

Ступникова, А. В. Управление устойчивостью перегретой жидкости в тороидальной конвективной петле с помощью роя микроботов / А. В. Ступникова, Д. А. Брацун // Прикладная математика и вопросы управления. – 2025. – № 1. – С. 6–20. DOI 10.15593/2499-9873/2025.1.01

Библиографическое описание согласно ГОСТ Р 7.0.100–2018

Ступникова, А. В. Управление устойчивостью перегретой жидкости в тороидальной конвективной петле с помощью роя микроботов / А. В. Ступникова, Д. А. Брацун. – Текст : непосредственный. – DOI 10.15593/2499-9873/2025.1.01 // Прикладная математика и вопросы управления / Applied Mathematics and Control Sciences. – 2025. – № 1. – С. 6–20.



**ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
И ВОПРОСЫ УПРАВЛЕНИЯ**

№ 1, 2025

<https://ered.pstu.ru/index.php/amcs>



Научная статья

DOI: 10.15593/2499-9873/2025.1.01

УДК 519.7:573



Управление устойчивостью перегретой жидкости в тороидальной конвективной петле с помощью роя микроботов

А.В. Ступникова, Д.А. Брацун

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 27 февраля 2025

Одобрена: 14 апреля 2025

Принята к публикации:

18 апреля 2025

Финансирование

Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (грант № FSNM-2023-0003).

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов

равноценен.

Ключевые слова:

активное управление,
устойчивости жидкости,
биоконвекция, программируемые
микроботы

АННОТАЦИЯ

В последние годы внимание исследователей привлекает активная жидкость, которая включает элементы (клетки, макромолекулы, бактерии), способные к само-движению. Поведение такой жидкости определяется способностью элементов преобразовывать энергию среды в механическую работу и создавать новые состояния. Использование программируемых микроботов открывает возможности по достижению таких состояний среды, которые в природных условиях не наблюдаются. В данной работе мы предполагаем, что свободно плавающие микроботы обладают свойством термотаксиса, т.е. проявляют двигательную реакцию на градиент температуры. Так как плотность самих ботов может задаваться при их производстве, то рой может локально создавать плотность, которая отличается от плотности несущей среды. Таким образом, коллективные действия ботов по перераспределению концентрации роя в жидкости потенциально могут в реальном времени компенсировать изменения плотности критически перегретой жидкости.

В данной работе мы теоретически исследуем возможность роя активно управлять физической системой на примере тороидального термосифона, представляющего собой узкий замкнутый канал с круглым сечением, находящийся под действием силы тяжести и заданного теплопотока через границы. Предложена математическая модель явления, которая включает уравнения движения жидкости, передачи тепла и концентрации микроботов. Методом Галеркина получена конечномерная динамическая модель 7-го порядка, в которой первое уравнение описывает скорость жидкости в канале, два уравнения описывают динамику тепловых мод и четыре уравнения определяют динамику концентрации роя ботов. Нелинейный анализ полученной модельной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) показывает, что при определенных условиях рой микроботов способен переключать режимы тепловой конвекции между стационарным, периодическим и хаотическим поведением. Показано, что управление зависит от плотности микроботов и скорости их перемещения в среде.

© Ступникова Анастасия Вячеславовна – аспирант кафедрой прикладной физики, e-mail: stypnast2014@yandex.ru.

Брацун Дмитрий Анатольевич – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной физики, e-mail: DABracun@pstu.ru, ORCID 0000-0002-3229-2330.



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

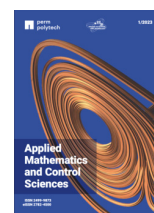
Perm Polytech Style: Stupnikova A.V., Bratsun D.A. Control of superheated fluid stability in a toroidal convective loop using a swarm of microbots. *Applied Mathematics and Control Sciences*. 2025, no. 1, pp. 6-20. DOI: 10.15593/2499-9873/2025.1.01

MDPI and ACS Style: Stupnikova, A.V.; Bratsun, D.A. Control of superheated fluid stability in a toroidal convective loop using a swarm of microbots. *Appl. Math. Control Sci.* **2025**, *1*, 6-20. <https://doi.org/10.15593/2499-9873/2025.1.01>

Chicago/Turabian Style: Stupnikova, Anastasya V., and Dmitrii A. Bratsun. 2025. "Control of superheated fluid stability in a toroidal convective loop using a swarm of microbots". *Appl. Math. Control Sci.* no. 1: 6-20. <https://doi.org/10.15593/2499-9873/2025.1.01>



APPLIED MATHEMATICS
AND CONTROL SCIENCES
№ 1, 2025
<https://ered.pstu.ru/index.php/amcs>



Article

DOI: 10.15593/2499-9873/2025.1.01

UDC 519.7:573



Active control of superheated fluid stability in a toroidal convective loop using a swarm of microbots

A.V. Stupnikova, D.A. Bratsun

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 27 February 2025

Approved: 14 April 2025

Accepted for publication:

18 April 2025

Funding

The study was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (grant No. FSNM-2023-0003).

Conflicts of Interest

The authors declare no conflict of interest.

Author Contributions

equivalent.

Keywords:

active control, fluid stability, bioconvection, programmable microbots

ABSTRACT

In recent years, the attention of researchers has been attracted by an active fluid that includes elements (cells, macromolecules, bacteria) capable of self-motion. The behavior of such a fluid is determined by the ability of the elements to transform the energy of the medium into mechanical work and create new medium states. The use of programmable microbots opens up opportunities to achieve such states that are not observed in natural conditions. In this paper, we assume that freely floating microbots have the property of thermotaxis, i.e. they exhibit a motor response to a temperature gradient. Since the density of the bots themselves can be set during their production, the swarm can locally create a density that differs from the density of the pure medium. Thus, the collective actions of bots to redistribute the swarm concentration in the liquid can potentially compensate for changes in the density of a critically overheated liquid in real time.

In this paper, we theoretically study the possibility of a swarm to actively control a physical system considering a toroidal thermosyphon, which is a narrow closed channel with a circular cross-section, under the action of gravity and a given heat flow through the boundaries. We develop a mathematical model of the phenomenon, which includes equations of fluid motion, heat transfer, and microbots concentration. Then we apply the Galerkin method to obtain a finite-dimensional dynamic model of the 7th order, in which the first equation describes the fluid velocity in the channel, two equations describe the dynamics of thermal modes, and remaining equations determine the dynamics of the swarm of bots. Nonlinear analysis of the resulting model ODEs shows that under certain conditions, a swarm of microbots is able to switch stationary thermal convection to periodic and chaotic regimes. We demonstrate that the control critically depends on the speed of the swarm's reaction to external changes and the density of microbots.

© Anastasia V. Stupnikova – Ph. D. student of the Department of Applied Physics, e-mail: stypnast2014@yandex.ru.

Dmitry A. Bratsun – Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Head of the Department of Applied Physics, e-mail: DABracun@pstu.ru, ORCID 0000-0002-3229-2330.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

Введение

Вопросы управления процессами тепломассопереноса вызывают значительный интерес, как с фундаментальной точки зрения, так и в связи с многочисленными технологическими приложениями. Необходимость применения управления с обратной связью обсуждалась еще в монографии [1], посвященной стабилизации неустойчивостей высокотемпературной плазмы, возникающих в токамаках. В работе развивается идея о пространственно-распределенном регуляторе, который активно взаимодействует со сплошной средой. В результате динамические характеристики среды с точки зрения производственных процессов могут значительно улучшиться. В отличие от классической постановки задачи в теории автоматического управления, где объект и регулятор являются системами с сосредоточенными параметрами, здесь объект и управляющее устройство представляют собой континуальные среды. Поэтому ключевой вопрос, заданный в [1]: может ли в принципе быть реализовано такое устройство? Заметим, что развитие технологий предполагает разработку систем автоматического управления, которые не требуют постоянного вмешательства человека. В работах [2; 3] на примере одномерного течения в конвективной петле тороидальной формы было продемонстрировано экспериментально и теоретически, что такое распределенное управление осуществить возможно. В работах использовалась специальная система неоднородного нагрева, которая оказалась способна поддерживать течение стационарным при таких значениях параметров, когда в отсутствие управления реализуется хаотический режим. Более эффективный способ внешнего управления был рассмотрен в работах [4–6], где активное автоматическое управление осуществлял компьютер, который, получая информацию с термопары о направлении течения, наклонял термосифон в поле тяжести таким образом, чтобы течение затухало. В этих работах удалось стабилизировать состояние механического равновесия. После выхода этих исследований стало понятно, что принципиальных ограничений по реализации управления сплошной средой нет. Для сред в 2D или 3D требуется лишь хороший вычислитель и механизм управления, действующий по возможности с меньшей задержкой по времени.

Примеры управления сплошной средой, которые приведены выше, касались внешнего управления. А может ли среда сама управлять своим состоянием? Одной из актуальных проблем механики сплошных сред в настоящее время является поведение активной жидкости. Под этим термином понимается вязкая суспензия частиц, клеток, макромолекул или бактерий, которые способны к самодвижению, преобразованию энергии движения в механическую работу и созданию новых состояний среды [7]. Обсудим естественное взаимодействие одноклеточных организмов. Прекрасным примером самоорганизации в биологических системах является морфогенез [8]. Это динамический процесс пространственной организации клеток. Бактерии также создают колонии для оптимизации транспортировки и потребления питательных веществ. Большие группы многоклеточных организмов объединяются и активно сотрудничают в процессе создания эмбриона, образуя ткани и органы. Подобные биосистемы также могут быть представлены как активные физические среды с набором специально подобранных активных сил. Законы адаптации больших групп клеток сейчас достаточно хорошо изучены [9]. Простейшей динамической моделью является модель Лотки – Вольтерра, описывающая саморегуляцию двух видов с задержкой по времени [10–12]. Если взаимодействие микробов развивается в среде, это приводит к новому кругу явлений. Например, может наблюдаться

биоонвекция, которая возникает в результате гидродинамической неустойчивости во взвесах с плавающими микроорганизмами [13]. Для эволюционирующих во времени внешних систем с хозяином, например, вирусом, управляющим хемотаксисом, используется упрощенная модель Келлера – Сегеля [14–17].

Новое направление исследования включает анализ самоорганизации в среде искусственных образований [18; 19]. В работе [18] был продемонстрирован морфогенез в 2D-пространстве на примере группы из сотен макроскопических ботов, каждый из которых был способен к самодвижению и обмену простейшими сообщениями с соседями. Авторам удалось достичь в среде ботов биологообразного морфогенеза. В [19] было показано, что рой ботов способен к биоонвекции, которая ранее традиционно связывалась только с живыми системами. В недавних работах была доказана технологическая возможность создания более сложной жидкой среды, которая включает множество микроскопических подвижных устройств, способных к плаванию и коммуникации между собой [20; 21]. В этих работах ученым удалось внедрить биогибридный подход, объединяющий микро- и наноразмерные компоненты с живыми бактериями. В созданной агентной вычислительной модели управление осуществлялось как централизованно, так и децентрализованно. В первом случае миграция ботов осуществляется с помощью хемотаксиса, во втором – чувство кворума позволяло агентам независимо координировать совместное поведение. Такая модель может служить полезным инструментом для прогнозирования роевого поведения с настраиваемой динамической реакцией. Мы считаем, что насыщенная микробами жидкая среда, введенная в рассмотрение в [20; 21], имеет принципиальные отличия от просто активной жидкости в том, что поведение ботов может быть запрограммировано. Поэтому имеет смысл эту среду определить новым термином – *роботизированная жидкость*.

В данной работе мы исследуем нелинейную устойчивость роботизированной жидкости. Рассматривается простейшая модель одномерного течения в тороидальном термосифоне, а движение роя ботов осуществляется благодаря термотаксису. Так как плотность микроба является контрольным параметром и может отличаться от плотности жидкости, то рой способен влиять на локальную плотность среды, перестраивая свои порядки.

Математическая модель

Рассмотрим следующую физическую систему, схематически представленную на рис. 1. Пусть замкнутая трубка радиуса R с круглым поперечным сечением диаметра d и площадью A заполнена вязкой несжимаемой жидкостью, которая характеризуется референтной плотностью ρ_0 и коэффициентом динамической вязкости η . Трубка ориентирована вертикально по отношению к полю тяжести и нагревается снизу таким образом, чтобы было возможно наступление конвективной неустойчивости жидкости внутри. Закон нагрева трубки может быть достаточно разнообразный, включая случай не строго вертикального градиента под углом α к ускорению свободного падения $\mathbf{g}$. Такая система называется конвективной петлей или термосифоном. В случае очень тонкой трубки $d \ll R$ течение жидкости является квазиодномерным, что существенно упрощает анализ. Это объясняет популярность данной схемы среди гидродинамиков при рассмотрении различных модельных ситуаций [22; 23]. Кроме того, термосифон интересен и сам по себе и имеет множество вполне конкретных технологических приложений [24].

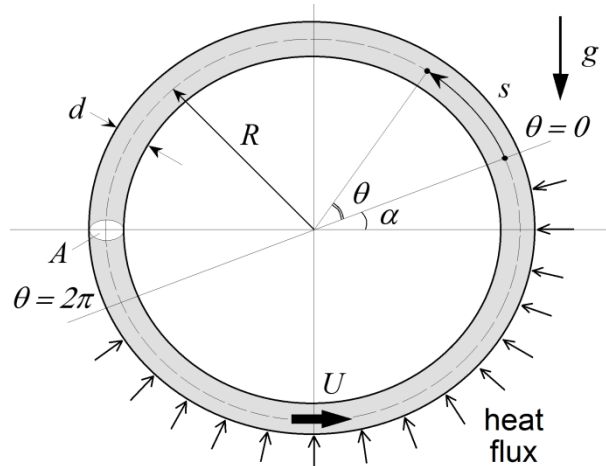


Рис. 1. Схематическое изображение тороидальной конвективной петли

Получим уравнение движения жидкости в приближении одномерного течения. Исходное уравнение Навье – Стокса для динамики жидкости в трубке имеет вид:

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mathbf{F}, \quad (1)$$

где $\mathbf{v}$ – полное трехкомпонентное поле скорости, $\mathbf{F}$ – сила сопротивления, возникающая при трении вязкой жидкости о стенки трубки. В правой части указана плотность среды ρ с учетом возможной неоднородности этой среды. Эту величину определим ниже. Систему удобно рассматривать в полярных координатах (R, θ) , в которой угол отсчитывается так, как это показано на рис. 1. Введем в рассмотрение координату вдоль замкнутого контура конвективной петли: $s = R\theta$. Проектируя (1) на направление обхода контура, получим:

$$\rho_0 \left(\frac{dv}{dt} \right)_s = -\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g \cos(\alpha + \theta) - F_s. \quad (2)$$

Вообще говоря, скорость $\mathbf{v}$ в простейшем случае ламинарного течения имеет параболический профиль из-за вязкости жидкости. Введем в рассмотрение среднюю скорость течения $U(t)$, которая имеет смысл расхода жидкости через поперечное сечение:

$$U(t) = \frac{1}{A} \int v_s dA. \quad (3)$$

Интегрируя уравнение (2) сначала по поперечному сечению петли, а затем по контуру, а также учитывая (3) и замкнутость контура, получим классическое интегро-дифференциальное уравнение для расхода [22]:

$$\frac{dU}{dt} = -\gamma U - \frac{gR}{\rho_0 AL} \oint \rho(\theta) \cos(\alpha + \theta) d\theta dA, \quad (4)$$

где L – длина контура, γ – коэффициент диссипации, который для конвективной петли круглого сечения может быть вычислен точно: $\gamma = 32\eta/\rho_0 d^2$ [23]. Как видно из (4), устойчивость жидкости определяется тем, каким образом плотность среды распределяется по контуру. Плотность среды может меняться благодаря двум причинам: во-первых, внешний нагрев трубки делает элемент среды легче; во-вторых, рой ботов, каждый из которых тяжелее несущей жидкости, утяжеляет и элемент среды. В линейном приближении получим:

$$\rho(t, \theta) = \rho_0 \left[1 - \beta T(t, \theta) + V \left(\frac{\rho_b}{\rho_0} - 1 \right) n(t, \theta) \right], \quad (5)$$

где β – коэффициент теплового расширения несущей жидкости, ρ_b – средняя плотность одного микробота, V – объем микробота, n – концентрация ботов в единице объема жидкости. Как видно из (5), причины локальных вариаций плотности действуют разнонаправленно, что создает базу для компенсации одного механизма действием другого. Подставляя (5) в (4), получим уравнение движения нагретой среды, насыщенной микроботами:

$$\frac{dU(t)}{dt} = -\gamma U(t) + \frac{g\beta}{2\pi} \oint T(t, \theta) \cos(\alpha + \theta) d\theta - \frac{gV}{2\pi} \left(\frac{\rho_b}{\rho_0} - 1 \right) \oint n(t, \theta) \cos(\alpha + \theta) d\theta. \quad (6)$$

Заметим, что из-за непрерывности течения, расход U имеет одинаковое значение в любой точке контура и зависит только от времени, в то время как T и n зависят от θ .

Так как микроботы слишком малы, чтобы участвовать в теплообмене, то уравнение теплопроводности мало отличается от классического [22; 23]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{U}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{Q_{\text{ext}}(\theta)}{\rho_0 C_p A}, \quad (7)$$

где функция Q_{ext} определяет, как нагревается трубка термосифона извне, C_p – теплоемкость среды. Уравнение (7) учитывает конвективный перенос тепла вдоль трубки, но пренебрегает диффузией тепла из-за тонкости этой трубки. Будем использовать простейшее приближение известного теплотокота, предложенное в [23]:

$$Q_{\text{ext}}(\theta) = -Q_0 \sin(\theta), \quad (8)$$

где Q_0 – константа, имеющая смысл максимального значения теплотокота. Формула (8) означает, что часть термосифона выше линии $\theta = 0$ охлаждается, а ниже – нагревается.

Наконец, обсудим уравнение динамики роя микроботов. Структура уравнения для концентрации напоминает (7), за исключением внешнего потока, который в случае микроботов отсутствует. Поток ботов, описывающий их самодвижение, запишем так:

$$j = nk \frac{\partial T}{\partial s}, \quad (9)$$

где k – важный параметр, определяющий скорость движения микроботов в среде. Выражение (9) означает движение роя в сторону увеличения температуры, т.е. термотаксис. Пренебрегая явлением термодиффузии (диффузия тепла также не учитывается), получим:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{U}{R} \frac{\partial n}{\partial \theta} = -\frac{k}{\rho_0 R^2} \frac{\partial n}{\partial \theta} \frac{\partial T}{\partial \theta}. \quad (10)$$

Уравнения (6)–(8), (10) составляют полную систему интегро-дифференциальных уравнений для временной эволюции нагретой жидкости, насыщенной микропловцами. В принципе эта система уже может решаться численно, но в данной работе мы редуцируем ее к системе ОДУ, используя метод Галеркина [25]. Уравнение (6) уже зависит только от времени, но не от положения в контуре, так как скорость имеет одно и то же значение во всех точках термосифона. Уравнения для температуры (8) и концентрации (10) требуют редукции. Процедура включает выбор ортонормированного базиса, разложение функций по этому ба-

зису, проектирование системы (6)–(8), (10) на спектральное пространство базисных функций, наконец, обрезание рядов для получения конечномерного сбалансированного приближения. Достоинством такого подхода является замена системы уравнений (6)–(8), (10) более простой системой ОДУ, которая позволит проводить расчеты длительных нестационарных режимов работы термосифона. Однако стоит помнить, что метод Галеркина позволяет получить приближенное решение, привязанное к точке первой бифуркации.

Опираясь на симметрию задачи, в качестве ортонормированного базиса возьмем набор гармонических функции разной четности. Тогда температура и концентрация могут быть представлены в виде следующих разложений:

$$T(t, \theta) = T_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} [T_i^c(t) \cos(m\theta) + T_i^s(t) \sin(m\theta)], \quad (11)$$

$$n(t, \theta) = N_0 + \sum_{i=1}^{\infty} [N_i^c(t) \cos(m\theta) + N_i^s(t) \sin(m\theta)], \quad (12)$$

где T_i и N_i – зависящие от времени коэффициенты, требующие определения. Заметим, что разложение (12) автоматически удовлетворяет требованию сохранения числа микроботов в термосифоне. Запишем уравнения в частных производных (7) и (10) в следующем операторном виде:

$$\Phi_T(T, n) = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{U}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{Q_0}{\rho_0 C_p A} \sin(\theta) = 0, \quad \Phi_n(T, n) = \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{U}{R} \frac{\partial n}{\partial \theta} + \frac{k}{\rho_0 R^2} \frac{\partial n}{\partial \theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0. \quad (13)$$

Согласно методу Галеркина [25], коэффициенты T_i и N_i определяются из требования ортогональности операторов (13) системе пробных функций f_i , которая совпадает с базисными функциями:

$$\langle f_i, \Phi_T(T, n) \rangle = 0, \quad \langle f_i, \Phi_n(T, n) \rangle = 0. \quad (14)$$

Здесь угловые скобки обозначают операцию взятия скалярного произведения, заданного в функциональном пространстве базиса. Для данной задачи – это интегрирование по контуру.

Анализ уравнений показывает, что минимальная замкнутая динамическая модель с нетривиальным поведением получается для шести базисных функций – две для поля температуры и четыре – для концентрации. Тогда получим в безразмерной форме:

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{d\tau} &= -X_1 + X_2 \cos(\alpha) - X_3 \sin(\alpha) - \left(\frac{\rho_b}{\rho_0} - 1 \right) [X_4 \cos(\alpha) - X_5 \sin(\alpha)], \\ \frac{dX_2}{d\tau} &= -X_1 X_3, \\ \frac{dX_3}{d\tau} &= X_1 X_2 - Q, \\ \frac{dX_4}{d\tau} &= -X_1 X_5 - K [X_2 X_6 + X_3 X_7], \\ \frac{dX_5}{d\tau} &= X_1 X_4 + K [X_3 X_6 - X_2 X_7], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{dX_6}{d\tau} = -2X_1X_7 + 0,5K[X_2X_4 - X_3X_5],$$

$$\frac{dX_7}{d\tau} = 2X_1X_6 + 0,5K[X_3X_4 + X_2X_5].$$

Уравнения (15) были обезразмерены следующим образом:

$$\tau \equiv \gamma t, \quad X_1 \equiv \frac{U}{R\gamma}, \quad X_2 \equiv \frac{g\beta T_1^c}{2R\gamma^2}, \quad X_3 \equiv \frac{g\beta T_1^s}{2R\gamma^2},$$

$$X_4 \equiv \frac{N_1^c}{N}, \quad X_5 \equiv \frac{N_1^s}{N}, \quad X_6 \equiv \frac{N_2^c}{N}, \quad X_7 \equiv \frac{N_2^s}{N},$$

где N – подходящая величина для измерения концентрации.

Можно заметить, что система (15) содержит четыре безразмерных параметра, определяющих ее динамику. Это отношение плотности ботов к плотности жидкости, угол между градиентом температуры в нагревателе и силой тяжести, а также еще два параметра:

$$Q = \frac{Q_0}{\rho_0 C_p A \gamma \Theta}, \quad K = \frac{\gamma k}{g\beta R}, \quad (16)$$

первый из которых представляет максимальную амплитуду внешнего теплотока, а второй – безразмерную скорость перемещения ботов в среде.

Обратим внимание на очевидные свойства динамической системы (15). При $\rho_b = \rho_0$ моды 4–7 перестают оказывать влияние на динамику изменения физического состояния термосифона, так как плотность ботов становится не отличимой от плотности несущей жидкости. Физическая часть системы замыкается на себя:

$$\frac{dX_1}{d\tau} = -X_1 + X_2 \cos(\alpha) - X_3 \sin(\alpha), \quad \frac{dX_2}{d\tau} = -X_1X_3, \quad \frac{dX_3}{d\tau} = X_1X_2 - Q, \quad (17)$$

а остальная часть эволюционирует под влиянием изменений в среде.

В случае $\rho_b \neq \rho_0$ микроботы получают возможность влиять на физическое состояние системы. При этом важнейшую роль начинает выполнять параметр K (16), который обеспечивает обратную связь между физическим состоянием термосифона, которое определяется модами 1–3 и конфигурацией роя, описываемой модами 4–7. Изменение распределения температуры (моды 2 и 3) приводит к изменению скорости течения жидкости (мода 1), что оказывает непосредственное влияние на положение роя, который через слагаемые термотаксиса пытается сбалансировать состояние системы. В случае $K = 0$ ответ роя всегда пассивный, и самоуправление в системе не происходит.

Результаты анализа математической модели

Обсудим сначала динамические свойства динамической системы (17), которая описывает поведение термосифона, когда он функционирует независимо от роя микроботов. Анализ уравнений показывает, что при любых значениях параметров система имеет два состояния, которые расположены симметрично относительно начала отсчета:

$$O^+(\sqrt{Q \cos(\alpha)}, \sqrt{\frac{Q}{\cos(\alpha)}}, 0), \quad O^-(-\sqrt{Q \cos(\alpha)}, -\sqrt{\frac{Q}{\cos(\alpha)}}, 0). \quad (18)$$

Так как первая фазовая координата определяет скорость жидкости, то состояния равновесия (18) соответствуют двум разным закруткам жидкости в термосифоне. Анализ устойчивости равновесий O^+ и O^- включает линеаризацию уравнений (17) вблизи точек (18) и решение характеристического уравнения:

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda \left[\pm \sqrt{\frac{Q}{\cos(\alpha)}} \sin(\alpha) + Q \cos(\alpha) \right] + 2Q \cos(\alpha) = 0, \quad (19)$$

где знаки «+» и «-» соответствуют аттракторам O^+ и O^- . Изменение направления теплопотока в термосифоне по отношению к вектору силы тяжести создает предпочтение той или иной закрутке жидкости в замкнутой петле. А именно при $\alpha > 0$ устойчивым равновесием является O^+ , так как нагрев помогает двигаться жидкости против часовой стрелки (см. рис. 1), а равновесие O^- неустойчиво. При $\alpha < 0$ аттракторы меняются свойствами устойчивости. Можно заметить, что система (17) инварианта относительно преобразования:

$$X_1 \rightarrow -X_1, \quad X_2 \rightarrow -X_2, \quad X_3 \rightarrow X_3, \quad \alpha \rightarrow -\alpha. \quad (20)$$

Решение уравнения (19) приводит к следующему условию нейтральной устойчивости:

$$Q = \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^3(\alpha)}. \quad (21)$$

Черная сплошная линия на рис. 2 соответствует нейтральной кривой (21). Надо иметь в виду, что правая и левая части кривой относятся к разным равновесиям – соответственно к O^+ и O^- . Анализ спектра этих равновесий показывает, что происходит бифуркация Андронова – Хопфа. Ниже нейтральной кривой в системе имеется один устойчивый фокус, который притягивает к себе все траектории. Интегрирование уравнений (17) при $\alpha = \pi/3$, $Q = 4$ с начальными условиями (1,1,1) приводит к фазовому портрету 1 на рис. 2. При пересечении нейтральной кривой от фокуса ответвляется устойчивый предельный цикл (см. фазовый портрет 2 на рис. 2, полученный при $\alpha = \pi/4$, $Q = 4$). В момент рождения цикла осцилляции переменной X_1 происходят только в положительной области, т.е. жидкость движется все время в одну сторону, то замедляясь, то ускоряясь. Однако рост амплитуды цикла приводит к тому, что направление закрутки начинается меняться на каждом периоде колебаний. В целом карта устойчивости симметрична относительно вертикальной оси благодаря свойству (20).

Дальнейший рост теплопотока Q приводит к дальнейшему усложнению динамики системы (17). Как видно из рис. 2, в полосе между нейтральной кривой бифуркации Андронова – Хопфа и красной линией происходит каскад удвоения периода предельного цикла. В результате реализации сценария Фейгенбаума рождается странный аттрактор (см. фазовый портрет 3 на рис. 2, полученный при $\alpha = 0$, $Q = 4$). При $\alpha \neq 0$ хаотический аттрактор имеет несимметричную форму, так как неидельно вертикальный теплопоток всегда поддерживает определенную закрутку жидкости. Это означает, что фазовая траектория предпочитает чаще накручиваться на одно из «крыльев бабочки» аттрактора.

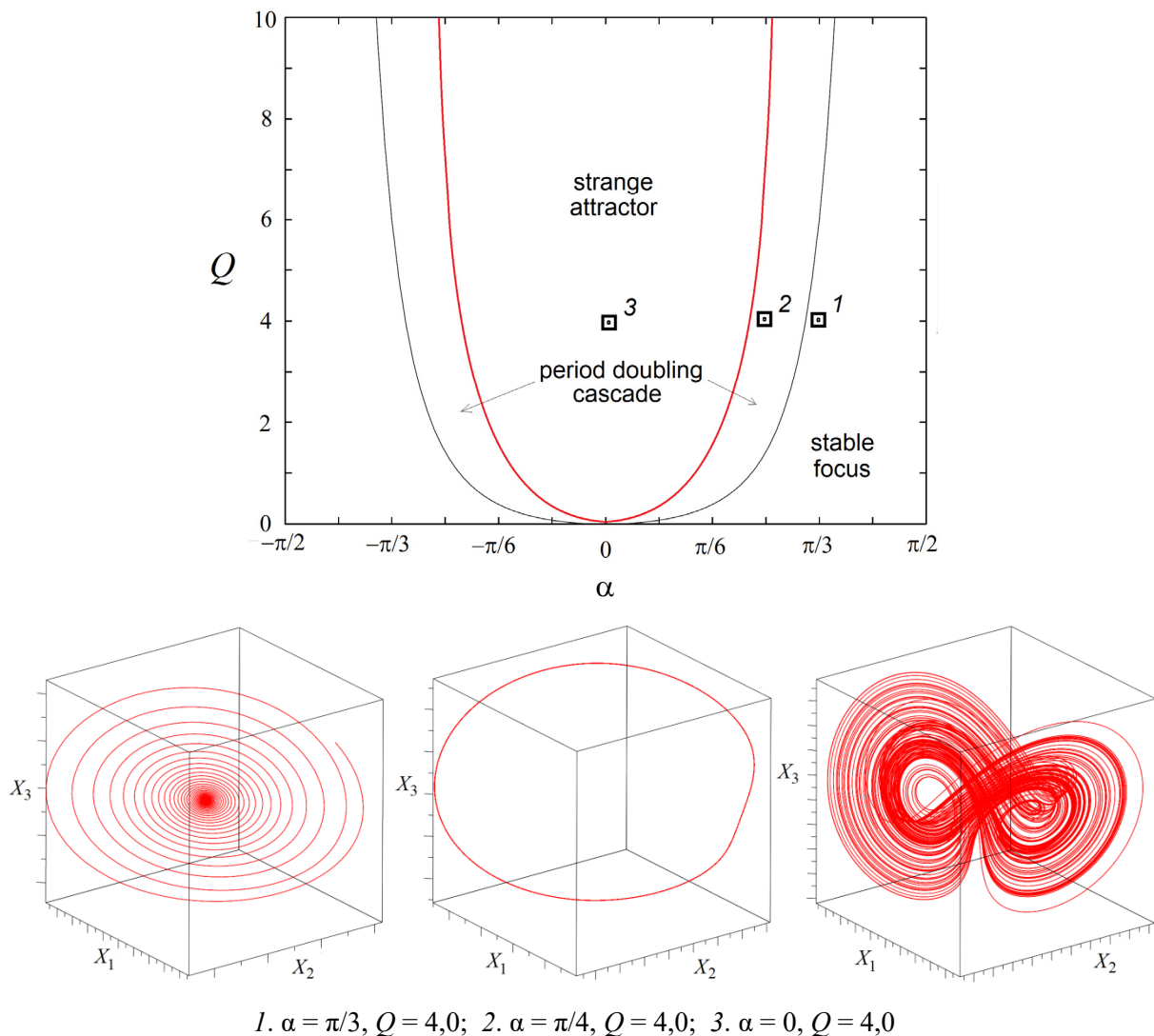


Рис. 2. Карта устойчивости для динамической системы (17), описывающей поведение физической системы термосифона, на плоскости управляющих параметров угла наклона теплопотока α к направлению силы тяжести и интенсивности теплопотока Q . Черная линия отвечает бифуркации Андронова – Хопфа, красная линия показывает возникновение странного аттрактора. Ниже черной линии система всегда имеет устойчивое состояние равновесия в виде фокуса. Между кривыми наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода цикла. Точки 1, 2, 3 на карте соответствуют значениям параметров, для которых приведены фазовые портреты. Фазовые портреты получены при интегрировании уравнений (17) с начальными условиями (1,1,1)

Карта устойчивости на рис. 2 не включает окна стабилизации в хаотической области до периодического режима. Такое поведение характерно для детерминированного хаоса и обсуждалось в литературе по динамическим системам [26].

Рассмотрим теперь иллюстративно свойства динамической системы (15), которая включает моды биоконвекции роя микроботов. Зафиксируем физические параметры термосифона: $\alpha = \pi/3, Q = 0,1$. Будем рассматривать небольшой теплопоток, так как модель (15) является маломодовой, и она работает точнее при небольших значениях параметра, определяющего энергетические свойства конвекции. Наклон теплопотока по отношению к силе тяжести означает, что в петле устанавливается стационарный режим конвекции, при котором жидкость движется против часовой стрелки с постоянной скоростью (см. рис. 1).

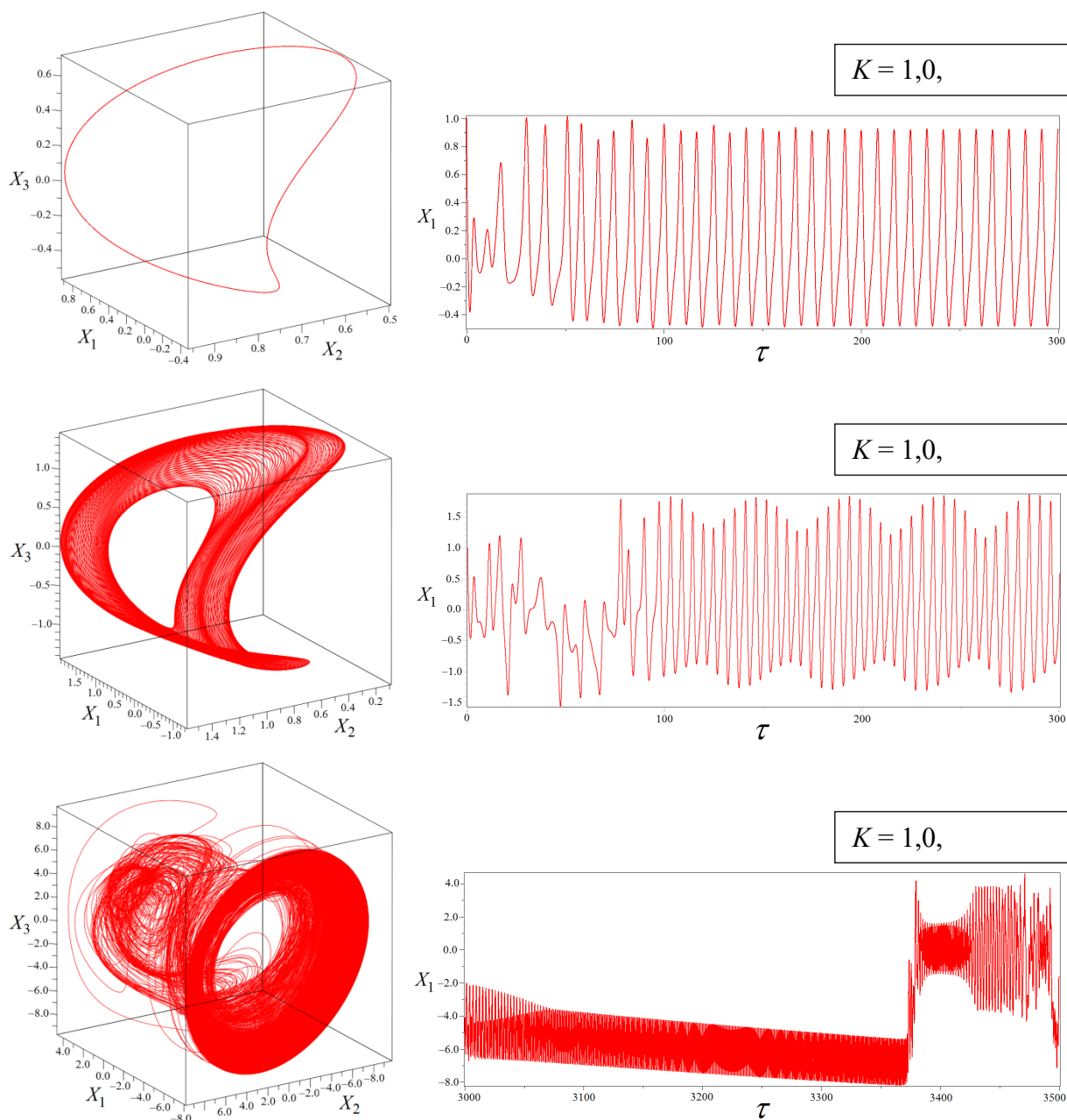


Рис. 3. Фазовые портреты (слева) и зависимости скорости жидкости от времени (справа) для динамических режимов, в которых рой микроботов оказывает непосредственное влияние на физическое состояние термосифона. Параметры конвективной петли фиксированы: $\alpha = \pi/3$, $Q = 0,1$. Параметры роя для каждого случая приведены на рисунке. Фазовые портреты получены при интегрировании уравнений (15) с начальными условиями $(1,1,1,1,0,0,0)$

Рисунок 3 показывает, как изменяется динамический режим конвекции при постепенном изменении плотности микроботов ρ_b и фиксированной скорости их движения $K = 1$. Как видно из рис. 3, поведение системы существенно усложняется. При $\rho_b = 2\rho_0$ можно наблюдать реализацию периодической конвекции, причем на каждом периоде жидкость в какой-то момент меняет направление движения (движение по часовой стрелке). Движение роя и жидкости вступают в сложное динамическое взаимодействие друг с другом: увеличение плотности микроботов в определенных местах контура приводит к утяжелению среды и движению жидкости против направления естественной конвекции. При $\rho_b = 3\rho_0$ мож-

но наблюдать возбуждение квазипериодических колебаний, представленных в фазовом пространстве двумерным тором. При дальнейшем изменении параметра поведение системы хаотизируется, что приводит к появлению странного аттрактора. Например, при $\rho_b = 11\rho_0$ рой закручивает движение жидкости в неестественном для тепловой конвекции направлении – по часовой стрелке. Этот квазирежим может поддерживаться достаточно долго, после чего происходит внезапный срыв к естественной конвекции: на рисунке этот момент можно видеть при $\tau = 3380$. Через какое-то время система вновь возвращается к неестественной закрутке жидкости. В теории динамических систем такое поведение определяется как хаос с перемежаемостью. Если зафиксировать плотность микроботов и варьировать параметр K , то наблюдается сходный переход к сложной нестационарной конвекции.

Заключение

В работе предложена простая математическая модель тепловой конвекции в неоднородно нагретом термосифоне, заполненном взвесью микроботов, способных к самодвижению в несущей жидкости. Для описания тепловой конвекции использованы уравнения Навье – Стокса в приближении Буссинеска. Для замыкания уравнений было предложено рассматривать термотаксис в качестве основного закона движения микроботов. Сформулирована математическая задача в частных производных для скорости жидкости, полей температуры и концентрации роя в жидкости. Для получения приближенного решения задачи использован метод Галеркина, с помощью которого определяющие уравнения были сведены к конечномерной модели, представленной системой ОДУ для нескольких ведущих мод. Исследованы свойства физической подсистемы термосифона, а также динамические свойства тепловой конвекции при непосредственном влиянии роя на нелинейную динамику исследуемой системы.

Список литературы

1. Ладиков, Ю.П. Стабилизация процессов в сплошных средах / Ю.П. Ладиков. – М.: Наука, 1978. – 432 с.
2. Singer, J. Active control of convection / J. Singer, H. Bau // *Phys. Fluids A*. – 1991. – Vol. 3. – P. 2859–2865. DOI: 10.1063/1.857831
3. Wang, Y. Controlling chaos in a thermal convection loop / Y. Wang, J. Singer, H. Bau // *J. Fluid Mech.* – 1992. – Vol. 237. – P. 479–498. DOI: 10.1017/S0022112092003501
4. Об активном управлении равновесием жидкости в термосифоне / Д.А. Брацун, А.В. Зюзгин, К.В. Половинкин, Г.Ф. Путин // *ПЖТФ*. – 2008. – Т. 34, Вып. 15. – С. 36–42. DOI: 10.1134/S1063785008080075
5. Bratsun, D.A. Delay-induced oscillations in a thermal convection loop under negative feedback control with noise / D.A. Bratsun, I.V. Krasnyakov, A.V. Zyuzgin // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* – 2017. – Vol. 47. – P. 109–126. DOI: 10.1016/j.cnsns.2016.11.015
6. Bratsun, D. Active Control of Thermal Convection in a Rectangular Loop by Changing its Spatial Orientation / D. Bratsun, I. Krasnyakov, A. Zyuzgin // *Microgravity Sci. Technol.* – 2018. – Vol. 30, No. 1–2. – P. 43–52. DOI: 10.1007/s12217-017-9573-6
7. Saintillan, D. Rheology of Active Fluids // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – 2018. – Vol. 50. – P. 563–592. DOI: 10.1146/annurev-fluid-010816-060049
8. Pismen, L. *Morphogenesis Deconstructed: An Integrated View of the Generation of Forms* / L. Pismen. – Springer Cham, Switzerland, 2020. – 146 p.

9. Chemotaxis and cross-diffusion models in complex environments: Models and analytic problems toward a multiscale vision / N. Bellomo, N. Outada, J. Soler, Y. Tao, M. Winkler // *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. – 2022. – Vol. 32, no. 4. – P. 713–792. DOI: 10.1142/S0218202522500166
10. Gou, W. Application of Lotka-Volterra Algorithm Model in Ecosystem Assessment / W. Gou, H. Xue, J. Chang // *Smart Infrastructures in the IoT Era*. – Springer Cham, Switzerland. – 2025. – P. 437–451. DOI: 10.1007/978-3-031-72509-8_37
11. Huang, Q. An Ecological Network Analysis Based on The Lotka-Volterra Model / Q. Huang, J. Huang // *Highlights in Science, Engineering and Technology*. – 2024. – Vol. 101. – P. 340–347. DOI: 10.54097/z125v270
12. Su, Y. Symbiosis Evolution of Regional Knowledge Innovation Ecosystem: The Relevance of Lotka–Volterra Model / Y. Su, Y. Yan, C. Liu // *Science, Technology and Society*. – 2024. – Vol. 29, № 3. DOI: 10.1177/09717218241232857
13. Hill, N.A. Bioconvection / N.A. Hill, T.J. Pedley // *Fluid Dynamics Research*. – 2005. – Vol. 37, no. 1-2. – P. 1. DOI: 10.1016/j.fluiddyn.2005.03.002
14. Bellomo, N. From a multiscale derivation of nonlinear cross-diffusion models to Keller–Segel models in a Navier–Stokes fluid / N. Bellomo, A. Bellouquid, N. Chouhad // *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. – 2016. – Vol. 26, № 11. – P. 2041–2069. DOI: 10.1142/S0218202516400078
15. Liu, Y. Boundedness in a high-dimensional forager–exploiter model with nonlinear resource consumption by two species / Y. Liu, Y. Zhuang // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. – 2020. – Vol. 71, № 5. – P. 151. DOI: 10.1007/s00033-020-01376-8
16. Winkler, M. Does fluid interaction affect regularity in the three-dimensional Keller–Segel system with saturated sensitivity? / M. Winkler // *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*. – 2018. – Vol. 20. – P. 1889–1909. DOI: 10.1007/s00021-018-0395-0
17. Winkler, M. A three-dimensional Keller–Segel–Navier–Stokes system with logistic source: global weak solutions and asymptotic stabilization / M. Winkler // *Journal of Functional Analysis*. – 2019. – Vol. 276, № 5. – P. 1339–1401. DOI: 10.1016/j.jfa.2018.12.009
18. Morphogenesis in robot swarms / I. Slavkov, D. Carrillo-Zapata, N. Carranza, X. Diego, F. Jansson, J. Kaandorp, S. Hauert, J. Sharpe // *Science Robotics*. – 2018. – Vol. 3, № 25. – P. 1–16. DOI: 10.1126/scirobotics.aau9178
19. Bratsun, D.A. Phase Transition in a Dense Swarm of Self-Propelled Bots / D.A. Bratsun, K.V. Kostarev // *Fluid Dynamics & Materials Processing*. – 2024. – Vol. 20, iss. 8. – P. 1785–1798. DOI: 10.32604/fdmp.2024.048206
20. Leaman, E.J. Hybrid centralized/decentralized control of bacteria-based bio-hybrid microrobots / E.J. Leaman, B.Q. Geuther, B. Behkam // *2018 International Conference on Manipulation, Automation and Robotics at Small Scales (MARSS): proceedings, Nagoya, Japan, 4–8 July 2018*. – IEEE, 2018. – P. 1–6. DOI: 10.1109/MARSS.2018.8481144
21. Leaman, E.J. Hybrid centralized/decentralized control of a network of bacteria-based bio-hybrid microrobots / E.J. Leaman, B.Q. Geuther, B. Behkam // *Journal of Micro-Bio Robotics*. – 2019. – Vol. 5, iss. 1. – P. 1–12. DOI: 10.1007/s12213-019-00116-0
22. Welander, P. On the oscillatory instability of a differentially heated fluid loop // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1967. – Vol. 29, no. 1. – P. 17–30. DOI: 10.1017/S0022112067000606
23. Nonlinear analysis of tilted toroidal thermosyphon models / A. Pacheco-Vega, W. Franco, H.C. Chang, M. Sen // *Int. J. Heat Mass Transf.* – 2002. – Vol. 3, no. 7. – P. 1379–1391. DOI: 10.1016/S0017-9310(01)00265-4

24. Powers, J.M. *Mathematical Methods in Engineering* / J.M. Powers, M. Sen. – Cambridge University Press, 2015. – 633 p. DOI: 10.1017/CBO9781139583442
25. Канторович, Л.В. *Приближенные методы высшего анализа* / Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – М.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
26. Берже, П. *Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности* / П. Берже, И. Помо, К. Видал. – М.: Мир, 1991. – 368 с.

References

1. Ladikov Yu. P. *Stabilizatsia protsessov v sploshnyh sredah*. Moscow, Nauka, 1978, 432 p.
2. Singer J., Bau H. Active control of convection. *Phys. Fluids A*, 1991, vol. 3, pp. 2859–2865. DOI: 10.1063/1.857831
3. Wang Y., Singer J., Bau H. Controlling chaos in a thermal convection loop. *J. Fluid Mech.*, 1992, vol. 237, pp. 479–498. DOI: 10.1017/S0022112092003501
4. Bratsun D.A., Zyuzgin A.V., Polovinkin K.V., Putin G.F. Active control of fluid equilibrium in a thermosyphon. *Technical Physics Letters*, 2008, vol. 34, no. 8. pp. 650–652. DOI 10.1134/S1063785008080075
5. Bratsun D.A., Krasnyakov I.V., Zyuzgin A.V. Delay-induced oscillations in a thermal convection loop under negative feedback control with noise. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2017, vol. 47, pp. 109–126. DOI: 10.1016/j.cnsns.2016.11.015
6. Bratsun D., Krasnyakov I., Zyuzgin A. Active Control of Thermal Convection in a Rectangular Loop by Changing its Spatial Orientation. *Microgravity Sci. Technol.*, 2018, vol. 30, no. 1–2, pp. 43–52. DOI: 10.1007/s12217-017-9573-6
7. Saintillan D. Rheology of Active Fluids. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2018, vol. 50, pp. 563–592. DOI: 10.1146/annurev-fluid-010816-060049
8. Pismen L. *Morphogenesis Deconstructed*. Springer Cham, Switzerland, 2020. 146 p.
9. Bellomo N., Outada N., Soler J., Tao Y., Winkler M. Chemotaxis and cross-diffusion models in complex environments: Models and analytic problems toward a multiscale vision. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2022, vol. 32, no. 4, pp. 713–792. DOI 10.1142/S0218202522500166
10. Gou W., Xue H., Chang J. Application of Lotka-Volterra Algorithm Model in Ecosystem. Assessment. *Smart Infrastructures in the IoT Era*. – Cham: Springer Nature Switzerland, 2025, pp. 437–451. DOI: 10.1007/978-3-031-72509-8_37
11. Huang Q., Huang J. An Ecological Network Analysis Based on The Lotka-Volterra Model. *Highlights in Science, Engineering and Technology*, 2024, vol. 101, pp. 340–347. DOI: 10.54097/z125v270
12. Su Y., Yan Y., Liu C. Symbiosis Evolution of Regional Knowledge Innovation Ecosystem: The Relevance of Lotka–Volterra Model. *Science, Technology and Society*, 2024, vol. 29, iss. 3. DOI: 10.1177/09717218241232857
13. Hill N.A., Pedley T.J. Bioconvection. *Fluid Dynamics Research*, 2005, vol. 37, no. 1-2, Art. 1. DOI: 10.1016/j.fluiddyn.2005.03.002
14. Bellomo N., Bellouquid A., Chouhad N. From a multiscale derivation of nonlinear cross-diffusion models to Keller–Segel models in a Navier–Stokes fluid. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2016, vol. 26, iss. 11, pp. 2041–2069. DOI: 10.1142/S0218202516400078

15. Liu Y., Zhuang Y. Boundedness in a high-dimensional forager–exploiter model with nonlinear resource consumption by two species. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 2020, vol. 71, iss. 5, pp. 151. DOI: 10.1007/s00033-020-01376-8
16. Winkler M. Does fluid interaction affect regularity in the three-dimensional Keller–Segel system with saturated sensitivity? *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 2018, vol. 20, pp. 1889–1909. DOI: 10.1007/s00021-018-0395-0
17. Winkler M. A three-dimensional Keller–Segel–Navier–Stokes system with logistic source: global weak solutions and asymptotic stabilization. *Journal of Functional Analysis*, 2019, vol. 276, iss. 5, pp. 1339–1401. DOI: 10.1016/j.jfa.2018.12.009
18. Slavkov I., Carrillo-Zapata D., Carranza N., Diego X., Jansson F., Kaandorp J., Hauert S., Sharpe J. Morphogenesis in robot swarms. *Science Robotics*, 2018, vol. 3, no. 25, pp. 1–16. DOI: 10.1126/scirobotics.aau9178
19. Bratsun D.A., Kostarev K.V. Phase Transition in a Dense Swarm of Self-Propelled Bots. *Fluid Dynamics & Materials Processing*, 2024, vol. 20, iss. 8, pp. 1785–1798. DOI: 10.32604/fdmp.2024.048206
20. Leaman E.J., Geuther B.Q., Behkam B. Hybrid centralized/decentralized control of bacteria-based bio-hybrid microrobots. *Proceedings of 2018 International Conference on Manipulation, Automation and Robotics at Small Scales (MARSS)*, IEEE, 2018, pp. 1-6. DOI: 10.1109/MARSS.2018.8481144
21. Leaman E.J., Geuther B.Q., Behkam B. Hybrid centralized/decentralized control of a network of bacteria-based bio-hybrid microrobots. *Journal of Micro-Bio Robotics*, 2019, vol. 5, iss. 1, pp. 1–12. DOI: 10.1007/s12213-019-00116-0
22. Welander P. On the oscillatory instability of a differentially heated fluid loop. *Journal of Fluid Mechanics*, 1967, vol. 29, no. 1, pp. 17–30. DOI: 10.1017/S0022112067000606
23. Pacheco-Vega A., Franco W., Chang H.C., Sen M. Nonlinear analysis of tilted toroidal thermosyphon models. *International journal of heat and mass transfer*, 2002, vol. 3, no. 7, pp. 1379–1391. DOI: 10.1016/S0017-9310(01)00265-4
24. Powers J.M., Sen M. *Mathematical Methods in Engineering*. Cambridge University Press, 2015. 633 p. DOI: 10.1017/CBO9781139583442
25. Kantorovich L.V., Krylov V.I. *Priblizhennyye metody vysshego analiza*. Moscow, Fizmatgiz, 1962, 708 p.
26. Bergé P., Pomeau Y., Vidal C. *Order within Chaos: Towards a Deterministic Approach to Turbulence*. New York, USA: John Wiley & Sons, 1986, 329 p.