



Научная статья

DOI: 10.15593/2499-9873/2025.1.07

УДК 519.816



Альтернативный метод решения нечеткой биматричной игры

В.Г. Чернов

Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича
и Николая Григорьевича Столетовых, Владимир, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 23 сентября 2024

Одобрена: 03 марта 2025

Принята к публикации:
16 апреля 2025

Финансирование

Исследование не имело
спонсорской поддержки.

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии
конфликта интересов.

Вклад автора

100 %.

Ключевые слова:

биматричная игра, нечеткая
биматричная игра, общее знание,
платежная матрица, смешанные
стратегии, нечеткое число,
функция принадлежности, экви-
валентное нечеткое множество,
размытость нечеткого множества,
компромиссное решение, центр
тяжести

АННОТАЦИЯ

Классические методы решения биматричной игр предполагают выполнение положения об общем знании, согласно которому игра со всеми правилами известна игрокам и каждый из них знает, что все участники осведомлены о том, что известно остальным партнерам по игре, и такое положение сохраняется до конца игры, а результаты принятых игроками решений представляются точечными, числовыми значениями. Существует достаточно много ситуаций, требующих принятия решений, формализуемых как биматричная игра, в которых субъективные представления участников о параметрах игры – значениях элементов платежной матрицы – неизвестны другой стороне. Кроме того, эти значения в силу неполноты имеющейся на момент принятия решения информации имеют приблизительный характер. Таким образом возникают два вида нестатистических неопределенностей: первая – из-за незнания конкретной стратегии другого участника, вторая – из-за неточного определения значений элементов платежных матриц, разрушающего положение об общем знании. Такие ситуации могут быть представлены как нечеткая биматричная игра.

В работе показывается, что в такой игре в общем случае игроки не смогут найти равновесные стратегии, а из-за нечеткости значений элементов платежных матриц отсутствуют условия для корректного определения смешанных стратегий. В качестве решения предлагается определить стратегии, обеспечивающие компромиссный результат, наилучшим образом устраивающий обоих участников. Для этого нечеткие результаты возможных стратегий игрока представляются интегральной нечеткой оценкой по всему множеству стратегий другого участника в виде эквивалентного нечеткого множества с треугольной функцией принадлежности, а наилучшее компромиссное решение определяется путем анализа областей пересечения эквивалентных нечетких множеств.

© Чернов Владимир Георгиевич – доктор экономических наук, профессор, профессор кафедры вычислительной техники и систем управления, e-mail: vladimir.chernov44@mail.ru, ORCID: 0000-0003-1830-2261.



Perm Polytech Style: Chernov V.G. An alternative method for solving fuzzy bimatrix game. *Applied Mathematics and Control Sciences*. 2025, no. 1, pp. 93–104. DOI: 10.15593/2499-9873/2025.1.07

MDPI and ACS Style: Chernov, V.G. An alternative method for solving fuzzy bimatrix game. *Appl. Math. Control Sci.* **2025**, *1*, 93–104. <https://doi.org/10.15593/2499-9873/2025.1.07>

Chicago/Turabian Style: Chernov, Vladimir G. 2025. “An alternative method for solving fuzzy bimatrix game”. *Appl. Math. Control Sci.* no. 1: 93–104. <https://doi.org/10.15593/2499-9873/2025.1.07>



APPLIED MATHEMATICS
AND CONTROL SCIENCES

№ 1, 2025

<https://ered.pstu.ru/index.php/amcs>



Article

DOI: 10.15593/2499-9873/2025.1.07

UDC 519.816



An alternative method for solving fuzzy bimatrix game

V.G. Chernov

Vladimir State University named after Alexander Grigorievich and Nikolai Grigorievich Stoletov,
Vladimir, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 23 September 2024

Approved: 03 March 2025

Accepted for publication:
16 April 2025

Funding

This research received
no external funding.

Conflicts of Interest

The author declare no conflict
of interest.

Author Contributions

100 %.

Keywords:

bimatrix game, fuzzy bimatrix game,
common knowledge, payment
matrix, mixed strategies, fuzzy
number, membership function,
equivalent fuzzy set, fuzziness
of fuzzy set, compromise solution,
center of gravity.

ABSTRACT

Classical methods of solving bimatrix games assume the fulfilment of the common knowledge clause, according to which the game with all rules is known to the players and each of them knows that all participants are informed about what is known to the other partners in the game, and such a position is preserved until the end of the game, and the results of the decisions made by the players are represented by point, numerical values. There are quite a lot of situations requiring decision making, formalised as a bimatrix game, in which subjective representations of participants about game parameters – values of elements of the payment matrix – are not known to the other party. Besides, these values are approximate due to incompleteness of the information available at the moment of decision making. Thus, two types of non-statistical uncertainties arise: the first is due to ignorance of the specific strategy of the other participant, and the second is due to the inaccurate determination of the values of the elements of the payment matrices, destroying the position of common knowledge. Such situations can be represented as a fuzzy bimatrix game.

The paper shows that in such a game, in the general case, players will not be able to find equilibrium strategies, and because of the vagueness of the values of the elements of the payment matrices, there are no conditions for the correct definition of mixed strategies. As a solution, it is proposed to determine the strategies that provide a compromise result that best suits both participants. For this purpose the fuzzy results of possible strategies of a player are represented by an integral fuzzy evaluation of the whole set of strategies of another participant in the form of an equivalent fuzzy set with a triangular belonging function, and the best compromise solution is determined by analysing the areas of intersection of equivalent fuzzy sets.

© **Vladimir G. Chernov** – Doctor of Economic Sciences, Professor, Professor of the Department of Computer Engineering and Control Systems, e-mail: Vladimir.chernov44@mail.ru, ORCID: 0000-0003-1830-2261.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

Введение

Среди множества ситуаций, требующих принятия решений, достаточно часто встречаются такие, когда отсутствует конфликт между интересами участников, т.е. стремление к наилучшему результату одного из участников не противоречит аналогичному желанию другого.

Формальной моделью таких ситуаций являются биматричные игры, традиционная форма которых предполагает задание множеств стратегий игроков

$A = \{a_i : i = \overline{1, M}\}, B = \{b_j : j = \overline{1, N}\}$, в общем случае $M \neq N$ и соответствующих матриц

$$M_A = \|m_{ij}^A\|, M_B = \|m_{ji}^B\|, \quad (1)$$

где m_{ij}^A, m_{ji}^B – оценки последствий возможных решений.

В классической теории антагонистических игр предполагается выполнение положения об «общем знании» [1; 2], которое гласит: игра со всеми правилами известна игрокам и каждый из них знает, что все участники осведомлены о том, что известно остальным партнерам по игре. И такое положение сохраняется до конца игры. Выполнение этого положения предполагается и в традиционных подходах к решению биматричных игр.

Биматричные игры, видимо, можно разделить на две группы: в первой участники игры могут находиться в непосредственном контакте, как, например, в часто упоминаемой в качестве примера игре «театр – футбол», где жена предпочитает походы в театр, а муж – на футбол, во второй – участники непосредственно не контактируют. В первой группе положение об общем знании можно считать выполнимым, соответственно, игрокам известны множества стратегий каждого из них, и при наличии равновесия выбор одного из участников однозначно определит выбор другого. При отсутствии равновесия в классической теории рекомендуется использовать смешанные стратегии.

Во второй группе при отсутствии контактов между участниками положение об общем знании будет нарушаться, и каждый из игроков будет строить свою модель ситуации, требующей принятия решений. С одной стороны, рационально мыслящие игроки в этих моделях имеют общее представление о возможных действиях другой стороны, т.е. игроку A известно множество $B = \{b_j : j = \overline{1, N}\}$, $B = \{b_j, j = \overline{1, N}\}$, а B – множество $A = \{a_i : i = \overline{1, M}\}$, с другой – участники игры смогут только примерно оценить, как отреагирует другой игрок на принятое решение. В связи с этим возникает вопрос о существовании равновесных стратегий при нарушении положения об общем знании.

Рассмотрим небольшой пример. Биматричная игра в представлении игроков A и B задана двумя матрицами (табл. 1, 2).

Таблица 1

Платежная матрица игрока A

A	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	2	3	4	5
a_2	5	4	2	1
a_3	7	2	8	1

Таблица 2

Платежная матрица игрока B

B	a_1	a_2	a_3
b_1	1	3	4
b_2	4	10	6
b_3	5	4	6
b_4	9	3	2

Предположим, что игроки заинтересованы в наибольшем выигрыше. Выполнение положения об общем знании означает, что каждому из игроков известна платежная матрица другого участника, и в указанной игре согласно известным правилам ее решения есть равновесная ситуация, когда игрок A выбирает стратегию a_3 , а B – стратегию b_3 , хотя для игрока B будут более выгодными стратегии b_2 и b_4 .

Когда положение об общем знании не выполняется, игроки будут принимать решение на основе собственных, в общем случае не совпадающих представлений, какая из возможных стратегий будет наиболее выгодной, и равновесная ситуация в общем случае становится невозможной, так как игроки сталкиваются с неопределенностью относительно выбора другого участника. Кроме этого, нарушение положения об общем знании приводит к тому, что оценки значений элементов платежных матриц приобретают характер приближенных, т.е. возникает еще одна неопределенность, имеющая нестатистический характер, поскольку она появляется из-за неполноты знаний и субъективных представлений игроков.

В этих условиях использование нечетких оценок (элементов платежных матриц) становится вполне обоснованным.

Нечеткие биматричные игры исследуются в большом количестве работ [3–12]. Следует отметить, что, несмотря на использование формально заявленных нечеткостей, они во многом остаются в рамках традиционных подходов для решения биматричных игр. Так, в [3] в соотношениях, которые используются для нахождения смешанных стратегий в биматричных играх с точечными, числовыми значениями элементов платежных матриц, соответствующие элементы формально заменяются на нечеткие без рассмотрения специфики нечеткой арифметики, которая должна учитываться при нахождении соответствующих вероятностей.

В ряде работ [5; 12] для нахождения смешанных стратегий используются различные модификации подхода сведения игровой задачи к задаче линейного (двойственного) или квадратичного программирования, основываясь на соотношениях

$$\begin{aligned} \sum a_{ij} p_i q_j &\rightarrow \max, \\ \sum p_i &= 1, \sum q_j = 1, \end{aligned}$$

где a_{ij} – элементы платежной матрицы; p_i , q_j – вероятности для формирования смешанных стратегий.

В общем случае при нечетких значениях элементов платежной матрицы вычисляемые значения вероятностей тоже будут нечеткими, что в указанных работах не отмечается. Кроме того, если для вероятностей в традиционных моделях с точечными числовыми значениями элементов платежных матриц известен механизм их генерации, то

механизм генерации нечетких значений вероятностей неизвестен и вряд ли может быть создан. Необходимо отметить еще одно обстоятельство. В силу сложности математических преобразований используются только линейно-кусочные функции принадлежности [5; 7; 11], т.е. рассматривается частный случай, и полученные результаты лишены обобщения. Очевидно, что в общем случае игроки имеют различные представления о степени неопределенности оценок решаемой ситуации, моделирование которой может выполняться применением различных видов функций принадлежности (рис. 1). Например, можно показать, используя для оценки неопределенности формулу Де Люка и Термини [13]

$$|W| = \sum_{z \in Z} \mu(z),$$

что $W_3 > W_1 > W_2$, т.е. наибольшую неопределенность имеет оценка с функцией принадлежности 3 (тент).

Другим вопросом, который необходимо обсудить при переходе к нечеткому представлению биматричной игры, является наличие условий для корректного применения смешанных стратегий. По определению смешанные стратегии могут использоваться при многократной реализации игры с одинаковыми условиями. Если в игре «театр – футбол» в какой-то мере эти условия выполняются, то когда игроки не находятся в непосредственном контакте, в каждый момент реализации игры их представления о ситуации, требующей принятия решений, очевидно, могут изменяться, т.е. будут изменяться значения элементов платежных матриц, и найденные ранее смешанные стратегии станут неактуальными. Необходимо отметить, что условия применения смешанных стратегий нарушаются и при применении трапецидальных функций принадлежности. Когда нечеткие элементы платежной матрицы имеют трапецидальные функции принадлежности, в частности это делается в [8] (рис. 2), то при каждой новой реализации игры могут появиться любые значения из интервала $[x_{ij}^1, x_{ij}^2]$.

При этом отсутствуют какие-либо доказательства, какое значение будет иметь место в конкретный момент принятия решения. Это обстоятельство просто игнорируется, и чисто формально реализуются математические преобразования для получения смешанных стратегий.

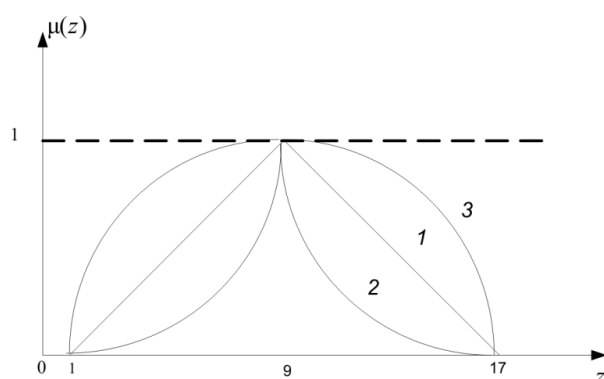


Рис. 1. Функции принадлежности нечеткого числа: 1 – треугольная функция; 2 – пик; 3 – тент

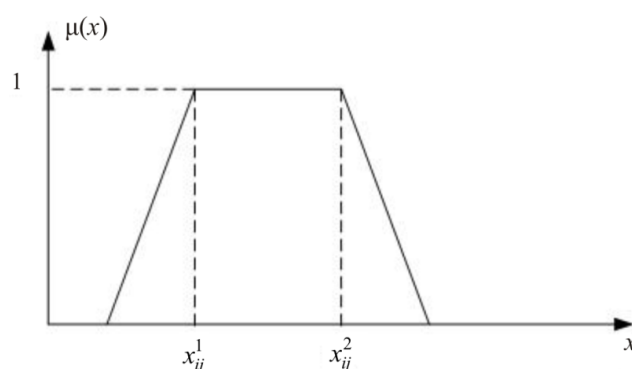


Рис. 2. Трапецидальная функция принадлежности нечеткого элемента платежной матрицы

Постановка и решение задачи

Пусть ситуация, требующая принятия решения, формализуется нечеткой биматричной игрой

$$\tilde{G} = \{A, B, \tilde{M}^A, \tilde{M}^B\},$$

где $A = \{a_i : i = \overline{1, I}\}, B = \{b_j : j = \overline{1, J}\}$ – множества стратегий игроков; $\tilde{M}^A = \|m_{ij}^A\| = \|\mu_{ij}^A(x)\|, \tilde{M}^B = \|m_{ij}^B\| = \|\mu_{ji}^B(x)\|, x, y \in \text{Re}$ – платежные матрицы; $\mu_{ij}^A(x), \mu_{ji}^B(x)$ – функции принадлежности нечетких элементов платежных матриц.

Вид функций принадлежности стороны могут выбирать по своему усмотрению, руководствуясь лишь известными требованиями к их построению.

В классической теории первым этапом решения игры является проверка на наличие равновесной ситуации, когда в в матрице $\tilde{M}^A$ в i -й строке и j -м столбце будет максимальный элемент, а в матрице $\tilde{M}^B$ наибольший элемент будет в строке j и столбце i .

Необходимо отметить, что тогда нужно решить нетривиальную в общем случае задачу сравнения нечетких чисел. Предположим, что установлено отсутствие равновесной ситуации.

Отмеченные выше нарушения положения об общем знании:

- неопределенность относительно стратегии, которую будет использовать другой участник игры;
- неопределенность (нечеткость) в оценке значений платежных матриц определяют необходимость разработки метода решения нечетких биматричных игр, учитывающего указанные обстоятельства.

При неопределенности представления о ситуации, требующей принятия решений, когда одному игроку неизвестен конкретный выбор другого, целесообразно при выборе наиболее выгодной стратегии руководствоваться следующим принципом: неважно, как будет действовать другая сторона, важно, чтобы выбранная стратегия обеспечивала бы наилучший результат. В этом случае игрокам будут нужны интегральные оценки, очевидно также нечеткие, для каждой из возможных стратегий по всему множеству решений другого участника. Для получения таких оценок предлагается использовать модифицированное преобразование FztoTriangle, определенное в нечеткой электронной таблице FuzyCalc фирмы FuzyWare. Модификация состоит в том, что указанное преобразование применяется не к отдельному нечеткому множеству, а ко всей совокупности нечетких множеств, образующих некоторую строку платежных матриц [14]. Преобразование FztoTriangle заменяет произвольное нечеткое множество (совокупность нечетких элементов строки) эквивалентными нечеткими множествами $\tilde{E}(a_i), \tilde{E}(b_j)$ с треугольной функцией принадлежности, параметры которых определяются следующим образом.

$$\text{Носители } \text{Supp}\tilde{E}(a_i) = [x_{\min}(a_i), x_{\max}(a_i)], \text{Supp}\tilde{E}(b_j) = [y_{\min}(b_j), y_{\max}(b_j)],$$

где $[x_{\min}(a_i), x_{\max}(a_i)], [y_{\min}(b_j), y_{\max}(b_j)]$ – область значений строк платежных матриц; $CG(\tilde{E}(a_i)) = CG(a_i), CG(\tilde{E}(b_j)) = CG(b_j)$, где $CG(a_i), CG(b_j)$ – координаты центров тяжести соответствующих строк платежных матриц. Так как элементами платежных матриц являются нечеткие числа, то для модальных значений функции принадлежности $\mu[\tilde{E}(a_i), \mu[\tilde{E}(b_j)]] = 1$.

В результате каждый из игроков получит вектор нечетких оценок

$$\tilde{E}(A) = \begin{pmatrix} \|\tilde{E}(a_1)\| \\ \|\tilde{E}(a_2)\| \\ \vdots \\ \|\tilde{E}(a_I)\| \end{pmatrix}, \tilde{E}(B) = \begin{pmatrix} \|\tilde{E}(b_1)\| \\ \|\tilde{E}(b_2)\| \\ \vdots \\ \|\tilde{E}(b_J)\| \end{pmatrix},$$

представляющий собой нечеткое распределение возможных результатов их стратегий, определенное на множестве стратегий другого участника. При отсутствии равновесной ситуации, а также возможности корректного применения смешанных стратегий решение нечеткой биматричной игры должно состоять в нахождении некоторого компромиссного результата, который бы устроил обоих игроков.

Логично предположить, что это компромиссное решение находится в некоторой общей зоне интересов обоих участников, для определения которой предлагается построить пересечение $\tilde{R} = \tilde{E}(A) \cap \tilde{E}(B)$ для всех i и j , которое будет представлять матрицу

$$\tilde{R} = \|\tilde{E}(a_i) \cap \tilde{E}(b_j)\| = \|\mu^{\tilde{E}(a_i)}(x) \cap \mu^{\tilde{E}(b_j)}(y)\| = \|\tilde{r}_{ij}\|, x, y \in \text{Re}. \quad (2)$$

Каждый элемент матрицы (2) – это нечеткое множество, характеризующее степень возможности достижения компромиссного результата при использовании игроками каких-то стратегий (a_i, b_j) . Функция принадлежности $0 < \mu_{\tilde{r}_{ij}}(x) < 1$ указывает, что в общем случае $\forall (a_i, b_j)$ лишь в частичной мере удовлетворяет условию быть наилучшим компромиссным решением. Соответственно, среди всех пар (a_i, b_j) необходимо определить ту, для которой в большей степени выполняется условие обеспечения наилучшего компромиссного решения.

Эту процедуру предлагается выполнять в два этапа. На первом для всех пар (a_i, b_j) вычисляется оценка

$$\gamma(a_i, b_j) = CG[\mu_{\tilde{r}_{ij}}(x)] * \mu_{\tilde{r}_{ij}}(x = CG), \quad (3)$$

где $CG[\mu_{\tilde{r}_{ij}}(x)]$ – координата центра тяжести функции принадлежности $\mu_{\tilde{r}_{ij}}(x)$, которая зависит от положения элементов матрицы (2) на области определения и степени истинности этого положения. На множестве всех пар (a_i, b_j) отбираются те, для которых значение (3) максимальное $\gamma(a_k, b_l) = \max_{i,j} [\gamma(a_i, b_j)]$, $k = \overline{1, K}$, $K \leq I$, $l = \overline{1, L}$, $L \leq J$.

На втором этапе вычисляется степень неопределенности (размытости) нечетких значений $\tilde{r}_{k,l}$. Оценка размытости нечеткого множества представляет собой отдельную, достаточно сложную задачу, различные методы решения которой описаны в [15]. Одним из методов определения этого показателя нечетких множеств может быть метод, предложенный в [16], согласно которому размытость

$$F(x) = \sum_i \mu(x_i) F(x) = \sum_i \mu(x_i) (1 - \mu(x_i)).$$

Для каждой из отобранных пар (a_k, b_l) вычисляется оценка

$$\beta(a_k, b_l) = F[(a_k, b_l)] / \gamma(a_k, b_l).$$

Наилучшему компромиссному решению будет соответствовать минимальное значение

$$(a^*, b^*) \rightarrow \min_{k,l} [\beta(a_k, b_l)],$$

так как в этом случае оценка возможности этого решения будет иметь минимальную размытость (нечеткость), наиболее выгодное положение на области определения (наибольшую координату центра тяжести) и наибольшую степень истинности, соответствующую этой координате. Эту же задачу можно решить и другими методами, например, с использованием точечных значений нечетких множеств [17, 18], но при этом потребуются большие вычисления.

Возможен вариант нечеткой биматричной игры, когда участники заинтересованы по возможности в минимальных компромиссных значениях выбранных стратегий. В этом случае также можно использовать соотношение (3), но из множества всех пар (a_i, b_j) отбираются те, для которых значение (3) минимально

$$\gamma(a_k, b_l) = \min_{i,j} [\gamma(a_i, b_j)], k = \overline{1, K}, K \leq I, l = \overline{1, L}, L \leq J. \quad (4)$$

Затем выполняются ранее описанные расчеты, и наиболее приемлемое компромиссное решение определяется по соотношению (4).

Числовой пример

Биматричная игра задана матрицами (табл. 3, 4). Числа в ячейках таблиц – это координаты максимумов функций принадлежности, в силу их симметричности совпадают с координатами центров тяжести. Игрок A использует треугольные функции принадлежности (см. рис. 1), ширина носителя нечетких чисел $\pm 10\%$ от модального значения, игрок B – функции принадлежности типа тент (см. рис. 1) с шириной носителя $\pm 20\%$. В столбцах таблиц, обозначенных как $\tilde{E}(a_i)$, $\tilde{E}(b_j)$ приведены координаты центров тяжести соответствующих эквивалентных нечетких множеств, на рис. 3 и 4 представлены их функции принадлежности.

Таблица 3

Матрица игрока A

A	b_1	b_2	b_3	b_4	$\tilde{E}(a_i)$
a_1	2	3	4	5	3,46
a_2	5	4	2	1	2,95
a_3	7	2	8	1	4,41

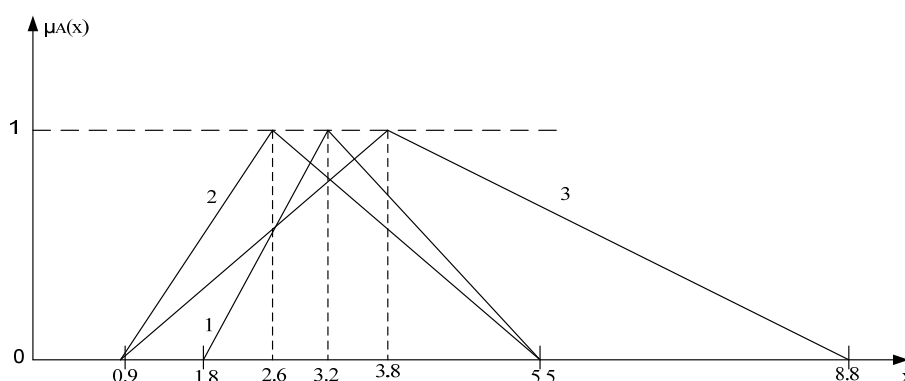


Рис. 3. Функции принадлежности эквивалентных нечетких множеств:

$$1 - \tilde{E}(a_1), \tilde{E}(a_1), 2 - \tilde{E}(a_2), -\tilde{E}(a_2), 3 - -\tilde{E}(a_3)$$

Таблица 4

Матрица игрока B

B	a_1	a_2	a_3	$\tilde{E}(b_j)$
b_1	1	3	4	2,74
b_2	4	10	6	6,44
b_3	5	4	6	4,95
b_4	9	3	2	4,28

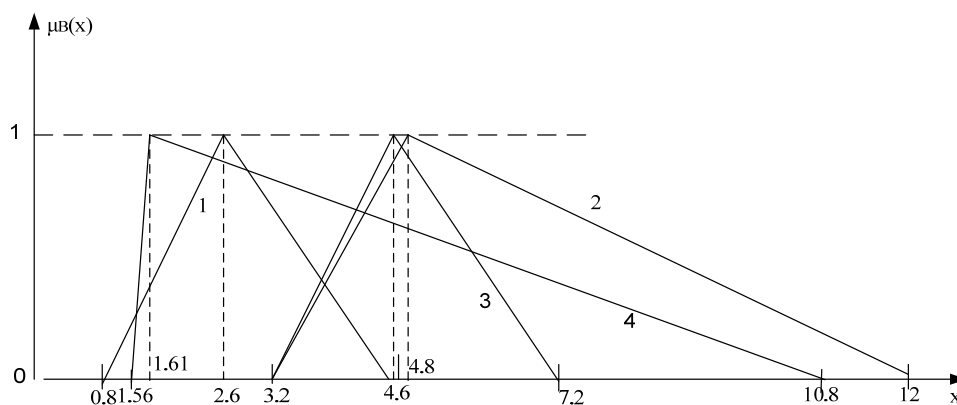


Рис. 4. Функции принадлежности эквивалентных нечетких множеств:

1 – $\tilde{E}(b_1)$; 2 – $\tilde{E}(b_2)$; 3 – $\tilde{E}(b_3)$; 4 – $\tilde{E}(b_4)$

В табл. 5 представлена матрица нечетких оценок достижения возможных компромиссных результатов, в которой цифры – это координаты центров тяжести функций принадлежности.

Таблица 5

Матрица нечетких оценок возможных достижения компромиссного результата

$\tilde{E}(a_i) \cap \tilde{E}(b_j)$	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	3,17	4,26	4,23	3,49
a_2	2,75	4,21	4,18	3,06
a_3	3,17	5,4	4,99	4,53

На рис. 5 представлены функции принадлежности для стратегий (a_3, b_2) (a_3, b_3) .

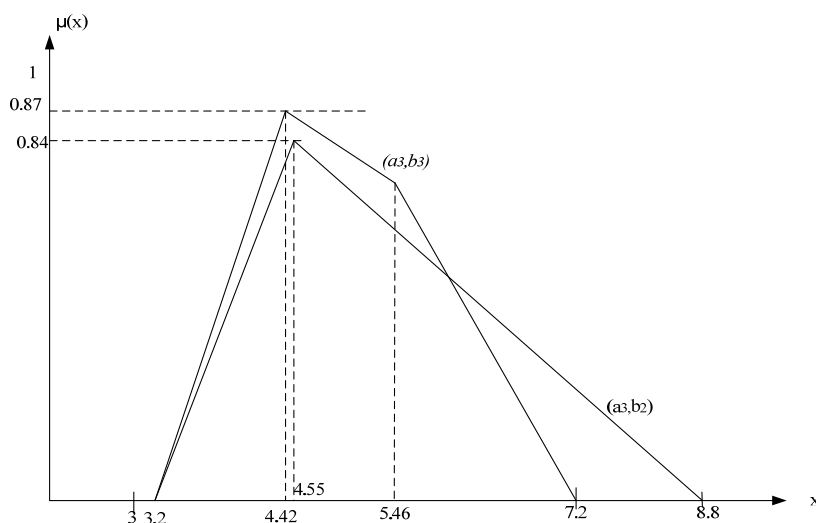


Рис. 5. Функции принадлежности нечетких компромиссных результатов

Таблица 6

Оценки возможных компромиссных результатов

$\gamma((a,b))$	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	2,41	2,29	2,33	2,77
a_2	2,6	1,9	1,9	2,57
a_3	2,41	3,67	3,8	3,09

$$F(a_3, b_2) = 2,56, F(a_3, b_3) = 1,78, \beta(a_3, b_2) = 0,7, \beta(a_3, b_3) = 0,36.$$

Этот результат позволяет выбирать в качестве наилучшего компромиссного результата выбор игроками стратегий (a_3, b_3) .

Заключение

Предложенный метод решения нечетких биматричных игр позволяет находить стратегии, обеспечивающие игрокам компромиссный результат, наилучшим образом удовлетворяющий их интересы как с точки зрения его значения, так и степени возможности его получения. Метод не накладывает ограничений на вид функций принадлежности нечетких элементов платежных матриц, что позволяет моделировать различные уровни неопределенности субъективных представлений участников игры.

Список литературы

1. Myerson, R.B. Game theory: analysis of conflict / R.B. Myerson. – Harvard University Press, London. Harvard. – 1997. – 584 p.
2. Geanakoplos J. Handbook of Game Theory with Economic Applications / J. Geanakoplos; ed. R. Aumann and S. Hart : Chapter 40 Common Knowledge. – Elsevier Science B.V. – 1994. – Vol. 2. – P. 1438–1496. – DOI 10.1016/S1574-0005(05)80072-4
3. Bigdel, H. Constrained Bimatrix Games with Fuzzy Goals and its Application in Nuclear Negotiations / H. Bigdel, H. Hassanpour, J. Tayyebi // Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization. – 2018. – Vol. 8, № 1. – P. 81–109. DOI: 10.22067/ijnao.v8i1.55385
4. Li, C. Characterization of the Equilibrium Strategy of Fuzzy Bimatrix Games Based on L-R Fuzzy Variables / C. Li // Journal of Applied Mathematics. – 2012. – Vol. 2. – Art. 824790. DOI 10.1155/2012/824790
5. Two-Person NonZero Sum Bimatrix Game with Fuzzy Payoffs and Its Equilibrium Strategy / C. Han, Z. Gao, Y. Yu, H. Zhang, S. Zhang, H. Bai // Journal of Mathematics Research. – 2009. – Vol. 1, № 1. – P. 51–61.
6. Roy, S. Bi-matrix game in bifuzzy environment / S. Roy, P. Mula // Journal of Uncertainty Analysis and Applications. – 2013. – № 1. – Art. 11. – P. 2–17. 10.1186/2195-5468-1-11
7. Yano, H. Multiobjective Bimatrix Game with Fuzzy Payoffs and Its Solution Method using Necessity Measure and Weighted Tchebycheff Norm / H. Yano, I. Nishizaki // Proceedings of the 13th International Joint Conference on Computational Intelligence (IJCCI 2021), Online Streaming, October 25–27, 2021. – Setúbal: SCITEPRESS – Science and Technology Publications, Lda, 2021. – P. 159–166. DOI 10.5220/0010630700003063
8. Yanoa, Hitoshi. Interactive Decision Making for Multiobjective Bimatrix Games with Fuzzy Payoffs Based on Possibility Measure / Yanoa Hitoshi, Nishizaki Ichiro // Atlantis Studies in Uncertainty Modelling. – Vol. 3. – P. 330–337. DOI 10.2991/asum.k.210827.044

9. Singla, N. A new approach to solve intuitionistic fuzzy bi-matrix games involving multiple opinions / N. Singla, P. Kaur, U.C. Gupta // *Iranian Journal of Fuzzy Systems*. – 2023. – Vol. 20, № 1. – P. 185–197.
10. Mockus, J. A Web-Based Bimatrix Game Optimization Model of Polynomial Complexity / J. Mockus // *INFORMATICA*. – 2009. – Vol. 20, № 1. – P. 79–98.
11. A Bimatrix Game with Fuzzy Payoffs and Crisp Game / K.N. Kudryavtsev, I.S. Stabulit, B. Kashirinykh, V.I. Ukhobotov // *CEUR Workshop Proceedings [Proceedings of the VIII International Conference on Optimization and Applications (OPTIMA-2017), Petrovac, Montenegro, 2–7 October 2017]*. – 2017. – Vol. 1987. – P. 343–349.
12. Keller, A.A. Fuzzy Conflict Games in Economics and Management: single objective fuzzy bi-matrix games / A. A. Keller // *Contributions to Game Theory and Management*. – 2010. – Vol. 3. – P. 192–219.
13. Dubois, D. Theories des Possibilités. Applications à la représentation des connaissances en informatique / D. Dubois, H. Prade. – Masson, 1980. – 288 p.
14. Чернов, В.Г. Нечеткая модель принятия решений в условиях неопределенности, основанная на преобразовании Fuzzy Triangle / В.Г. Чернов // *Интеллектуальные системы в производстве*. – 2022. – Т. 20, № 1. – С. 88–95.
15. Ибрагимов, В.А. Элементы нечеткой математики / Мин-во обр. Азербайджанской республики; Азербайджан. гос. нефт. акад-я; ред. Я. Ш. Салимов. – Баку, 2010. – 392 с.
16. Dubois, D. New results about properties and semantics of fuzzy-set-theoretic operators / D. Dubois, H. Prade // *Fuzzy Sets* / Ed. By P.P. Wang and S.K. Chang. – N.Y.; Plenum Press, 1980. – P. 59–75. DOI 10.1007/978-1-4684-3848-2_6
17. Yager, R.R. Multicriteria decisions with soft: an application of fuzzy set and possibility theory – Part 1 / R.R. Yager // *Fuzzy Mathematics*. – 1982. – Vol. 2, № 2. – P. 21–28.
18. Yager, R.R. Multicriteria decisions with soft: an application of fuzzy set and possibility theory – Part 2 / R.R. Yager // *Fuzzy Mathematics*. – 1982. – Vol. 2. – № 3. – P. 7–16.

References

1. Myerson R.B. *Game theory: analysis of conflict*. London. Harvard, Harvard University Press, 1997, 584 p.
2. Geanakoplos J. *Handbook of Game Theory with Economic Applications* / J. Geanakoplos; ed. R. Aumann and S. Hart : Chapter 40 Common Knowledge. – Elsevier Science B.V. – 1994. – Vol. 2. – P. 1438–1496. – DOI 10.1016/S1574-0005(05)80072-4
3. Bigdel H., Hassanpour H., Tayyebi J. Constrained Bimatrix Games with Fuzzy Goals and its Application in Nuclear Negotiations. *Journal of Numerical Analysis and Optimization*, 2018, vol. 8, no. 1, pp. 81-109. DOI 10.22067/ijnao.v8i1.55385
4. Li C. Characterization of the Equilibrium Strategy of Fuzzy Bimatrix Games Based on L-R Fuzzy Variables. *Journal of Applied Mathematics*, 2012, vol.12, art. 824790. DOI 10.1155/2012/824790.
5. Han C., Gao Z., Yu Y., Zhang H., Zhang S., Bai H. Two-Person NonZero Sum Bimatrix Game with Fuzzy Payoffs and Its Equilibrium Strategy. *Journal of Mathematics Research*, 2009, vol. 1, no. 1, pp.51-61.
6. Roy S., Mula P. Bi-matrix game in bifuzzy environment. *Journal of Uncertainty Analysis and Applications*, 2013, no. 1, art. 11, DOI 10.1186/2195-5468-1-11

7. Yano H., Nishizaki I. Multiobjective Bimatrix Game with Fuzzy Payoffs and Its Solution Method using Necessity Measure and Weighted Tchebycheff Norm. *In Proceedings of the 13th International Joint Conference on Computational Intelligence (IJCCI 2021 Online Streaming, October 25-27, 2021.* – Setúbal: SCITEPRESS – Science and Technology Publications, Lda, 2021. – P. 159–166. DOI 10.5220/0010630700003063
8. Yano H., Nishizaki I. Decision Making for Multiobjective Bimatrix Games with Fuzzy-Payoffs Based on Possibility Measure. *Atlantis Studies in Uncertainty Modelling, vol. 3*, pp.330-337. DOI 10.2991/asum.k.210827.044
9. Singla N., Kaur P., Gupta U.C. A new approach to solve intuitionistic fuzzy bi-matrix games involving multiple opinions. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 2023, vol. 20, no. 1, pp.185-197.
10. Mockus J. A Web-Based Bimatrix Game Optimization Model of Polynomial Complexity. *INFORMATICA*, 2009, vol. 20, no. 1. pp. 79–98.
11. Kudryavtsev K.N., Stabulit I.S., Kashirinykh B., Ukhobotov V.I. A Bimatrix Game with Fuzzy Payoffs and Crisp Game. *CEUR Workshop Proceedings.* – 2017. – Vol. 1987. – P. 343–349.
12. Keller A. A. Fuzzy Conflict Games in Economics and Management: Single objective fuzzy bi-matrix games. *Contributions to Game Theory and Management*, 2010, vol. 3, pp.192–219.
13. Dubois D., Prade H. Theories of Possibilities. Applications à la représentation des connaissances en informatique. Masson, 1980, 288 p.
14. Chernov V.G. Fuzzy Model for Decision Support under Uncertainty Based on the «Fuzzy-triangle» Transformation. *Intelligent systems in manufacturing*, 2022, vol. 20, no. 1, pp. 88-95.
15. Ibragimov V.A. Elements of Fuzzy Mathematics. Baku, 2010, 392 p.
16. Dubois, D., Prade, H. New Results about Properties and Semantics of Fuzzy Set-Theoretic Operators. In: Wang, P.P., Chang, S.K. (eds) *Fuzzy Sets*. Plenum Press, New York. 1980, pp.59-75. DOI 10.1007/978-1-4684-3848-2_6
17. Yager R.R. Multicriteria decisions with soft: an application of fuzzy set and possibility theory – Part 1. *Fuzzy Mathematics*, 1982, vol. 2, no. 2, pp. 21–28.
18. Yager R.R. Multicriteria decisions with soft: an application of fuzzy set and possibility theory – Part 2. *Fuzzy Mathematics*, 1982, vol. 2, no. 3, pp. 7–16.