

Библиографическое описание согласно ГОСТ Р 7.0.100–2018

Ганичева, А. В. Математическая модель оптимального распределения ресурсов учебного процесса в нечетких условиях / А. В. Ганичева, А. В. Ганичев. – Текст : непосредственный. – DOI 10.15593/2499-9873/2025.1.03 // Прикладная математика и вопросы управления / Applied Mathematics and Control Sciences. – 2025. – № 1. – С. 35–46.



**пермский
политех**

**ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
И ВОПРОСЫ УПРАВЛЕНИЯ**

№ 1, 2025

<https://ered.pstu.ru/index.php/amcs>



Научная статья

DOI: 10.15593/2499-9873/2025.1.03

УДК 519.21



Математическая модель оптимального распределения ресурсов учебного процесса в нечетких условиях

А.В. Ганичева¹, А.В. Ганичев²

¹Тверская государственная сельскохозяйственная академия, Тверь, Российская Федерация

²Тверской государственный технический университет, Тверь, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 14 августа 2024

Одобрена: 03 марта 2025

Принята к публикации:

20 апреля 2025

Финансирование

Исследование не имело
спонсорской поддержки.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии
конфликта интересов.

Вклад авторов

равноценен.

Ключевые слова:

ресурсы, средства, мероприятия,
взвешенная сумма вероятностей,
оптимальное решение, нечеткие
треугольные числа

АННОТАЦИЯ

Одной из важнейших в экономике, учебном процессе и других сферах выступает задача рационального распределения ограниченных ресурсов. Актуальность решения данной проблемы определяется ростом стоимости ресурсов и увеличением их вклада в конечный продукт. В учебном процессе имеются задачи, требующие распределения ресурсов для их осуществления. Такими задачами являются, например, учебные задания, проекты, работы. В качестве ресурсов могут выступать часы учебных занятий, количество мероприятий, информационное обеспечение.

Целью статьи является разработка метода оптимального распределения ресурсов в учебном процессе в условиях неопределенности. Для достижения цели в качестве показателя эффективности выбрана взвешенная сумма вероятностей выполнения всех заданий данной работы; заданы ограничения, исходя из располагаемых ресурсов.

Разработан новый аналитический метод решения задачи распределения ресурсов. Метод основан на использовании неопределенных множителей Лагранжа. Проводится исследование и обоснование необходимого и достаточного условий существования экстремума целевой функции. Для учета нечеткости информации исходные данные задачи задаются в виде нечетких чисел треугольного вида. В разработанном методе выделяются три оптимизационных задачи нелинейного программирования для наилучших, средних и наихудших условий. Рассматривается решение задачи для распределения однородных и неоднородных ресурсов.

Результатом исследования является разработанный новый способ распределения однородных и неоднородных ресурсов в условиях неопределенности. Предложенный в статье метод может найти применение не только в учебном процессе, но и в других областях, например, в экономике, сельском хозяйстве.

© **Ганичева Антонина Валериановна** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Физико-математических дисциплин и информационных технологий», e-mail: TGAN55@yandex.ru, ORCID: 0000-0002-0224-8945.

Ганичев Алексей Валерианович – старший преподаватель кафедры «Информатики и прикладной математики», e-mail: alexej.ganichev@yandex.ru, ORCID: 0000-0003-3389-7582.



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

Perm Polytech Style: Ganicheva A.V., Ganichev A.V. Mathematical model of optimal allocation of educational process resources in fuzzy conditions. *Applied Mathematics and Control Sciences*. 2025, no. 1, pp. 35–46. DOI: 10.15593/2499-9873/2025.1.03

MDPI and ACS Style: Ganicheva, A.V.; Ganichev, A.V. Mathematical model of optimal allocation of educational process resources in fuzzy conditions. *Appl. Math. Control Sci.* **2025**, *1*, 35–46. <https://doi.org/10.15593/2499-9873/2025.1.03>

Chicago/Turabian Style: Ganicheva, Antonina V., and Alexey V. Ganichev. 2025. “Mathematical model of optimal allocation of educational process resources in fuzzy conditions”. *Appl. Math. Control Sci.* no. 1: 35–46. <https://doi.org/10.15593/2499-9873/2025.1.03>



APPLIED MATHEMATICS
AND CONTROL SCIENCES

№ 1, 2025

<https://ered.pstu.ru/index.php/amcs>



Article

DOI: 10.15593/2499-9873/2025.1.03

UDC 519.21



Mathematical model of optimal allocation of educational process resources in fuzzy conditions

A.V. Ganicheva¹, A.V. Ganichev²

¹Tver State Agricultural Academy, Tver, Russian Federation

²Tver State Technical University, Tver, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 14 August 2024

Approved: 03 March 2025

Accepted for publication:
20 April 2025

Funding

This research received
no external funding.

Conflicts of Interest

The authors declare no conflict
of interest.

Author Contributions

equivalent.

Keywords:

resources, means, measures,
weighted sum of probabilities,
optimal solution, fuzzy triangular
numbers

ABSTRACT

One of the most important problems in the economy, the educational process and other areas is the task of rational allocation of limited resources. The relevance of solving this problem is determined by the increase in the cost of resources and an increase in their contribution to the final product. There are tasks in the educational process that require the allocation of resources for their implementation. Such tasks are, for example, study assignments, projects, and jobs. The resources can be hours of training sessions, the number of events, and information support.

The purpose of the article is to develop a method for optimal allocation of resources in the educational process under conditions of uncertainty. To achieve the goal, a weighted sum of the probabilities of completing all the tasks of this work is selected as an efficiency indicator; restrictions are set based on available resources.

A new analytical method for solving the problem of resource allocation has been developed. The method is based on the use of indeterminate Lagrange multipliers. A study and justification of the necessary and sufficient conditions for the existence of the extremum of the objective function is carried out. To account for the fuzziness of the information, the initial data of the problem is given in the form of fuzzy triangular numbers. The developed method identifies three optimization problems of nonlinear programming for the best, average and worst conditions. The solution of the problem for the distribution of homogeneous and heterogeneous resources is considered.

The result of the research is a developed new way of distributing homogeneous and heterogeneous resources under conditions of uncertainty. The method proposed in the article can be used not only in the educational process, but also in other fields, for example, in economics, agriculture.

© Antonina V. Ganicheva – CSc in Physics and Mathematics, Assistant Professor of the Department of Physical and mathematical disciplines and information technologies, e-mail: TGAN55@yandex.ru, ORCID: 0000-0002-0224-8945.

Alexey V. Ganichev – Senior Lecturer of the Department of Computer Science and Applied Mathematics, e-mail: alexej.ganichev@yandex.ru, ORCID: 0000-0003-3389-7582.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

Введение

Проблема рационального распределения ресурсов существует во многих областях человеческой деятельности (экономике, сельском хозяйстве, технике, учебном процессе, военном деле). Для решения этой проблемы используются разнообразные математические методы и модели. Первые задачи распределения сил и средств были направлены преимущественно на решение военных конфликтных ситуаций [1; 2]. В работе [1] рассмотрены задачи распределения однородных и неоднородных средств по целям. Для решения первой задачи предлагается использовать симплекс-метод, для второй – метод возможных направлений. В статье [2] для решения второй задачи применяется метод условного градиента. Детальная проработка данных вопросов для распределения ресурсов в ходе информационного конфликта сделана в работах [3; 4]. Используются методы теории дифференциальных игр, динамической координации, статической оптимизации.

Аналогичные задачи оптимального распределения сил и средств решаются при ликвидации чрезвычайных ситуаций [5], охране объектов.

В области исследования экономических процессов типовые задачи распределения ресурсов с использованием современного математического аппарата изложены в работах [6–9]. В статье [6] разработана оптимальная модель планирования при производственных и эксплуатационных ограничениях для дискретной системы событий на основе сетей Петри. Планирование работ в условиях многокритериальности и неопределенности изложено в [7]. Вопросам распределения финансовых ресурсов в банковской сфере посвящена работа [8]. Предлагается использовать динамические экономико-математические модели, в которые включены управляющие воздействия и векторный критерий качества. В работе [9] рассмотрено управление проектами на основе построения сетевых графиков, предложены математические модели оптимального назначения исполнителей проектных заданий.

Распределение ресурсов осуществляется при проектном управлении в учебном процессе [10–12]. В статьях [10; 11] для решения данной проблемы используется система рейтингов по рабочим задачам и компетенциям. Работа [12] посвящена вопросам проектной деятельности в образовании.

Важным направлением в сфере распределения ресурсов в учебном процессе является решение организационных вопросов [13]. В данной статье разработан метод максимизации взвешенной суммы вероятностей выполнения подзадач данной задачи, основанный на методе неопределенных множителей Лагранжа. Данный метод позволяет получить аналитическое решение задачи. Он применен в работе [14] для максимизации нелинейной не separable задачи рационального распределения многомерного ресурса при многономенклатурном производстве.

Перспективным направлением исследований является нечеткая задача рационального распределения целочисленного ресурса [15]. В [16] предложена концепция построения универсального метода решения оптимизационных задач в условиях неопределенности. Универсальность делает решение задачи сложным и не наглядным.

Таким образом, несмотря на то что проблема моделирования рационального распределения ресурсов достаточно полно и подробно представлена в научной литературе, имеется необходимость разработки простого, наглядного метода решения этой задачи в условиях неопределенности применительно к вопросам управления учебным процессом. Актуальность создания метода распределения ресурсов именно для учебного процесса определяется повсеместным внедрением метода проектов в систему образования.

В разделе «Материалы и методы» рассматривается методология решения задачи распределения ресурсов в условиях неопределенности, показано, какие ресурсы учебного процесса могут быть включены в разработанный алгоритм. В разделе «Результаты и их обсуждение» на конкретном примере показана возможность применения разработанного метода в учебной деятельности.

Материалы и методы

Осуществлена разработка метода оптимального распределения ресурсов в учебном процессе в условиях неопределенности.

Предлагаемый метод решения данного класса задач заключается в следующем:

- 1) выделяются три оптимизационных задачи нелинейного программирования для наилучших, средних и наихудших условий;
- 2) выбирается показатель эффективности операции в виде взвешенной суммы вероятностей выполнения всех заданий данной работы; задаются ограничения, исходя из имеющихся ресурсов (средств);
- 3) каждая задача решается аналитически методом неопределенных множителей Лагранжа; исследуются необходимое и достаточное условия существования экстремума целевой функции.

Рассмотрим следующую формализованную постановку проблемы распределения ресурсов.

Пусть имеется n задач и m однотипных средств (мероприятий) для их решения. Известны вероятности $p_j (j = \overline{1, n})$ выполнения j -й задачи каждым средством в течение заданного времени, причем $0 < p_j < 1$. Обозначим x_j – количество средств, назначенных для выполнения j -й задачи, P_j – вероятность выполнения задачи хотя бы одним средством. Тогда

$$P_j = 1 - (1 - p_j)^{x_j}. \quad (1)$$

Показатель эффективности – математическое ожидание числа выполненных задач с учетом их важности будет равен:

$$\Xi = \sum_{j=1}^n a_j P_j = \sum_{j=1}^n a_j \left[1 - (1 - p_j)^{x_j} \right]. \quad (2)$$

Коэффициент a_j – это важность выполнения j -й задачи. Нормируем a_j введением безразмерных коэффициентов:

$$b_j = \frac{a_j}{\sum_{j=1}^n a_j} \quad (j = \overline{1, n}), \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = m. \quad (4)$$

Требуется найти количества $x_1, x_2, \dots, x_n$ средств, распределённых по n задачам, причем средний эффект Ξ может быть: 1) наилучшим; 2) средним; 3) наихудшим.

Таким образом, имеем задачу распределения ресурсов в нечетких условиях. В этом случае вероятности p_j и a_j считаем нечеткими числами, имеющими треугольный вид, соответственно, (p_j^L, p_j^C, p_j^R) и (a_j^L, a_j^C, a_j^R) . Здесь левые координаты соответствуют наихудшим условиям, средние – средним условиям, правые координаты – наилучшим условиям. Имеем три оптимизационных задачи нелинейного программирования, заключающиеся в максимизации функции (2) при ограничениях (4), когда p_j и a_j заданы, соответственно, левыми, средними и правыми координатами.

Каждая такая задача сводится к отысканию максимума функции Лагранжа

$$\mathfrak{L}^* = \mathfrak{L} + \lambda \phi(\bar{X}), \quad (5)$$

где $\bar{X} = (x_1, \dots, x_n)$,

$$\phi(\bar{X}) = m - \sum_{j=1}^n x_j. \quad (6)$$

Так, в случае наилучшего значения p_j и a_j имеем:

$$\mathfrak{L}^* = \sum_{j=1}^n \left(a_j^R / \sum_{j=1}^n a_j^R \right) \cdot [1 - (1 - p_j^R)^{x_j}] + \lambda \left(m - \sum_{j=1}^n x_j \right). \quad (7)$$

В дальнейшем верхний индекс ставить не будем, чтобы не было громоздкости.

Находим частные производные по $x_j (j = \overline{1, n})$ и λ . Приравняем их к нулю, получим:

$$\begin{cases} \mathfrak{L}_{x_j}^* = - \left(a_j / \sum_{j=1}^n a_j \right) (1 - p_j)^{x_j} \cdot \ln(1 - p_j) - \lambda = 0, & j = \overline{1, n}, \\ \mathfrak{L}_{\lambda}^* = m - \sum_{j=1}^n x_j = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Решим данную систему. Для этого приравняем все уравнения, начиная с первого, к последнему. Имеем:

$$\begin{cases} a_j (1 - p_j)^{x_j} \cdot (-\ln(1 - p_j)) = a_n (1 - p_n)^{x_n} \cdot (-\ln(1 - p_n)), & j = \overline{1, n-1}, \\ m = \sum_{j=1}^n x_j. \end{cases}$$

Отсюда

$$x_j \ln(1 - p_j) + \ln[a_j (-\ln(1 - p_j))] = x_n \ln(1 - p_n) + \ln[a_n (-\ln(1 - p_n))], \quad j = \overline{1, n-1}.$$

Тогда

$$x_j = \frac{1}{u_j} (v_n - v_j) + x_n \frac{u_n}{u_j}, \quad (9)$$

где $j = \overline{1, n-1}$, $u_j = \ln(1 - p_j)$, $u_n = \ln(1 - p_n)$, $v_j = \ln[a_j (-\ln(1 - p_j))]$, $v_n = \ln[a_n (-\ln(1 - p_n))]$;

$$\sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{u_j} (v_n - v_j) + x_n \frac{u_n}{u_j} \right) + x_n = m,$$

$$\text{т.е.} \quad x_n = \left[m - \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{u_j} (v_n - v_j) \right) \right] / \left(u_n \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{u_j} + 1 \right). \quad (10)$$

Коэффициент λ находим, например, из первого уравнения системы (8). Таким образом, из (9) и (10) находим решение системы (8). Точка $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, координаты которой вычисляются по формулам (9), (10), – стационарная точка.

Вопрос о существовании и характере условного эксперимента решается на основе изучения второго дифференциала функции Лагранжа (5) для найденной точки P при условии, что dx_i связаны уравнением:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i = 0 \quad \left(\sum dx_i^2 \neq 0 \right). \quad (11)$$

Второй дифференциал для функции Лагранжа (5) будет иметь вид (12):

$$d^2 \mathfrak{E}^* = - \sum_{i=1}^n \left(a_j / \sum_{j=1}^n a_j \right) (\ln(1 - p_j))^2 (1 - p_j)^{x_j} dx_i^2, \quad (12)$$

$$\text{при этом} \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial x_i} dx_i = 0.$$

Если $d^2 \mathfrak{E}^* < 0$, то $\mathfrak{E}$ имеет в точке P условный максимум, если $d^2 \mathfrak{E}^* > 0$, то $\mathfrak{E}$ имеет в точке P условный минимум. Как следует из (12), для рассматриваемого случая $d^2 \mathfrak{E}^* < 0$, т.е. в точке P имеется максимум. Следовательно, максимальный эффект достигается, если число x_j средств, связанных с j -й задачей, определяется согласно формулам (9), (10).

Совершенно так же рассматриваются средний вариант эффективности для p_j^C и a_j^C и наихудший при p_j^I и a_j^I .

Рассмотрим второй случай, когда средства являются разнородными, а задачи – однородными. Тогда x_j – число задач, связанных с j -м средством. Во всех формулах первого случая меняются местами m и n , и a_j будет означать важность (эффективность) j -го средства.

Наконец, рассмотрим общий случай, когда считаем средства не однотипными и задачи – разнородными. Пусть x_{ij} – число средств j -го типа, назначенных на решение i -й задачи ($i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$); p_{ij} – вероятность выполнения j -й задачи, связанной с i -м средством для наилучшего варианта p_j и a_j . В этом случае средний эффект можно рассмотреть как математическое ожидание числа решенных задач. Поскольку формулы однотипны, не будем указывать, какой из трех вариантов рассматривается.

Заметим, что в общем случае могут выполняться следующие равенства:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = N_i, & i = \overline{1, m}, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = M_j, & j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (13)$$

В этом случае все средства разбиваются на m разнородных групп по N_i средств в группе, и задачи разбиваются, соответственно, на n групп по M_j задач в каждой группе. Таким образом, для данного случая средний эффект будет вычисляться по формуле (14):

$$\Xi = \sum_{j=1}^n b_j^{\Pi} \left[1 - \prod_{i=1}^m (1 - p_{ij})^{x_{ij}} \right]. \quad (14)$$

Решение задачи аналогично рассмотренному ранее случаю.

Однако в общем случае получается более сложные и громоздкие формулы. Так, функция Лагранжа с неопределенными множителями λ_i и μ_j запишется в виде (15):

$$\Xi^* = \Xi + \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(N_i - \sum_{j=1}^n x_{ij} \right) + \sum_{j=1}^n \mu_j \left(M_j - \sum_{i=1}^m x_{ij} \right), \quad (15)$$

частные производные $\Xi_{x_{ij}}^{*}$ будут иметь вид:

$$\Xi_{x_{ij}}^{*} = -b_j \ln(1 - p_{ij}) \prod_{i=1}^m (1 - p_j)^{x_{ij}} - \lambda_i - \mu_j. \quad (16)$$

При этом

$$\begin{cases} \Xi_{\lambda_i}^{*} = N_i - \sum_{j=1}^n x_{ij}, \\ \Xi_{\mu_j}^{*} = M_j - \sum_{i=1}^m x_{ij}. \end{cases} \quad (17)$$

Приравняв производные (16) и (17) к нулю, переносим $\lambda_i + \mu_j$ в правую часть и логарифмируем обе части каждого такого уравнения. В результате получим:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \ln(1 - p_{ij}) = \ln[(\lambda_i + \mu_j) / \ln(-b_j \ln(1 - p_{ij}))], \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = N_i, \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = M_j, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (18)$$

Имеем систему $m \times n + n + m$ уравнений с $m \times n + n + m$ неизвестными ($m \times n$ неизвестных x_{ij} , n неизвестных μ_j и m неизвестных λ_i). Решая эту систему, находим неизвестные величины x_{ij} . Для данной задачи второй дифференциал функции Лагранжа (16) по переменным x_{ij} запишется в виде (19):

$$d^2 \Xi^* = - \sum_{j=1}^n b_j \prod_{i=1}^m (1 - p_{ij})^{x_{ij}} \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m \ln(1 - p_{lj}) \ln(1 - p_{kj}) \cdot dx_{lj} \cdot dx_{kj}. \quad (19)$$

Отсюда следует, что в точке P , координаты которой удовлетворяют равенствам (18), имеется максимум. Аналогичный результат имеет место для имеющейся информации в виде p_{ij}^C и b_{ij}^C , а также при p_j^{Π} и a_j^{Π} .

Результаты и их обсуждение

В качестве практической реализации рассмотрим конкретный пример реализации разработанного алгоритма. Пусть в учебной организации требуется разработать $n = 3$ проекта с использованием $m = 300$ часов работы компьютеров (ресурс времени ограничен). Заданы важности проектов: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$ условных единиц. Известны вероятности (полученные из статистических данных): $p_1 = 0,7$; $p_2 = 0,4$; $p_3 = 0,6$.

Не нарушая общности, рассмотрим случай, когда работа по выполнению проектов происходит в наилучших условиях (хорошая материально-техническая база, квалифицированные исполнители и т.д.), т.е. для этого случая $a_j = a_j^H$, $p_j = p_j^H$ ($j = \overline{1,3}$).

Требуется распределить $m = 300$ часов по $n = 3$ проектам так, чтобы средний эффект (2) был максимальным. Пусть x_j – время, выделенное для решения j -го проекта ($j = \overline{1,3}$).

Имеем: $v_1 = 0,879$; $u_1 = -1,204$; $v_2 = 0,427$; $u_2 = -0,511$; $v_3 = 1,522$; $u_3 = -0,916$. Используем формулы (9), (10). В результате получаем распределение времени на проекты (в часах): $x_1 = 64,267$; $x_2 = 150,587$; $x_3 = 85,146$.

Во многих задачах имеется требование целочисленности переменных x_j (количества средств, назначенных для выполнения j -й задачи). Например, количество компьютеров, учебных тем, контрольных работ и т.д. Требование целочисленности x_j в формулах (1) и (2) может быть учтено путем замены $(1 - p_j)^{x_j}$ на выражение $(1 - p_j)^{\lfloor x_j \rfloor} \cdot (1 - \Delta x_j p_j)$, где $\lfloor x_j \rfloor$ – целая часть числа x_j , Δx_j – дробная часть, т.е. $x_j = \lfloor x_j \rfloor + \Delta x_j$.

В учебном процессе имеются задачи, для решения которых требуются определенные ресурсы. Этих ресурсов может не хватать для решения всех нужных задач или показатель эффективности операции зависит от способа распределения ресурсов. В этих случаях возникает проблема рационального распределения ресурсов.

Под задачами в данном исследовании понимаются элементы образовательного процесса, а именно преподавание учебных дисциплин, сдача экзаменов и зачетов, прохождение тестирования, выполнение контрольных работ, написание рефератов. Сюда относятся также задания и поручения, работы (самостоятельная работа учащихся, воспитательная, культурно-просветительная, спортивно-оздоровительная работы), различные организационные и управленческие вопросы.

Особое значение проблема оптимизации распределения ресурсов имеет для метода проектов. Рациональное распределение ресурсов позволяет обоснованно структурировать и планировать содержательную часть проекта (с указанием конкретных поэтапных результатов), а также контролировать выпуск конкретного продукта каждого этапа.

Под ресурсами в данном исследовании понимаются возможные средства и мероприятия для осуществления перечисленных выше задач. Это материальные, трудовые, информационные, интеллектуальные, финансовые (денежные) ресурсы. К средствам можно отнести учебные часы, приемы, действия, компьютерные классы (компьютеры), оргтехнику, лабораторное оборудование. Используемые средства в учебном процессе являются однородными (например, часы учебных занятий, количество консультаций) и неоднородными (например, быстродействие вычислительной техники и объем базы данных).

В практике решения организационных вопросов часто возникают следующие ситуации. При решении глобальной сложной задачи, в том числе в учебном процессе, бывает

целесообразно разбить ее на более простые подзадачи и распределить имеющиеся ресурсы (силы, средства) на решение этих подзадач таким образом, чтобы достигнуть максимального общего эффекта.

Разработанный в данной статье метод может использоваться как для распределения однородных средств (формула (2) при $a_j = 1$), так и неоднородных средств (формула (2) при разных значениях a_j).

Для учета нечеткости информации вероятности p_j и a_j считаются нечеткими числами, имеющими треугольный вид. Возможно задание нечетких чисел и другого вида, а также использование для задания значений этим переменным суждений эксперта (использование лингвистической переменной). В разработанном методе выделяются три оптимизационных задачи нелинейного программирования для наилучших, средних и наихудших условий. Возможно использование большего числа градаций неопределенностей для более адекватного описания исследуемого процесса.

Используемый в данном исследовании методологический аппарат отличается вычислительной простотой, наглядностью, не требует специальных программных средств для реализации алгоритма вычислений.

По применяемому математическому аппарату к данному исследованию наиболее близки работы [13–16]. Предлагаемое исследование является развитием и обобщением ранее опубликованной работы [13] автора настоящей статьи применительно к нечетким условиям принятия решений. В статье [13] рассмотрена проблема распределения организационных вопросов по учебным задачам. В настоящем существенно расширен перечень возможных ресурсов (средств) и мероприятий учебного процесса, для которых актуально решение задачи оптимизации. Кроме того, следует отметить, что принятие решений в учебном процессе часто связано с нечетко известным запасом располагаемых ресурсов и нечетким перечнем необходимых мероприятий. От работы [14] настоящее исследование отличается видом целевой функции, применяемой в модели, и рассмотрением задачи для нечетких условий. В статьях [15; 16] разработан универсальный метод решения оптимизационных задач в условиях неопределенности. Требование универсальности делает решение задачи распределения ресурсов сложным и не наглядным. Поэтому универсальный метод трудно применять для решения задач учебного процесса.

Заключение

В данной статье предложен простой и наглядный метод аналитического решения задачи распределения ресурсов для решения задач учебного процесса в условиях неопределенности. Способ позволяет решить задачи распределения однородных и неоднородных ресурсов (средств). Работоспособность вычислительного алгоритма продемонстрирована на конкретном примере распределения часов на выполнение учебных проектов.

Получены формульные соотношения для трех градаций неопределенностей (наилучшие, средние и наихудшие условия). Для решения задач применяется метод неопределенных множителей Лагранжа. Доказательство существования экстремума целевой функции осуществляется исследованием ее вида. Изложенный метод, в отличие от численных методов решения оптимизационных задач, не требует затрат вычислительных ресурсов, является точным, а не приближенным.

Разработанный метод может найти практическое применение не только в учебном процессе и сходных областях (подготовке кадров, системе повышения квалификации и пе-

реподготовки). Он может также использоваться и в таких областях, как оптимизация распределения ресурсов в промышленном производстве, сельском хозяйстве, системах организационного управления, построении систем информационной, безопасности. Конечно, в этом случае необходима его адаптация к рассматриваемым проблемам. Он может применяться также для распределения жизнеобеспечивающих ресурсов и коммунальных услуг.

Список литературы

1. Абчук, В.А. Справочник по исследованию операций / В. А. Абчук, Ф. А. Матвейчук, Л.П. Томашевский. – М.: Воениздат, 1979. – 368 с.
2. Кононов, В.Б. Задачи оптимального управления распределением неоднородных сил и средств / В.Б. Кононов // Системи обробки інформації. – 2003. – № 1. – С. 59–62.
3. Михайлов, Р. Л. Модель оптимального распределения ресурсов и исследование стратегий действий сторон в ходе информационного конфликта / Р. Л. Михайлов, С. Л. Поляков // Системы управления, связи и безопасности. – 2018. – № 4. – С. 323–344.
4. Михайлов, Р.Л. Задача распределения ресурса в информационном конфликте: формализация и пути решения / Р. Л. Михайлов // Научные технологии в космических исследованиях Земли. – 2020. – № 12 (3). – С. 77–83. DOI 10.36724/2409-5419-2020-12-3-77-83
5. Шаптала, В.Г. Разработка алгоритмов оптимального распределения сил и средств, предназначенных для ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций / В.Г. Шаптала, В.Ю. Радоуцкий, Ю.В. Ветрова // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. – 2015. – № 6. – С. 257–260.
6. Mathematical Model for Production Plan Optimization – A Case Study of Discrete Event / S. Rezig, W. Ezzeddine, S. Turki, N. Rezg // Systems Mathematics. – 2020. – Vol. 8 (6). – P. 955. DOI 10.3390/math8060955
7. Кучеренко, Д.В. Модель оптимального планирования состава работ по развитию государственных информационных систем в условиях многокритериальности и неопределенности / Д.В. Кучеренко // Управленческое консультирование. – 2020. – № 5 (137). – С. 166–175.
8. Филиппова, А.С. Экономико-математическое моделирование многокритериальной оптимизационной задачи управления розничным подразделением коммерческого банка / А.С. Филиппова // Вестник Пермского университета. Серия «Экономика». – 2019. – Vol. 14, № 1. – С. 93–109. DOI 10.17072/1994-9960-2019-1-93-109
9. Kataev, A.V. Project Management: Mathematical Models of Optimal Executors' Appointment for Project Works / A.V. Kataev, T.M. Kataeva, E.L. Makarova // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия «Экономика. Управление. Право». – 2016. – № 3. – P. 294–299.
10. Bakanova, A.P. The Method of Employee Competencies Management Based on the Ontological Approach / A.P. Bakanova, A.N. Shikov // CEUR Workshop Proceedings. – 2020. – Vol. 2590. – P. 1–9.
11. Баканова, А.П. Проектирование системы управления корпоративными знаниями и компетенциями в инновационной компании / А.П. Баканова, К.В. Логинов, А.Н. Шиков // Региональные проблемы преобразования экономики. – 2019. – № 6 (104). – С. 25–34.
12. Бтемирова, Р.И. Метод проектов в условиях современного высшего образования / Р.И. Бтемирова // Современные проблемы науки и образования. – 2016. – № 3. – С. 217. URL: <http://science-education.ru/ru/article/view?id=24488>

13. Ганичева, А.В. Оптимальное решение и оценка полезности организационных вопросов / А.В. Ганичева // Ярославский педагогический вестник. – 2011. – Т. III, № 2. – С. 53–59.
14. Раскин, Л.Г. Нелинейная несепарабельная задача рационального распределения многомерного ресурса при многономенклатурном производстве / Л.Г. Раскин, О.В. Серая, Т.И. Каткова // Математичні машини і системи. – 2014. – № 1. – С. 171–177.
15. Серая, О.В. Нечеткая задача рационального распределения целочисленного ресурса / О.В. Серая // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2009. – № 1 (3). – С. 37–40. DOI 10.15587/1729-4061.2009.3088
16. Universal method for solving optimization problems under the conditions of uncertainty in the initial data Eastern-European / L. Raskin, O. Sira, L. Sukhomlyn, Y. Parfeniuk // Journal of Enterprise Technologies. – 2021. – № 1 (4). – P. 46–53. DOI 10.15587/1729-4061.2021.225515

References

1. Abchuk V.A., Matveychuk F.A. Tomashevskiy L.P. Handbook of Operations Research. Moscow, Voenizdat, 1979. 368 p.
2. Kononov V.B. Problems of optimal control of the distribution of inhomogeneous forces and means. *Sistemi obrobki informatii*, 2003. no. 1. pp. 59-62.
3. Model of Optimal Division of Sides Resources During Information Conflict. *Systems of Control, Communication and Security*, 2018, no. 4, pp. 323–344.
4. Mikhailov R.L. The task of resource allocation in an information conflict: formalization and solutions. *H&ES Research*, 2020, no. 12 (3), pp. 77-83. DOI 10.36724/2409-5419-2020-12-3-77-83
5. Shaptala V.G., Radoutsky V.Yu., Vetrova Yu.V. Development of optimal distribution algorithms forces and means designed to eliminate the consequences of emergency situations. *Vestnik Belgorodskogo gosudarstvennogo tekhnologicheskogo universiteta im. V.G. Shuhova*, 2015. no. 6. pp. 257-260.
6. Rezig S., Ezzeddine W., Turki S., Rezg N. Mathematical Model for Production Plan Optimization – A Case Study of Discrete Event. *Systems Mathematics*, 2020, vol. 8 (6), pp. 955. DOI 10.3390/math8060955.
7. Kucherenko D.V. Model of optimal planning of the composition of work on the development of state information systems in conditions of multicriteria and uncertainty. *Upravlencheskoe konsul'tirovanie*, 2020, no. 5 (137), pp. 166-175.
8. Filippova A.S. Economic-mathematical modeling of a multi-criteria optimization management problem of a retail unit of a commercial bank. *Perm University Herald. ECONOMY*, 2019, no. 14 (1), pp. 93-109. DOI 10.17072/1994-9960-2019-1-93-109.
9. Kataev A.V, Kataeva T.M., Makarova E.L. Project Management: Mathematical Models of Optimal Executors' Appointment for Project Works. *Izvestiya of Saratov University. Economics. Management. Law*, 2016, no. 3. pp. 294-299.
10. Bakanova A.P., Shikov A.N. The Method of Employee Competencies Management Based on the Ontological Approach. *CEUR Workshop Proceedings*, 2020, vol. 2590, pp. 1-9.
11. Bakanova A.P., Loginov K.V., Shikov A.N. Designing a corporate knowledge and competence management system in an innovative company. *Regional'nye problemy preobrazovaniya ekon*, 2019, no. 6 (104). pp. 25-34.

12. Btemirova R.I. The method of projects in modern higher education. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya*, 2016, no. 3, available at: <http://science-education.ru/ru/article/view?id=24488>.
13. Ganicheva A.V. Optimal solution and assessment of the usefulness of organizational issues. *Yaroslavskij pedagogicheskij vestnik*, 2011, vol. III, no. 2, pp. 53-59.
14. Raskin L.G., Seraya O.V., Katkova T.I. The nonlinear non-separable problem of rational distribution of a multidimensional resource in multi-nomenclature production. *Mathematical machines and systems*, 2014, no. 1, pp. 171-177. Available at: <http://nbuv.gov.ua/UJRN/MMS>
15. Seraya O.V. The fuzzy problem of rational allocation of an integer resource. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2009, no. 1 (3). pp. 37-40. DOI 10.15587/1729-4061.2009.3088
16. Raskin L., Seraya O., Sukhomlyn L., Parfeniuk Y. Universal method for solving optimization problems under the conditions of uncertainty in the initial data. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2021, no. 1 (4), pp. 46–53. DOI 10.15587/1729-4061.2021.225515