systems of linear autonomous functional differential equations of delayed type. *Appl. Math. Control Sci.* **2024, 3**, 99–112. https://doi.org/10.15593/2499-9873/2024.3.08

Chicago/Turabian Style: Sabatulina, Tatyana L. 2024. “On estimates of solutions to systems of linear autonomous functional differential equations of delayed type”. *Appl. Math. Control Sci.* no. 3: 99–112. https://doi.org/10.15593/2499-9873/2024.3.08

perm polytech

APPLIED MATHEMATICS AND CONTROL SCIENCES
№ 3, 2024
https://ered.pstu.ru/index.php/amcs



Article
DOI: 10.15593/2499-9873/2024.3.08
UDC 517.929

On estimates of solutions to systems of linear autonomous functional differential equations of delayed type

T.L. Sabatulina

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 26 September 2023
Approved: 07 October 2024
Accepted for publication: 08 November 2024

Funding
The research was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, project No. FSNM -2023-0005.

Conflicts of Interest
The author declares no conflict of interest.

Author Contributions
100 %.

Keywords:
systems of functional differential equations, exponential stability, fundamental matrix, solution rate estimate, monotone operators.

ABSTRACT

In the paper we consider systems of linear autonomous functional differential equations (FDEs) of delayed type, the coefficients in a system can be of any sign. These FDE systems include equations with various types of aftereffects, including concentrated and distributed delays.

The purpose of this paper is to obtain new effective conditions of stability for systems of linear autonomous FDEs. The study is based on an idea of constructing a so-called “comparison system”, which, on the one hand, has a simpler structure, and on the other hand, the same asymptotic properties as the original system. The comparison system may contain a delay, and not only concentrated, but also distributed. The comparison system is constructed in such a way that all components of its fundamental matrix are non-negative. Since the coefficient matrices in the comparison system are diagonal, it can be considered as a set of independent scalar equations. For the fundamental solutions of such equations in the papers of V.V. Malygina and K.M. Chudinov, exact two-sided exponential estimates were obtained, which also give an exponential estimate for the fundamental matrix of the comparison system.

For autonomous FDEs of a delayed type, as is known, approaching zero always occurs exponentially, which means the existence of such positive constants *N* and α that $|x(t)| \le Ne^{-\alpha t}$. However, without specifying estimates for the coefficient *N* and exponent α or an algorithm for their effective calculation, the exponential stability problem cannot be considered completely solved. In the article, along with new conditions of stability, estimates of the rate at which solutions approach zero are found. The effectiveness of the results obtained is illustrated by several examples in which FDEs with different types of aftereffects are selected as comparison systems.

© **Tatyana L. Sabatulina** – CSc of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Computational Mathematics, Mechanics and Biomechanics, e-mail: tlsabatulina@list.ru, ORCID: 0000-0003-4570-4207.

Введение

Пусть $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}_+$ — множества вещественных и неотрицательных вещественных чисел, $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел, $\mathbb{R}^n$ — пространство вещественных n-мерных векторов, $\mathbb{R}^{n\times n}$ – алгебра $n\times n$-матриц с нулем Θ и единицей I.

Неравенства $A \geqslant B$ будем понимать как соответствующие неравенства для всех элементов матриц A и B. Через $\operatorname{diag}\{a_1,\ldots,a_n\}$ будем обозначать диагональную матрицу, на главной диагонали которой стоят числа $a_1,\ldots,a_n$. Через $|A|$ обозначим матрицу, каждый элемент которой взят по абсолютной величине.

Рассмотрим систему линейных автономных функционально-дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t)+\int\limits_0^{\tau} dQ(s)x(t-s)=f(t),\quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{0.1}$$

где $\tau\in\mathbb{R}_+$, $Q\colon[0,\tau]\to\mathbb{R}^n$ — матрица-функция ограниченной вариации, $Q(0)=\Theta$, интеграл понимается в смысле Римана — Стилтьеса, вектор-функция $f\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^n$ локально суммируема. Начальную функцию, не нарушая общности [1, с. 9–10], считаем частью внешнего возмущения f.

Запись системы функционально-дифференциальных уравнений в виде (0.1) с использованием интеграла Римана — Стилтьеса включает в себя уравнения с разными видами последействия. В частности, если Q — кусочно-постоянная на $[0,\tau]$ функция, то (0.1) задает наиболее часто встречающиеся *дифференциально-разностные уравнения*:

$$\dot{x}(t)+\sum_{k=1}^{K}A_k x(t-\tau_k)=f(t),\quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{0.2}$$

где A_k — постоянные $n\times n$-матрицы, τ_k — неотрицательные вещественные числа.

Следуя [1, с. 9–10], назовём *решением* системы (0.1) локально абсолютно непрерывную вектор-функцию, удовлетворяющую (0.1) почти всюду. В указанных выше предположениях система (0.1) с заданным начальным условием $x(0)\in\mathbb{R}^n$ однозначно разрешима, и ее решение представимо в виде [1, с. 84].

$$x(t)=X(t)x(0)+\int\limits_0^{t} X(t-s)f(s)\,ds. \tag{0.3}$$

Матрица-функция $X\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ называется *фундаментальной матрицей* системы (0.1). Она однозначно определяется как решение матричного уравнения

$$\dot{X}(t)+\int\limits_0^{\tau} dQ(s)X(t-s)=\Theta,\quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{0.4}$$

дополненного начальными условиями $X(0)=I$, $X(\xi)=\Theta$ при $\xi<0$.

Из (0.3) следует, что поведение любого решения полностью определяется свойствами фундаментальной матрицы.

Определение 0.1. Систему (0.1) назовём *экспоненциально устойчивой*, если существуют $N,\alpha>0$ такие, что при всех $t\in\mathbb{R}_+$ выполняется неравенство:

$$|X(t)|\leqslant Ne^{-\alpha t}. \tag{0.5}$$

Следующую матрицу-функцию

$$G(\gamma) = -\gamma I + \int_0^\tau e^{\gamma s}\, dQ(s), \quad \gamma \in \mathbb{R},$$

будем называть *характеристической функцией* системы (0.1).

Замечание 0.1. Лаплас-образ функции X имеет вид:

$$\left(pI + \int_0^\tau e^{-ps} dQ(s) \right)^{-1}, \quad p \in \mathbb{C}.$$

Это выражение совпадает с $(G(\gamma))^{-1}$, если $p = -\gamma$, где γ — вещественное число.

Предложение 0.1 [3]. *Если система* (0.1) *экспоненциально устойчива, то матрица* $\int_0^\tau dQ(s)$ *обратима, причём*

$$\int_0^\infty X(t)\, dt = \left(\int_0^\tau dQ(s) \right)^{-1}.$$

Определение 0.2. Назовем матрицу A *положительно обратимой*, если она имеет обратную и $A^{-1} \geqslant \Theta$.

1. Система с коэффициентами разных знаков

Выделим в матрице Q часть элементов главной диагонали и перепишем систему (0.1) в виде

$$\dot{x}(t) + Ax(t) + \int_0^\omega dR(s)x(t-s) = \int_0^\sigma dP(s)x(t-s) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{1.1}$$

Здесь $A = \operatorname{diag}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $a_k \in \mathbb{R}$; $R(s) = \operatorname{diag}\{r_1(s), r_2(s), \ldots, r_n(s)\}$, $r_k(s)$ — монотонные функции; $\omega, \sigma \in \mathbb{R}_+$. Обратим внимание, что, в отличие от [3], элементы матрицы-функции P не обязательно неубывающие.

Как и в [3], систему, которая определяется левой частью (1.1)

$$\dot{x}(t) + Ax(t) + \int_0^\omega dR(s)x(t-s) = \Theta, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.2}$$

далее будем называть *системой сравнения*.

Так как матрицы A и $R(s)$ диагональные, то систему сравнения можно рассматривать как совокупность независимых скалярных уравнений

$$\dot{x}(t) + a_k x(t) + \int_0^\omega x_k(t-s)\, dr_k(s) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad k = \overline{1,n}. \tag{1.3}$$

Для фундаментальных решений скалярных уравнений вида (1.3) в работах [4; 5] были получены точные двусторонние оценки. Приведём здесь эти результаты.

2. Оценки для скалярных уравнений

Рассмотрим скалярное уравнение вида

$$\dot{x}(t) + ax(t) + \int_0^{\omega} x(t-s)\,dr(s) = 0, \quad t \geq 0, \tag{2.1}$$

где $a \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$, r — функция ограниченной вариации, $r(0) = 0$, интеграл понимается в смысле Римана — Стилтьеса. Через $x_0 = x_0(t)$ будем обозначать фундаментальное решение уравнения (2.1).

Характеристическая функция уравнения (2.1) имеет вид

$$g(\gamma) = -\gamma + a + \int_0^{\omega} e^{\gamma s}\,dr(s), \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

В случаях, когда функция r является монотонной (невозрастающей или неубывающей), для фундаментального решения уравнения (2.1) удаётся получить двустороннюю экспоненциальную оценку.

Предложение 2.1 [4; 5]. *Пусть функция r неубывающая. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

- *Фундаментальное решение уравнения* (2.1) *имеет при некоторых $\alpha, N > 0$ двустороннюю оценку*
$$0 < x_0(t) \leqslant N e^{-\alpha t}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.2}$$
- *Существует $\zeta > 0$ такое, что $g(\zeta) = 0$, $g'(\zeta) < 0$.*
- *$g(0) > 0$, $g'(0) < 0$ и $\int_0^{\omega} e^{(\zeta^*+a)s} dr(s) \leqslant \zeta^*$, где ζ^* — корень уравнения*
$$(\zeta + a)\int_0^{\omega} s e^{\zeta s} dr(s) = \int_0^{\omega} e^{\zeta s} dr(s).$$

Если удаётся найти корень уравнения $g(\zeta) = 0$, то оценку (2.2) можно сделать эффективной.

Предложение 2.2 [4; 5]. *Если в уравнении* (2.1) *функция r неубывающая, а для характеристической функции при некотором вещественном $\zeta > 0$ выполнены условия $g(\zeta) = 0$, $g'(\zeta) < 0$, то фундаментальное решение уравнения* (2.1) *имеет двустороннюю оценку*

$$e^{-\zeta t} \leqslant x_0(t) \leqslant -\frac{1}{g'(\zeta)} e^{-\zeta t}, \quad t \geqslant 0, \tag{2.3}$$

и, кроме того, $\lim\limits_{t\to\infty} x_0(t) e^{\zeta t} = -\frac{1}{g'(\zeta)}$.

Замечание 2.1. Показатель экспоненты и постоянные 1 и $-\frac{1}{g'(-\zeta)}$ в оценке (2.3) точные.

Предложение 2.3 [4; 5]. *Пусть функция r невозрастающая. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

- *Фундаментальное решение уравнения* (2.1) *имеет оценку* (2.2).
- *Функция g имеет вещественный корень.*
- $a + r(\omega) > 0$.

Предложение 2.3 также можно усилить, если найден корень функции g.

Предложение 2.4 [4; 5]. *Если в уравнении* (2.1) *функция r невозрастающая и при некотором вещественном $\zeta > 0$ справедливо равенство $g(\zeta) = 0$, то фундаментальное решение уравнения* (2.1) *имеет двустороннюю оценку*

$$me^{-\zeta t} \leqslant x_0(t) \leqslant e^{-\zeta t}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.4}$$

и, кроме того, $\lim\limits_{t\to\infty} x_0(t)e^{\zeta t} = -\frac{1}{g'(\zeta)}$.

Замечание 2.2. Показатель экспоненты и постоянные $m = \min\limits_{t\in[0,\omega]} x_0(t)e^{\zeta t}$ и 1 в оценке (2.4) точные.

Вернёмся к системе сравнения (1.3). Запишем её фундаментальную матрицу

$$X_0(t) = \operatorname{diag}\{x_{01}(t), x_{02}(t), \ldots, x_{0n}(t)\},$$

где x_{0k} — фундаментальные решения уравнений (1.3), и характеристическую функцию

$$G_0(\gamma) = \operatorname{diag}\{g_1(\gamma), g_2(\gamma), \ldots, g_n(\gamma)\},$$

где g_k — соответственно характеристические функции уравнений (1.3).

Считаем, что при $k = \overline{1,m}$ функции r_k неубывающие, и для функций g_k выполнены условия предложения 2.2, а при $k = \overline{m+1,n}$ функции r_k невозрастающие, и для функций g_k выполнены условия предложения 2.4. Через ζ_k обозначим наименьшие положительные корни функций g_k.

Из предложений 2.2 и 2.4 получаем оценки для элементов фундаментальной матрицы $X_0(t)$:

$$\text{при } k = \overline{1,m} \quad e^{-\zeta_k t} \leqslant x_{0k}(t) \leqslant -\frac{1}{g_k'(\zeta_k)}e^{-\zeta_k t}, \quad t \in \mathbb{R}_+; \tag{2.5}$$

$$\text{при } k = \overline{m+1,n} \quad m_k e^{-\zeta_k t} \leqslant x_{0k}(t) \leqslant e^{-\zeta_k t}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.6}$$

Таким образом, для фундаментальной матрицы системы сравнения справедлива оценка

$$\Theta \leqslant X_0(t) \leqslant Ne^{-\zeta_0 t}, \tag{2.7}$$

где $\zeta_0 = \min\{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n\}$, $N = \operatorname{diag}\{-\frac{1}{g_1'(\zeta_1)}, \ldots, -\frac{1}{g_m'(\zeta_m)}, 1, \ldots, 1\}$.

3. Оценки решений системы (1.1)

Из равенства (0.4) следует, что фундаментальная матрица системы (1.1) однозначно определяется как решение матричного уравнения

$$\dot{X}(t) + AX(t) + \int\limits_0^{\omega} dR(s)\,X(t-s) = \int\limits_0^{\sigma} dP(s)\,X(t-s), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3.1}$$

дополненного начальными условиями $X(0) = I$, $X(\xi) = \Theta$ при $\xi < 0$.

В силу [6, с. 205, теорема 6] матрицу-функцию P можно представить в виде разности двух матриц, все компоненты которых являются возрастающими функциями: $P(s) = P_1(s) - P_2(s)$. Под $|dP(s)|$ будем понимать $d(P_1(s) + P_2(s))$.

Введём вспомогательную систему

$$\dot{x}(t) + Ax(t) + \int\limits_0^{\omega} dR(s)\,x(t-s) = \int\limits_0^{\sigma} |dP(s)|\,x(t-s) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3.2}$$

и обозначим через Y её фундаментальную матрицу. Функция Y однозначно определяется как решение матричного уравнения

$$\dot{Y}(t) + AY(t) + \int\limits_0^{\omega} dR(s)\,Y(t-s) = \int\limits_0^{\sigma} |dP(s)|\,Y(t-s), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3.3}$$

дополненного начальными условиями $Y(0) = I$, $Y(\xi) = \Theta$ при $\xi < 0$.

Замечание 3.1. Для системы

$$\dot{X}(t) + AX(t) + \int\limits_0^{\omega} dR(s)\,X(t-s) = \sum_{j=1}^{J} B_j \int\limits_0^{\sigma} X(t-s)\,dp_j(s), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где B_j — вещественные матрицы, p_j — скалярные неубывающие функции, система (3.3) выглядит следующим образом:

$$\dot{X}(t) + AX(t) + \int\limits_0^{\omega} dR(s)\,X(t-s) = \sum_{j=1}^{J} \left|B_j\right| \int\limits_0^{\sigma} X(t-s)\,dp_j(s), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Используя формулу (0.3), перепишем уравнение (3.3) в эквивалентной интегральной форме:

$$Y(t) = X_0(t) + (TY)(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3.4}$$

где

$$(TY)(t) = \int\limits_0^{t} X_0(t-s) \int\limits_0^{\sigma} |dP(\theta)|\,Y(s-\theta)\,ds.$$

Заметим, что оператор T является интегральным оператором Вольтерры, следовательно, его спектральный радиус равен нулю. Если функция $|P|$ не убывает на $[0, \sigma]$, то оператор T инвариантен относительно конуса K неотрицательных матриц-функций. Эти факты позволяют применить к оператору T следующий известный результат.

Предложение 3.1 [7, теорема 9.3, с. 86]. *Если для матрицы $V \geqslant \Theta$ справедливо неравенство*

$$V \leqslant TV + X_0 \quad (TV + X_0 \leqslant V),$$

то $V \leqslant X$ $(X \leqslant V)$, *где* X — *решение уравнения* $X = TX + X_0$.

Лемма 3.1. *Справедливо следующее неравенство:* $|X(t)| \leqslant Y(t)$.

Доказательство. Используя формулу (0.3), получаем, что фундаментальная матрица системы (3.1) удовлетворяет соотношению:

$$X(t) = X_0(t) + \int_0^t X_0(t-s)\left(\int_0^\sigma dP(\xi)\, X(s-\xi)\right) ds.$$

Из оценки

$$|X(t)| \leqslant X_0(t) + \int_0^t \left(\int_0^\sigma X_0(t-s)\, |dP(\xi)|\, |X(s-\xi)|\right) ds,$$

полагая $V(t) = |X(t)|$, получаем $V \leqslant TV + X_0$. Так как $Y = TY + X_0$, то из предложения 3.1 следует, что $|X(t)| \leqslant Y(t)$.

Пусть $\gamma \in [0, \zeta_0]$. Обозначим

$$U(\gamma) = \int_0^\sigma e^{\gamma s} |dP(s)|, \quad G(\gamma) = G_0(\gamma) - U(\gamma), \quad H(\gamma) = I - G_0^{-1}(\gamma) U(\gamma).$$

Заметим, что

$$H(\gamma) = G_0^{-1}(\gamma) G(\gamma), \quad H^{-1}(\gamma) = G^{-1}(\gamma) G_0(\gamma),$$

следовательно, на $[0, \zeta_0]$ матрицы $H(\gamma)$ и $G(\gamma)$ положительно обратимы одновременно.

Предложение 3.2. *Пусть для фундаментальной матрицы системы сравнения выполнены оценки* (2.7). *Система* (3.2) *экспоненциально устойчива, если и только если матрица* $G(0) = A + \int_0^\omega dR(s) - \int_0^\sigma |dP(s)|$ *положительно обратима.*

Предложение 3.3 [3]. *Пусть для фундаментальной матрицы системы сравнения выполнены оценки* (2.7)*, матрица* $H(0)$ *положительно обратима, а* γ_0 — *первый положительный нуль уравнения* $\det H(\gamma) = 0$. *Тогда для фундаментальной матрицы системы* (3.2) *при всех* $\gamma \in [0, \gamma_0)$ *справедлива оценка*

$$\Theta \leqslant Y(t) \leqslant H^{-1}(\gamma) N e^{-\gamma t}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.5}$$

Теорема 3.1. *Пусть для фундаментальной матрицы системы сравнения выполнены оценки* (2.7). *Если матрица* $G(0) = A + \int_0^\omega dR(s) - \int_0^\sigma |dP(s)|$ *положительно обратима, то система* (1.1) *экспоненциально устойчива.*

Доказательство. По предложению 3.2 система (3.2) экспоненциально устойчива. Откуда, в силу леммы 3.1, следует экспоненциальная устойчивость системы (1.1).

Из леммы 3.1 и предложения 3.3 вытекает

Теорема 3.2. *Пусть для фундаментальной матрицы системы сравнения выполнены оценки* (2.7)*, матрица* $H(0)$ *положительно обратима, а* γ_0 *— первый положительный нуль уравнения* $\det H(\gamma) = 0$*. Тогда для фундаментальной матрицы системы* (1.1) *при всех* $\gamma \in [0, \gamma_0)$ *справедлива оценка*

$$|X(t)| \leqslant H^{-1}(\gamma) N e^{-\gamma t}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.6}$$

Замечание 3.2. Если норма определяется компонентами матрицы, то из неравенства (3.6) вытекает $\|X(t)\|\, M(\gamma)e^{-\gamma t}$, где коэффициент $M(\gamma)$ определяется матрицами $H^{-1}(\gamma)$ и N. Например,

$$\|X(t)\|_{l_1} \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \left(\left\{H^{-1}(\gamma)\right\}_{ij} N_{jj}\right) e^{-\gamma t}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

$$\|X(t)\|_{E} \leqslant \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left(\left\{H^{-1}(\gamma)\right\}_{ij} N_{jj}\right)^2\right)^{1/2} e^{-\gamma t}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

$$\|X(t)\|_{l_\infty} \leqslant \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left(\left\{H^{-1}(\gamma)\right\}_{ij} N_{jj}\right) e^{-\gamma t}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

В случае произвольных норм воспользуемся эквивалентностью норм в $\mathbb{R}^n$, т. е. если имеются две различные нормы $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$, то $\|X(t)\|_\alpha \leqslant C(\alpha,\beta)\|X(t)\|_\beta$, где $C(\alpha,\beta)$ — некоторое вещественное число.

4. Примеры

Продемонстрируем работу полученных результатов на нескольких примерах, выбирая в качестве систем сравнения функционально-дифференциальных уравнения с различными видами последействия.

Пример 4.1. Рассмотрим систему ФДУ, в системе сравнения которой функция $r_1(s)$ неубывающая, а $r_2(s)$ невозрастающая.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) - 0{,}5x_1(t) + 2x_1(t-0{,}1) + \displaystyle\int_{t-0{,}2}^{t} x_1(s)\,ds = \\ \qquad\qquad = 0{,}6x_1(t-0{,}3) - 0{,}5\displaystyle\int_0^1 x_2(t-s)\,ds, \\ \dot{x}_2(t) + 1{,}5x_2(t) - x_2(t-1) = -0{,}3x_1(t). \end{cases} \tag{4.1}$$

Для (4.1) система (3.2) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) - 0{,}5x_1(t) + 2x_1(t-0{,}1) + \displaystyle\int_{t-0{,}2}^{t} x_1(s)\,ds = \\ \qquad\qquad = 0{,}6x_1(t-0{,}3) + 0{,}5\displaystyle\int_0^1 x_2(t-s)\,ds, \\ \dot{x}_2(t) + 1{,}5x_2(t) - x_2(t-1) = 0{,}3x_1(t). \end{cases} \tag{4.2}$$

В работе [3] для системы (4.2) были найдены точные оценки фундаментальной матрицы: $\operatorname{diag}\left(e^{-2{,}261t}, 0{,}282e^{-0{,}36t}\right) \leqslant Y(t) \leqslant Ce^{-\gamma t}$, $\gamma \in [0, \gamma_0)$, где $C = (H(\gamma))^{-1}N$,

$$H(\gamma)=\begin{pmatrix} 1-\frac{0{,}6e^{0{,}3\gamma}}{-\gamma-0{,}5+2e^{0{,}1\gamma}+\frac{e^{0{,}2\gamma}-1}{\gamma}} & -\frac{0{,}5}{-\gamma-0{,}5+2e^{0{,}1\gamma}+\frac{e^{0{,}2\gamma}-1}{\gamma}}\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma} \\ -\frac{0{,}3}{-\gamma+1{,}5-e^{\gamma}} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det H(\gamma)=1-\frac{0{,}6e^{0{,}3\gamma}}{-\gamma-0{,}5+2e^{0{,}1\gamma}+\frac{e^{0{,}2\gamma}-1}{\gamma}}-\frac{0{,}15\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma}}{\left(-\gamma-0{,}5+2e^{0{,}1\gamma}+\frac{e^{0{,}2\gamma}-1}{\gamma}\right)\left(-\gamma+1{,}5-e^{\gamma}\right)},$$

$$(H(\gamma))^{-1}=\frac{1}{\det H(\gamma)}\begin{pmatrix} 1 & \frac{0{,}5}{-\gamma-0{,}5+2e^{0{,}1\gamma}+\frac{e^{0{,}2\gamma}-1}{\gamma}}\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma} \\ \frac{0{,}3}{-\gamma+1{,}5-e^{\gamma}} & 1-\frac{0{,}6e^{0{,}3\gamma}}{-\gamma-0{,}5+2e^{0{,}1\gamma}+\frac{e^{0{,}2\gamma}-1}{\gamma}} \end{pmatrix},$$

первый положительный корень уравнения $\det H(\gamma)=0$: $\gamma_0\approx 0{,}157756$.

Найдём матрицу C для нескольких значений γ:

$$\text{при } \gamma=0{,}15 \quad \text{имеем} \quad C=\begin{pmatrix} 22{,}9427 & 5{,}64408 \\ 36{,}5785 & 9{,}99858 \end{pmatrix},$$

$$\text{при } \gamma=0{,}1 \quad \text{имеем} \quad C=\begin{pmatrix} 4{,}79267 & 1{,}12179 \\ 4{,}87672 & 2{,}14147 \end{pmatrix},$$

$$\text{при } \gamma=0{,}05 \quad \text{имеем} \quad C=\begin{pmatrix} 3{,}4532 & 0{,}769603 \\ 2{,}59815 & 1{,}57904 \end{pmatrix}.$$

Значит, $|X(t)|\leqslant Ce^{-\gamma t}$, $\gamma\in[0,\gamma_0)$.

Пример 4.2. Рассмотрим ещё одну систему ФДУ, содержащую различные типы запаздываний:

$$\begin{cases} \dot x_1(t)+\int\limits_0^1 sx_1(t-s)\,ds=-0{,}5\int\limits_0^1 x_2(t-s)\,ds+0{,}1x_3(t-1), \\ \dot x_2(t)+0{,}4x_2(t)+0{,}2x_2(t-1)=0{,}3x_1(t)-0{,}1x_3(t-1), \\ \dot x_3(t)+0{,}6x_3(t)+0{,}3\int\limits_0^1 x_3(t-s)\,ds=-0{,}1x_1(t-1)+0{,}25\int\limits_0^1 x_2(t-s)\,ds. \end{cases}$$

В данном случае система (3.2) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot x_1(t)+\int\limits_0^1 sx_1(t-s)\,ds=0{,}5\int\limits_0^1 x_2(t-s)\,ds+0{,}1x_3(t-1), \\ \dot x_2(t)+0{,}4x_2(t)+0{,}2x_2(t-1)=0{,}3x_1(t)+0{,}1x_3(t-1), \\ \dot x_3(t)+0{,}6x_3(t)+0{,}3\int\limits_0^1 x_3(t-s)\,ds=0{,}1x_1(t-1)+0{,}25\int\limits_0^1 x_2(t-s)\,ds. \end{cases} \tag{4.3}$$

Фундаментальная матрица системы сравнения $X_0(t)=\operatorname{diag}\{x_{01}(t),x_{02}(t),x_{03}(t)\}$. Найдём точные оценки для фундаментального решения $x_{01}(t)$ уравнения

$$\dot x_1(t)+\int\limits_0^1 sx_1(t-s)\,ds=0,\qquad t\in\mathbb{R}_+. \tag{4.4}$$

Выпишем характеристическую функцию

$$g_1(\gamma) = -\gamma + \int_0^1 s e^{\gamma s}\, ds$$

и её производную:

$$g_1'(\gamma) = -1 + \int_0^1 s^2 e^{\gamma s}\, ds.$$

Вычислим вещественные корни уравнения $g_1(\gamma) = 0$:

$$\gamma_1 \approx 1{,}79328, \quad \gamma_2 = 1.$$

Искомый показатель $\zeta_1 = 1$. Отсюда

$$-\frac{1}{g_1'(\zeta_1)} = \frac{1}{1 - \int_0^1 s^2 e^s\, ds} = 3 - e.$$

Оценку для решения уравнения (4.4) можно записать в виде

$$e^{-t} \leqslant x_{01}(t) \leqslant \frac{1}{3-e}\, e^{-t}, \quad t \geqslant 0.$$

Найдём точные оценки для фундаментального решения $x_{02}(t)$ уравнения

$$\dot{x}_2(t) + 0{,}4x_2(t) + 0{,}2x_2(t-1) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{4.5}$$

Выпишем характеристическую функцию

$$g_2(\gamma) = -\gamma + 0{,}4 + 0{,}2e^{\gamma}$$

и её производную:

$$g_2'(\gamma) = -1 + 0{,}2e^{\gamma}.$$

Вычислим вещественные корни уравнения $g_2(\gamma) = 0$:

$$\gamma_1 \approx 2{,}19374, \quad \gamma_2 \approx 0{,}884218.$$

Искомый показатель $\zeta_2 = 0{,}884218$. Отсюда

$$-\frac{1}{g_2'(\zeta_2)} = \frac{1}{1{,}4 - \zeta_2} \approx 1{,}9388.$$

Оценку для решения уравнения (4.5) можно записать в виде

$$e^{-0{,}885t} \leqslant x_{02}(t) \leqslant 1{,}9389\, e^{-0{,}884t}, \quad t \geqslant 0.$$

Найдём точные оценки для фундаментального решения $x_{03}(t)$ уравнения

$$\dot{x}_3(t) + 0{,}6x_3(t) + 0{,}3\int_0^1 x_3(t-s)\, ds = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{4.6}$$

Выпишем характеристическую функцию

$$g_3(\gamma) = -\gamma + 0{,}6 + 0.3\frac{e^{\gamma} - 1}{\gamma}$$

и её производную:

$$g_3'(\gamma) = -1 + 0{,}3\frac{(\gamma - 1)e^{\gamma} - 1}{\gamma^2}.$$

Вычислим вещественные корни уравнения $g_3(\gamma) = 0$:

$$\gamma_1 \approx 3{,}62678, \quad \gamma_2 \approx 1{,}16961.$$

Искомый показатель $\zeta_3 = 1{,}16961$. Отсюда

$$-\frac{1}{g_3'(\zeta_3)} = \frac{1}{1 + 0.3\frac{(1-\zeta_3)e^{\zeta_3}-1}{\zeta_3^2}} \approx 1{,}51308.$$

Оценку для решения уравнения (4.6) можно записать в виде

$$e^{-1{,}170t} \leqslant x_{03}(t) \leqslant 1{,}514\, e^{-1{,}169t}, \quad t \geqslant 0.$$

Вычислим

$$G_0(\gamma) = \operatorname{diag}\left\{-\gamma + \int\limits_0^1 s e^{\gamma s}\, ds, -\gamma + 0{,}4 + 0{,}2e^{\gamma}, -\gamma + 0{,}6 + 0{,}3\frac{e^{\gamma} - 1}{\gamma}\right\},$$

$$(G_0(\gamma))^{-1} = \operatorname{diag}\left\{\frac{1}{-\gamma + \int\limits_0^1 s e^{\gamma s}\, ds}, \frac{1}{-\gamma + 0{,}4 + 0{,}2e^{\gamma}}, \frac{1}{-\gamma + 0{,}6 + 0{,}3\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma}}\right\},$$

$$U(\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma} & 0{,}1e^{\gamma} \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}1e^{\gamma} \\ 0{,}1e^{\gamma} & 0{,}25\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma} & 0 \end{pmatrix},$$

$$H(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{0{,}5}{-\gamma+\int\limits_0^1 s e^{\gamma s}\, ds}\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma} & -\frac{0{,}1e^{\gamma}}{-\gamma+\int\limits_0^1 s e^{\gamma s}\, ds} \\ -\frac{0{,}3}{-\gamma+0{,}4+0{,}2e^{\gamma}} & 1 & -\frac{0{,}1e^{\gamma}}{-\gamma+0{,}4+0{,}2e^{\gamma}} \\ -\frac{0{,}1e^{\gamma}}{-\gamma+0{,}6+0{,}3\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma}} & -\frac{0{,}25}{-\gamma+0{,}6+0{,}3\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma}}\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det H(\gamma) = 1 - \frac{0{,}005e^{\gamma}(e^{\gamma}+1{,}5)\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma}}{\left(-\gamma+\int\limits_0^1 s e^{\gamma s}\, ds\right)\left(-\gamma+0{,}4+0{,}2e^{\gamma}\right)\left(-\gamma+0{,}6+0{,}3\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma}\right)} - \frac{0{,}01e^{2\gamma}}{\left(-\gamma+\int\limits_0^1 s e^{\gamma s}\, ds\right)\left(-\gamma+0{,}6+0{,}3\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma}\right)} -$$
$$- \frac{0{,}15\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma}}{\left(-\gamma+\int\limits_0^1 s e^{\gamma s}\, ds\right)\left(-\gamma+0{,}4+0{,}2e^{\gamma}\right)} - \frac{0{,}025\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma}e^{\gamma}}{\left(-\gamma+0{,}4+0{,}2e^{\gamma}\right)\left(-\gamma+0{,}6+0{,}3\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma}\right)},$$

$$\{(H(\gamma))^{-1}\}_{11} = \frac{1}{\det H(\gamma)}\left(1 - \frac{0{,}025\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma}e^{\gamma}}{\left(-\gamma+0{,}4+0{,}2e^{\gamma}\right)\left(-\gamma+0{,}6+0{,}3\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma}\right)}\right),$$

$$\{(H(\gamma))^{-1}\}_{12} = \frac{1}{\det H(\gamma)}\left(\frac{0{,}025\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma}e^{\gamma}}{\left(-\gamma+\int\limits_0^1 s e^{\gamma s}\, ds\right)\left(-\gamma+0{,}6+0{,}3\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma}\right)} + \frac{0{,}5\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma}}{-\gamma+\int\limits_0^1 s e^{\gamma s}\, ds}\right),$$

$$\{(H(\gamma))^{-1}\}_{13} = \frac{1}{\det H(\gamma)}\left(\frac{0{,}05\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma}e^{\gamma}}{\left(-\gamma+\int\limits_0^1 se^{\gamma s}\,ds\right)\left(-\gamma+0{,}4+0{,}2e^{\gamma}\right)} + \frac{0{,}1e^{\gamma}}{-\gamma+\int\limits_0^1 se^{\gamma s}\,ds}\right),$$

$$\{(H(\gamma))^{-1}\}_{21} = \frac{1}{\det H(\gamma)}\left(\frac{0{,}01e^{2\gamma}}{\left(-\gamma+0{,}4+0{,}2e^{\gamma}\right)\left(-\gamma+0{,}6+0{,}3\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma}\right)} + \frac{0{,}3}{-\gamma+0{,}4+0{,}2e^{\gamma}}\right),$$

$$\{(H(\gamma))^{-1}\}_{22} = \frac{1}{\det H(\gamma)}\left(1-\frac{0{,}01e^{2\gamma}}{\left(-\gamma+\int\limits_0^1 se^{\gamma s}\,ds\right)\left(-\gamma+0{,}6+0{,}3\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma}\right)}\right),$$

$$\{(H(\gamma))^{-1}\}_{23} = \frac{1}{\det H(\gamma)}\left(\frac{0{,}03e^{\gamma}}{\left(-\gamma+\int\limits_0^1 se^{\gamma s}\,ds\right)\left(-\gamma+0{,}4+0{,}2e^{\gamma}\right)} + \frac{0{,}1e^{\gamma}}{-\gamma+0{,}4+0{,}2e^{\gamma}}\right),$$

$$\{(H(\gamma))^{-1}\}_{31} = \frac{1}{\det H(\gamma)}\left(\frac{0{,}075\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma}}{\left(-\gamma+0.4+0.2e^{\gamma}\right)\left(-\gamma+0.6+0.3\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma}\right)} + \frac{0{,}1e^{\gamma}}{-\gamma+0{,}6+0{,}3\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma}}\right),$$

$$\{(H(\gamma))^{-1}\}_{32} = \frac{1}{\det H(\gamma)}\left(\frac{0{,}05\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma}e^{\gamma}}{\left(-\gamma+\int\limits_0^1 se^{\gamma s}\,ds\right)\left(-\gamma+0{,}6+0{,}3\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma}\right)} + \frac{0{,}25\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma}}{-\gamma+0{,}6+0{,}3\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma}}\right),$$

$$\{(H(\gamma))^{-1}\}_{33} = \frac{1}{\det H(\gamma)}\left(1-\frac{0{,}15\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma}}{\left(-\gamma+\int\limits_0^1 se^{\gamma s}\,ds\right)\left(-\gamma+0{,}4+0{,}2e^{\gamma}\right)}\right),$$

$\gamma_0 \approx 0{,}132718$ — первый положительный нуль уравнения $\det H(\gamma) = 0$. Поскольку

$$H^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 515/208 & 285/104 & 99/104 \\ 35/26 & 33/13 & 9/13 \\ 135/208 & 105/104 & 135/104 \end{pmatrix} \geqslant 0,$$

теорема 3.3 применима.

Найдём матрицу $C = (H(\gamma))^{-1}N$ для нескольких значений γ:

$$\text{при } \gamma = 0{,}13 \quad \text{имеем} \quad C = \begin{pmatrix} 309{,}166 & 252{,}113 & 81{,}1339 \\ 212{,}984 & 175{,}782 & 56{,}2682 \\ 116{,}49 & 95{,}7031 & 32{,}2101 \end{pmatrix},$$

$$\text{при } \gamma = 0{,}1 \quad \text{имеем} \quad C = \begin{pmatrix} 27{,}9013 & 21{,}1334 & 6{,}52262 \\ 18{,}1051 & 15{,}7946 & 4{,}57702 \\ 9{,}61836 & 7{,}95625 & 3{,}87268 \end{pmatrix},$$

$$\text{при } \gamma = 0{,}05 \quad \text{имеем} \quad C = \begin{pmatrix} 12{,}543 & 8{,}45714 & 2{,}44208 \\ 7{,}42115 & 7{,}05774 & 1{,}74566 \\ 3{,}75578 & 3{,}14632 & 2{,}33423 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\operatorname{diag}\left(e^{-t}, e^{-0{,}885t}, e^{-1{,}170t}\right) \leqslant Y(t) \leqslant Ce^{-\gamma t}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \gamma \in [0, \gamma_0).$$

Значит,

$$|X(t)| \leqslant Ce^{-\gamma t}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \gamma \in [0, \gamma_0).$$

Список литературы

1. Азбелев, Н. В. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений / Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина. — М.: Наука, 1991. — 280 с.

2. Györi, I. Interaction between oscillations and global asymptotic stability in delay differential equations / I. Györi // Differential and Integral Equations. — 1990. — Vol. 3, no. 1. — P. 181–200.

3. Сабатулина, Т. Л. Экспоненциальная устойчивость и оценки решений систем функционально-дифференциальных уравнений / Т. Л. Сабатулина, В. В. Малыгина // Математические труды. — 2023. — Т. 26, № 1. — С. 130–149.

4. Малыгина, В. В. Оценка показателя экспоненты для устойчивых решений одного класса дифференциально-разностных уравнений / В. В. Малыгина // Изв. вузов. Матем. — 2021. – – № 12. — С. 67–79.

5. Малыгина, В. В. О точных двусторонних оценках устойчивых реше-ний автономных функционально-дифференциальных уравнений / В. В. Малыгина, К. М. Чудинов // Сиб. матем. журн. — 2022. — Т. 63, № 2. — С. 360–378.

6. Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной / И. П. Натансон. — М.: Наука, 1974. — 480 с.

7. Далецкий, Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. — М.: Наука, 1970. — 536 с.

References

1. Azbelev N. V., Maksimov V. P., Rakhmatullina L. F. Vvedenie v teoriyu funktsional’no-differentsial’nykh uravnenij [Introduction to the theory of functional differential equations]. Moscow: Nauka, 1991, 280 p.

2. Györi I. Interaction between oscillations and global asymptotic stability in delay differential equations. *Differential and Integral Equations*, 1990, vol. 3, no. 1, pp. 181–200.

3. Sabatulina T. L., Malygina V. V. Exponential Stability and Estimates of Solutions to Systems of Functional Differential Equations // *Siberian Advances in Mathematics*, 2023, vol. 33, no. 3, pp. 165–176.

4. Malygina V. V. Exponent estimation for stable solutions of a certain class of differential-difference equations. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2021, vol. 65, no. 12, pp. 56–67.

5. Malygina V. V., Chudinov K. M. About exact two-sided estimates for stable solutions to autonomous functional differential equations. *Siberian Math. J.*, 2022, vol. 63, no. 2, pp. 299–315.

6. Natanson I. P. Teoriia funktsiy veshchestvennoy peremennoy [Theory of functions of a real variable]. Moscow: Nauka, 1974, 480 p.

7. Daletskii Iu. L., Krein M. G. Ustoichivost’ reshenii differentsial’nykh uravnenii v banakhovykh prostranstvakh [Stability of solutions of differential equations in Banach spaces]. Moscow: Nauka, 1970, 536 p.