

Тукмаков, Д. А. Исследование влияния процесса коагуляции на результаты численных расчетов динамики газозвеси / Д. А. Тукмаков // Прикладная математика и вопросы управления. – 2025. – № 2. – С. 22–37. DOI 10.15593/2499-9873/2025.2.02

Библиографическое описание согласно ГОСТ Р 7.0.100–2018

Тукмаков, Д. А. Исследование влияния процесса коагуляции на результаты численных расчетов динамики газозвеси / Д. А. Тукмаков. – Текст : непосредственный. – DOI 10.15593/2499-9873/2025.2.02 // Прикладная математика и вопросы управления / Applied Mathematics and Control Sciences. – 2025. – № 2. – С. 22–37.



ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
И ВОПРОСЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 2, 2025

<https://ered.pstu.ru/index.php/amcs>



Научная статья

DOI: 10.15593/2499-9873/2025.2.02

УДК 532, 533



Исследование влияния процесса коагуляции на результаты численных расчетов динамики газозвеси

Д.А. Тукмаков

Федеральный исследовательский центр Казанский научный центр Российской академии наук ИММ,
Казань, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 27 сентября 2024

Одобрена: 17 июня 2025

Принята к публикации:

08 августа 2025

Финансирование

Работа выполнялась в рамках государственного задания Федерального исследовательского центра Казанского научного центра Российской академии наук.

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Вклад автора 100 %.

Ключевые слова:

численное моделирование, континуальная модель динамики многофазной среды, межфазное взаимодействие, полидисперсная газозвесь

АННОТАЦИЯ

Работа посвящена математическому моделированию динамики взвешенных в газе твердых или жидких дисперсных включений – газозвесей. В исследовании численно моделировалась динамика газозвеси в канале с учетом эффекта коагуляции дисперсных включений и без такового. Предполагалось, что в канале движется запыленная среда, через боковую поверхность канала происходит вдув капельных фракций, коагулирующих с дисперсными включениями запыленной среды. Представлена математическая модель, реализующая континуальную методику моделирования динамики многофазных сред, которая предполагает решение полной системы уравнений динамики для каждой из фаз смеси. Система уравнений динамики газа, а также фракций дисперсной фазы включала в себя уравнение сохранения плотности, уравнения сохранения пространственных составляющих импульса и уравнение сохранения энергии. Для фракций дисперсной фазы вводилась функция «средней плотности», представляющая собой произведение объемного содержания фракции, являющегося функцией пространственных и временной переменной, на ее физическую плотность, являющуюся постоянной величиной.

Несущая среда описывалась как вязкий сжимаемый и теплопроводный газ. Также учитывался межфазный обмен импульсом и межфазный теплообмен. Межфазный обмен импульсом включал в себя динамическую силу Архимеда, силу присоединенных масс, а также силу аэродинамического сопротивления частиц. На границах расчетной области, моделируемых как твердые поверхности, задавались однородные граничные условия Дирихле для составляющих скорости несущей среды и дисперсной фазы. Дисперсная фаза газозвеси описывалась как многофракционная, фракции которой отличаются размером дисперсных включений и плотностью материала частиц.

Система уравнений математической модели интегрировалась конечно-разностным методом второго порядка точности. Для подавления численных осцилляций применялась схема нелинейной коррекции сеточной функции. Математическая модель предполагала учет взаимодействия между частицами через поглощение более крупными частицами более мелких частиц за счет столкновительной коагуляции. Сопоставление результатов с учетом и без учета эффекта коагуляции капельной и пылевой фракции газозвеси демонстрирует, что отсутствие учета эффекта коагуляции оказывает существенное влияние как на распределение концентраций фракций газозвеси, так и на физические поля фракций и несущей среды.

© Тукмаков Дмитрий Алексеевич – к.ф.-м.н., научный сотрудник, лаборатория механики сплошной среды, e-mail: tukmakovda@imm.knc.ru, ORCID 0000-0002-0335-8548.



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

Perm Polytech Style: Tukmakov D.A. Study of the influence of the coagulation process on the results of numerical calculations of the dynamics of a gas suspension. *Applied Mathematics and Control Sciences*. 2025, no. 2, pp. 22–37. DOI: 10.15593/2499-9873/2025.2.02

MDPI and ACS Style: Tukmakov, D.A. Study of the influence of the coagulation process on the results of numerical calculations of the dynamics of a gas suspension. *Appl. Math. Control Sci.* **2025**, *2*, 22–37. <https://doi.org/10.15593/2499-9873/2025.2.02>

Chicago/Turabian Style: Tukmakov, Dmitry A. 2025. “Study of the influence of the coagulation process on the results of numerical calculations of the dynamics of a gas suspension”. *Appl. Math. Control Sci.* no. 2: 22–37. <https://doi.org/10.15593/2499-9873/2025.2.02>



APPLIED MATHEMATICS
AND CONTROL SCIENCES

№ 2, 2025

<https://ered.pstu.ru/index.php/amcs>



Article

DOI: 10.15593/2499-9873/2025.2.02

UDC 532, 533



Study of the influence of the coagulation process on the results of numerical calculations of the dynamics of a gas suspension

D.A. Tukmakov

Federal Research Center Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences IME,
Kazan, Russian FederationF

ARTICLE INFO

Received: 27 September 2024
Approved: 17 June 2025
Accepted for publication:
08 August 2025

Funding

The work was carried out within the framework of the state assignment of the Federal Research Center of the Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences.

Conflicts of Interest

The author declares no conflict of interest.

Author Contributions

100 %.

Keywords: numerical modeling, continuum model of multiphase medium dynamics, interphase interaction, polydisperse gas suspension

ABSTRACT

The work is devoted to mathematical modeling of the dynamics of solid or liquid dispersed inclusions suspended in gas – gas suspensions. The study numerically simulated the dynamics of a gas suspension in a channel with and without taking into account the effect of coagulation of dispersed inclusions. It was assumed that a dusty medium moves in the channel, through the side surface of the channel there is an injection of droplet fractions coagulating with dispersed inclusions of the dusty medium. The work presents a mathematical model that implements a continuum technique for modeling the dynamics of multiphase media, which involves solving a complete system of dynamic equations for each of the phases of the mixture. The system of equations for the dynamics of gas, as well as dispersed phase fractions, included the density conservation equation, the equations for the conservation of spatial components of momentum, and the energy conservation equation. For the dispersed phase fractions, the "average density" function was introduced, which is the product of the fraction volume content, which is a function of spatial and temporal variables, and its physical density, which is a constant value.

The carrier medium was described as a viscous compressible and heat-conducting gas. The interphase momentum exchange and interphase heat exchange were also taken into account. The interphase momentum exchange included the dynamic Archimedes force, the force of added masses, and the force of aerodynamic drag of particles. Homogeneous Dirichlet boundary conditions were specified for the velocity components of the carrier medium and the dispersed phase at the boundaries of the computational domain, modeled as solid surfaces. The dispersed phase of the gas suspension was described as multifractional, the fractions of which differ in the size of dispersed inclusions and the density of the particle material.

The system of equations of the mathematical model was integrated by the finite-difference method of the second order of accuracy. To suppress numerical oscillations, a nonlinear correction scheme for the grid function was used. The mathematical model assumed that the interaction between particles was taken into account, through the absorption of smaller particles by larger particles due to collisional coagulation. Comparison of the results with and without taking into account the coagulation effect of the droplet and dust fractions of the gas suspension demonstrates that the absence of consideration of the coagulation effect has a significant effect both on the distribution of concentrations of the gas suspension fractions and on the physical fields of the fractions and the carrier medium.

© Dmitry A. Tukmakov – CSc of physical and mathematical sciences, Researcher, laboratory of continuum mechanics, e-mail: tukmakovda@imm.knc.ru, ORCID 0000-0002-0335-8548.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

Введение

Одним из актуальных вопросов математического моделирования является моделирование гидродинамических процессов. В промышленных технологиях часто встречаются течения неоднородных сред, для моделирования таких течений необходимы математические модели, отличающиеся от математических моделей классической гидродинамики. В работе [1] для линейаризованной системы Навье – Стокса рассмотрена начально-краевая задача, описывающая нестационарное течение вязкой многофазной среды в сетеподобной области. Численным методом Фаэдо – Галеркина, реализуемого на основе базисных функций, формируемых собственными функциями спектральной задачи, показана однозначная разрешимость рассматриваемой начально-краевой задачи в слабой постановке. В публикации [2] в связи с проблемами нефтегазовой отрасли исследуются течения неоднородных сред – численно моделируется устройство насоса перекачки многофазных смесей. Рассмотрена конфигурация устройства, позволяющая более эффективно перемешивать компоненты смеси. Выявлены закономерности работы аппарата, позволяющие управлять эффективностью перекачки сред.

В монографии [3] представлена общая теория динамики многофазных сред. В монографии [4] в одномерном приближении, без учета вязкости среды, разработаны математические модели, проведены численные расчеты динамики запыленных, газокапельных и порошковых сред. В монографии [5] разработаны математические модели, численные алгоритмы моделирования и приведены результаты расчетов ударно-волновых и детонационных процессов в газовзвесах металлических частиц.

В статье [6] с помощью численного моделирования исследуются взаимодействия ударных волн сферической геометрии с неоднородностями, расположенными на плоской поверхности. Результаты расчетов показали, что наличие на плоской поверхности гетерогенного слоя приводит к ослаблению падающей ударной волны внутри этого слоя в зависимости от объемной доли дисперсной фазы. Расчеты демонстрируют существенное влияние межфазного взаимодействия на динамику ударной волны. Математическая модель пренебрегала вязкостью несущей среды и моделированием поля скоростей дисперсной фазы.

В публикации [7] представлены результаты физико-математического моделирования процесса адсорбции газовых компонентов на адсорбенте, инжектируемом в паровоздушный поток в цилиндрической трубе, а также в трубе Вентури. С помощью математической модели сделаны оценки адсорбции газа для диаметра дисперсных включений 50 мкм. На основе расчетных данных проведен анализ процесса адсорбции в рассматриваемых условиях и сделаны практические выводы. Представленная в работе математическая модель пренебрегала полидисперсным составом частиц, моделируемое течение предполагалось одномерным и стационарным.

В исследовании [8] выполнено численное решение задачи определения эффективности насадочных скрубберов при конденсационном охлаждении и очистке от дисперсной фазы газов в процессе пленочного течения жидкости. Записана система дифференциальных уравнений с частными производными сопряженного переноса теплоты, массы водяного пара и дисперсной фазы в слое насадки. Тепло- и массообмен и перенос частиц между газовой и жидкой фазами учитывается с помощью объемных источников членов межфазного переноса. С помощью численных решений получены сравнительные характеристики насадок, а также научно-технические решения по модернизации скрубберов, внедренные в промышленности. Двухмерные уравнения математической модели за-

писаны в цилиндрической системе координат, математическая модель пренебрегала нестационарными эффектами.

В публикации [9] в связи с проблемами в ядерной энергетике исследуются процессы осаждения запыленных сред. Экспериментально изучаются методы жидкостного осаждения взвесей мелкодисперсных твердых частиц. Утверждается, что жидкостная фильтрация твердодисперсных аэрозолей является более эффективной относительно других методов фильтрации запыленных потоков.

В работе [10] исследуется процесс коагуляции твердых дисперсных частиц с каплями орошаемой жидкости в аппаратах мокрого типа на основе труб Вентури под действием ультразвуковых колебаний высокой интенсивности. Цель работы – повышение эффективности работы аппаратов мокрой очистки газов на основе скрубберов Вентури за счет увеличения степени поглощения твердых высокодисперсных частиц каплями жидкости в высокоинтенсивных ультразвуковых полях. В работе использовался теоретический метод исследования, основанный на численной реализации физико-математических моделей движения газодисперсного потока в скруббере Вентури и коагуляции дисперсных частиц. В результате моделирования показана возможность повышения эффективности улавливания высокодисперсных частиц в скруббере Вентури за счет ультразвуковых колебаний и определены оптимальные и ультразвукового воздействия, при которых обеспечивается максимальное повышение степени очистки газовых выбросов. Течение газового потока описывается системой стационарных уравнений Навье – Стокса, без учета межфазного взаимодействия.

В публикации [11] для создания более эффективных способов пылеулавливания проведены исследования физических особенностей инерционного движения капель жидкости, по результатам которых разработана математическая модель их движения в газовой среде. Предложена технология гидровихревого пылеулавливания. Экспериментально установлено, что эффективность пылеулавливания определяется не расходом жидкости, а скоростными режимами движения неоднородной среды и дисперсностью капель.

В статье [12] проведено математическое моделирование коагуляции капель конечного числа фракций размеров полидисперсной смеси, впрыскиваемых форсункой в область аэрохолодильной установки вдоль направления движения потока воздуха. Решение систем дифференциальных уравнений, описывающих изменение концентраций фракций капель, их плотностей, а также масс капель каждой из фракций с течением времени, осуществляется методом Рунге – Кутты четвертого порядка точности. Недостатком представленной работы является то, что математическая модель пренебрегала расчетом газовой динамики несущей среды, динамика капель жидкости рассматривалась в двухмерной постановке.

Для моделирования динамики газовзвесей на данный момент существует три основных подхода [4]: равновесный подход предполагает описание течения неоднородной среды как однородного газа с учетом коэффициентов, дающих поправки на неоднородность среды; диффузионный подход гидродинамики неоднородных сред предполагает интегрирование уравнений сохранения импульса и энергии для всей смеси в целом и отдельное интегрирование уравнений сохранения плотности компонент смеси; также существует континуальный подход механики неоднородных сред, предполагающий интегрирование для каждой из компонент смеси полной системы уравнений динамики сплошной среды с учетом межфазного обмена импульсом и теплообмена. Континуальный подход динамики неоднородных сред является наиболее адекватным при описании течений многофазных сред,

сред в которых компоненты имеют различное агрегатное состояние в случае, когда массовые доли фаз смеси являются величинами одного порядка.

В работах, посвященных динамике неоднородных сред, в связи с различными практическими приложениями исследуются как течения газодисперсных сред, так и физические процессы, протекающие в дисперсной фазе неоднородных сред [12]. Интерес к динамике коагулирующих дисперсных сред связан с химической промышленностью, энергетикой и аэрокосмическими технологиями [7–13]. В данной работе численно моделируется динамика газовзвесей в вязком сжимаемом теплопроводном газе, что позволяет учесть пристеночную вязкость газа. Дисперсная фаза моделировалась как двухфракционная двухдисперсная, фракции дисперсной фазы могут отличаться как плотностью материала, так и размером дисперсных включений [14]. Применяемая для численных расчетов математическая модель реализовывала континуальную методику моделирования течений многофазных сред [3–5]. Учитывался межфазный теплообмен и межфазный обмен импульсом. Математическая модель учитывала несколько сил межфазного обмена импульсом, что позволяет более точно описать динамику дисперсных включений в потоке газа.

Результаты математического моделирования динамики многофазных сред во многом зависят от того, каким образом учитываются эффекты взаимодействия компонент смеси.

Целью данной работы было исследование влияния учета коагуляции дисперсных включений на результаты расчета динамики газовзвеси, в которой массовые доли газовой и дисперсной фазы имеют близкое значение.

Материалы и методы

Численные расчеты, описанные в данной работе, были проведены вычислительным комплексом [15]. Движение несущей среды описывается системой уравнений Навье – Стокса с учетом межфазного силового взаимодействия и теплообмена [16–20] (1)–(4):

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_1 u_1)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_1 v_1)}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial (\rho_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_1 u_1^2 + p - \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho_1 u_1 v_1 - \tau_{xy}) = - \sum_{i=2,n} F_{xi} + \sum_{i=2,n} \alpha_i \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial (\rho_1 v_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_1 u_1 v_1 - \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho_1 v_1^2 + p - \tau_{yy}) = - \sum_{i=2,n} F_{yi} + \sum_{i=2,n} \alpha_i \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (e_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left([e_1 + p - \tau_{xx}] u_1 - \tau_{xy} v_1 - \lambda \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left([e_1 + p - \tau_{yy}] v_1 - \tau_{xy} u_1 - \lambda \frac{\partial T_1}{\partial y} \right) = \\ = \sum_{i=2,n} Q_i - \sum_{i=2,n} (|F_{xi}| u_i - |F_{yi}| v_i) + \sum_{i=1,n} \alpha_i \left(\frac{\partial (p u_1)}{\partial x} + \frac{\partial (p v_1)}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\tau_{xx} = \mu \left(2 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{2}{3} D \right), \tau_{yy} = \mu \left(2 \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{2}{3} D \right), \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right), D = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}.$$

Здесь τ_{xx} , τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{yy} – компоненты тензора вязких напряжений [21]. Динамика каждой фракции дисперсной фазы описывается уравнением сохранения средней плотности фрак-

ции, уравнениями сохранения составляющих импульса и уравнением сохранения энергии [13, 16–20] (5)–(8):

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i u_i)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_i v_i)}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial(\rho_i u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i u_i^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_i u_i v_i)}{\partial y} = F_{xi} - \alpha_i \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial(\rho_i v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i u_i v_i)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_i v_i^2)}{\partial y} = F_{yi} - \alpha_i \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial(e_i)}{\partial t} + \frac{\partial(e_i u_i)}{\partial x} + \frac{\partial(e_i v_i)}{\partial y} = -Q_i, \quad (8)$$

$$\rho_i = \alpha_i \rho_{i0}, \quad e_i = \rho_i C_{vi} T_i,$$

$$F_{xi} = F_{Dxi} + F_{DAxi} + F_{AMxi},$$

$$F_{yi} = F_{Dyi} + F_{DAyi} + F_{AMxi}.$$

Использовались следующие обозначения u_1, v_1, p, ρ_1 – декартовы составляющие скорости несущей среды, давление и плотность газа; e_1, T_1 – энергия и температура несущей среды; те же параметры фракций дисперсной фазы обозначены индексом i . Для описания изменения объемного содержания i -й фракции дисперсной фазы применялась функция «средней плотности» [3] – $\rho_i = \rho_{i0} \alpha_i$, являющаяся произведением физической плотности материала фракции дисперсной фазы ρ_{i0} , остающейся неизменной на объемное содержание фракции α_i , являющееся функцией временной и пространственных переменных; μ и λ соответственно вязкость и теплопроводность газа. Температура несущей среды находится из уравнения $T = (\gamma - 1)(e/\rho - 0,5(u^2 + v^2)/R)$, где R – газовая постоянная несущей фазы, γ – постоянная адиабаты, C_{vi} – теплоемкость материала i -й фракции.

Межфазный обмен импульсом включал в себя силу аэродинамического сопротивления – F_D , динамическую силу Архимеда – F_{DA} , силу присоединенных масс – F_{MA} [3]:

$$F_{Dxi} = \frac{3}{4} \frac{\alpha_i}{d_i} C_{di} \rho_1 \sqrt{(u_1 - u_i)^2 + (v_1 - v_i)^2} (u_1 - u_i), \quad F_{DAxi} = \alpha_i \rho_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right),$$

$$F_{AMxi} = 0,5 \alpha_i \rho_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_i}{\partial t} - u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} - v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} \right),$$

$$F_{Dyi} = \frac{3}{4} \frac{\alpha_i}{d_i} C_{di} \rho_1 \sqrt{(u_1 - u_i)^2 + (v_1 - v_i)^2} (v_1 - v_i), \quad F_{DAyi} = \alpha_i \rho_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right),$$

$$F_{AMyi} = 0,5 \alpha_i \rho_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial t} - u_i \frac{\partial v_i}{\partial x} - v_i \frac{\partial v_i}{\partial y} \right),$$

где C_{di} – коэффициент сопротивления частиц i -й фракции. Теплообмен между фракциями и несущей средой описывается выражением [4] – $Q_i = 6\alpha_i \lambda Nu_i (T_1 - T_i)/d_i^2$, $i=2, \dots, n$, с замыкающими соотношениями [4]:

$$C_{di} = \frac{24}{Re_{i1}} + \frac{4}{Re_{i1}^{0,5}} + 0,4, \quad M_{i1} = |\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_i| / c,$$

$$Re_{i1} = \rho_1 |\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_i| d_i / \mu, \quad Pr = C_p \mu / \lambda, \quad Nu_{1j} = 2 \exp(-M_{1j}) + 0,459 Re_{1j}^{0,55} Pr^{0,33}.$$

Здесь $\mathbf{V}_i$ – вектор скорости i -й компоненты смеси.

Для описания процесса коагуляции частиц использовалась модель, представленная в работах [13; 14]. Масса m_i частицы i -й фракции ($i=2, \dots, n$) возрастает за счет поглощения более мелких частиц j -х фракций с массой m_j [13] ($j=2, 3, \dots, i-1$):

$$\frac{dm_i}{dt} = \sum_{j=2}^{i-1} k_{ij} n_j m_j, \quad k_{ij} = \frac{\pi}{4} (d_i + d_j)^2 \left[u_i \cos(\theta) + v_i \sin(\theta) - \sqrt{u_j^2 + v_j^2} \right], \quad \theta = \arctg(v_j / u_j).$$

Здесь k_{ij} – константы коагуляции. Полученное значение массы i -й фракции дисперсной фазы в данном узле конечно-разностной сетки определяет новое значение диаметра частицы d_i . Уменьшение концентрации мелких частиц i -х фракций вследствие поглощения их частицами j -х ($j=i+1, i+2, \dots, n$) фракций, чьи дисперсные включения имеют больший размер, описывается уравнением:

$$\frac{dn_i}{dt} = -n_i \sum_{j=i+1}^n k_{ij} n_j.$$

Новое значение объемного содержания i -й фракции, изменившегося вследствие коагуляции, определяется как $\alpha_i = n_i (\pi (d_i)^3) / 6$. Объемное содержание и физическая плотность вещества определяет среднюю плотность фракции, изменившуюся вследствие коагуляции: $\rho_i = \alpha_i \rho_0$. Слияние мелких капель с более крупными приводит к изменению скорости капель укрупнившейся фракции [13; 14]:

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{1}{m_i} \sum_{j=2}^{i-1} k_{ij} (u_j - u_i) m_j n_j, \quad \frac{dv_i}{dt} = \frac{1}{m_i} \sum_{j=2}^{i-1} k_{ij} (v_j - v_i) m_j n_j.$$

Температура частицы i -й фракции после коагуляции с частицами фракций, чьи частицы имеют меньший размер, находилась из соотношения:

$$T_i^* = \frac{1}{C_i^* m_i^*} \left(\sum_{j=2}^{i-1} k_{ij} n_j C_j m_j T_j + C_i m_i T_i \right),$$

где T_i^* , C_i^* , m_i^* – температура, удельная массовая теплоемкость и масса частицы i -й фракции после коагуляции, T_i , C_i , m_i – те же параметры до коагуляции. Зная новую температуру и среднюю плотность, находим тепловую энергию фракции, измененную при коагуляции. Связанные с коагуляцией изменения средней плотности, скорости и температуры фракций дисперсной фазы учитывались на каждом временном шаге основного алгоритма.

На твердых поверхностях для составляющих скорости задавались однородные граничные условия Дирихле, для остальных динамических функций задавались однородные граничные условия Неймана. На входе в канал задавалась продольная скорость пылевой фракции и газа, концентрация пылевой фракции. На выходе из канала задавались однородные условия Неймана для всех функций. На боковой поверхности вдува задавалась поперечная скорость газа и капельной фракции, концентрация капельной фракции:

$$\begin{aligned}
 u_1(t, 1, j) &= u_0, \quad u_2(t, 1, j) = u_0, \quad u_3(t, 1, j) = u_3(t, 2, j), \quad v_1(t, 1, j) = 0, \quad v_2(t, 1, j) = 0, \quad v_3(t, 1, j) = v_3(t, 2, j), \\
 u_3(t, N_x, j) &= u_3(t, N_x - 1, j), \quad v_3(t, N_x, j) = v_3(t, N_x - 1, j), \\
 u_k(t, i, N_y) &= 0, \quad v_k(t, i, N_y) = 0, \\
 u_k(t, i, 1) &= 0, \quad v_k(t, i, 1) = 0, \\
 \rho_1(t, 1, j) &= \rho_1(t, 2, j), \quad \rho_2(t, 1, j) = \rho_{20} \alpha_{20}, \quad \rho_3(t, 1, j) = \rho_3(t, 2, j), \\
 \rho_1(t, N_x, j) &= \rho_1(t, N_x - 1, j), \quad \rho_k(t, N_x, j) = \rho_k(t, N_x - 1, j), \quad \rho_k(t, i, 1) = \rho_k(t, i, 2), \\
 \rho_k(t, i, N_y) &= \rho_k(t, i, N_y - 1), \\
 e_k(t, 1, j) &= e_k(t, 2, j), \quad e_k(t, N_x, j) = e_k(t, N_x - 1, j), \\
 e_k(t, i, 1) &= e_k(t, i, 2), \quad e_k(t, i, N_y) = e_k(t, i, N_y - 1), \\
 p(t, 1, j) &= p(t, 2, j), \quad p(t, N_x, j) = p(t, N_x - 1, j), \\
 p(t, i, 1) &= p(t, i, 2), \quad p(t, i, N_y) = p(t, i, N_y - 1).
 \end{aligned}$$

В области вдува задаются следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}
 L_1 &\leq i\Delta x \leq L_2 \\
 \rho_3(t, i, 1) &= \alpha_{30} \rho_{30}, \quad v_1(t, i, 1) = v_0, \quad v_3(t, i, 1) = v_0.
 \end{aligned}$$

Здесь $N_x=200$, $N_y=100$ – количество узлов; i, j – нумерация узлов в x и y направлениях соответственно.

Система уравнений динамики многофазной среды (1)–(8) решалась двухэтапным явным конечно-разностным методом Мак-Кормака, позволяющим получать решения второго порядка точности [21].

Алгоритм численного метода можно отобразить на примере нелинейного уравнения (9):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial a(f)}{\partial x} + \frac{\partial b(f)}{\partial y} = c(f). \quad (9)$$

При реализации алгоритма последовательно выполняются действия (10) и (11) [21]:

$$f_{j,k}^* = f_{j,k}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (a_{j+1,k}^n - a_{j,k}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (b_{j,k+1}^n - b_{j,k}^n) + \Delta t c_{j,k}^n, \quad (10)$$

$$f_{j,k}^{n+1} = 0,5(f_{j,k}^n + f_{j,k}^*) - 0,5 \frac{\Delta t}{\Delta x} (a_{j,k}^* - a_{j-1,k}^*) - 0,5 \frac{\Delta t}{\Delta y} (b_{j,k}^* - b_{j,k-1}^*) + 0,5 \Delta t c_{j,k}^*. \quad (11)$$

Здесь Δx , Δy , Δt – шаги конечно-разностной сетки. Для подавления численных осцилляций, возникающих в процессе интегрирования уравнений методом Мак-Кормака, применялась схема нелинейной коррекции [15; 22]. Сопоставление результатов расчетов вычислительного комплекса [15] с физическим экспериментом проведено в работе [18], исследование сеточной сходимости осуществлено в публикации [19], сопоставление численных расчетов с аналитическим решением представлено в статье [20].

Результаты

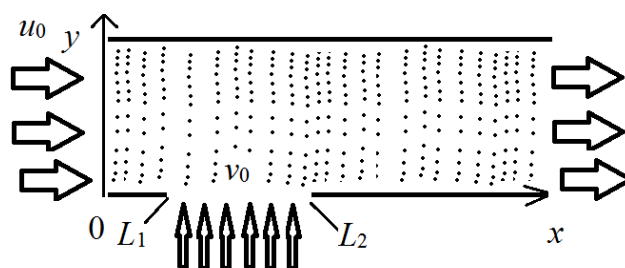


Рис. 1. Общая схема течения

На рис. 1 представлена общая схема моделируемого течения, в котором в поток запыленной среды вдувается поток капельной фракции. В начальный момент времени пылевая фракция и газ движутся в продольном направлении со скоростью $u_0=20$ м/с. Поток капельной фракции движется со скоростью $v_0=4$ м/с под углом $\alpha=\pi/2$ к поверхности канала. Длина канала составляла $L=0,4$ м, ширина канала $h=0,1$ м, $L_1=0,1$ м, $L_2=0,2$ м. Физическая плотность пылевой и капельной фракций соответственно $\rho_{20}=2500$ кг/м³ и $\rho_{30}=1000$ кг/м³. Диаметр частиц пылевой фракции – $d_1=2$ мкм, диаметр капель – $d_2=200$ мкм. Начальное объемное содержание пылевой фракции и объемное содержание пылевой фракции на входной поверхности канала – $\alpha_{20}=0,0004$, объемное содержание капельной фракции на поверхности вдува – $\alpha_{30}=0,001$. Таким образом, средние плотности пылевой и капельной фракций составляют $\rho_2=\rho_3=1$ кг/м³, при суммарной средней плотности дисперсной фазы, близкой к плотности несущей среды, эффекты межфазного взаимодействия наиболее точно описываются в рамках континуальной методики динамики неоднородных сред [4]. Расход дисперсной и капельной фракций соответственно $\rho_2 \cdot u_0=20$ кг/м²·с и $\rho_3 \cdot v_0=4$ кг/м²·с.

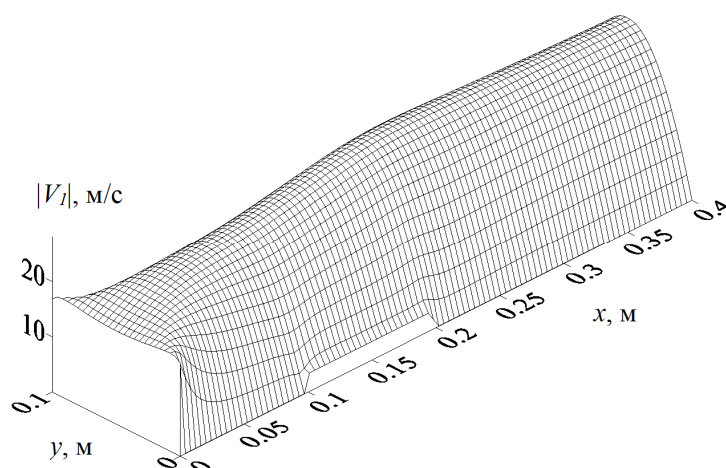


Рис. 2. Модуль скорости газа

В работе несущая среда описывалась как вязкий, сжимаемый теплопроводный газ, на твердых поверхностях для всех составляющих скорости задавались однородные граничные условия Дирихле (рис. 2).

Двумерное распределение средней плотности пылевой фракции демонстрирует, что за счет поглощения твердых мелкодисперсных частиц крупными каплями вдоль всего канала средняя плотность частиц уменьшается, вблизи ядра течения средняя плотность пылевой фракции составляет приблизительно 85 % от начальной средней плотности (рис. 3).

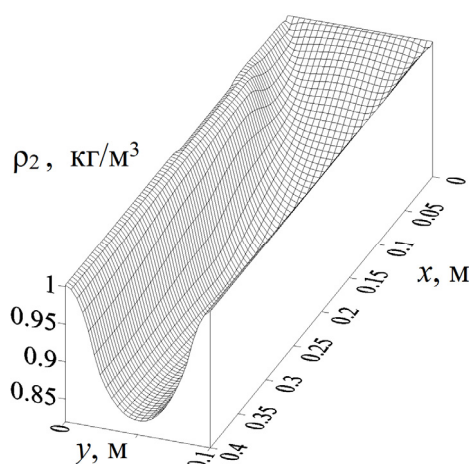


Рис. 3. Средняя плотность пылевой фракции в расчетах с учетом коагуляции, момент времени $t=0,037$ с

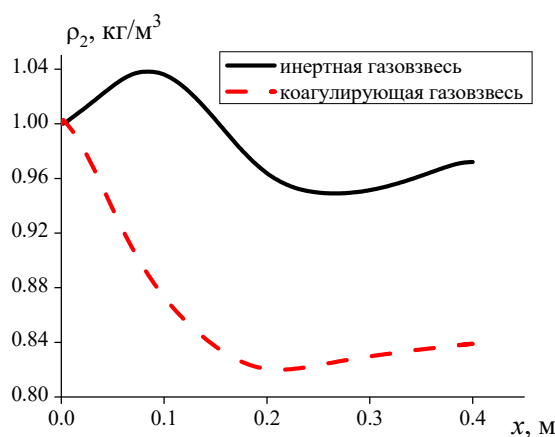


Рис. 4. Распределение средней плотности пылевой фракции вдоль координаты x – с учетом коагуляции и без таковой, момент времени $t=0,037$ с

На рис. 4 предоставлено распределение пылевой фракции с учетом и без учета коагуляции с капельной фракцией, в случае отсутствия коагуляции за счет вдува капельного потока распределение пылевой фракции в канале неравномерное. При учете коагуляции средняя плотность пылевой фракции убывает вдоль по каналу.

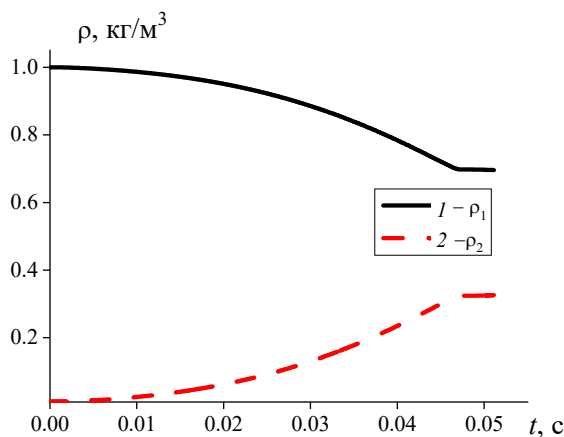


Рис. 5. Временная зависимость для коагулирующей газовзвеси: кривая 1 – пылевая фракция; кривая 2 – капельная фракция

На рис. 5 представлена временная зависимость средних плотностей в точке ($x=L/2$, $y=h/2$) капельной и пылевой фракций. В процессе течения коагулирующей двухфракционной газозвеси происходит рост средней плотности поглощающей фракции и уменьшение средней плотности поглощаемой фракции.

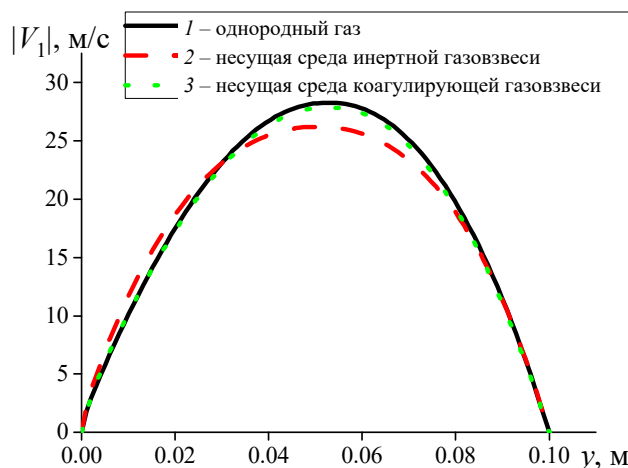


Рис. 6. Пространственное распределение модуля скорости газа: кривая 1 – однородный газ, кривая 2 – несущая среда инертной газозвеси, кривая 3 – несущая среда коагулирующей газозвеси, момент времени $t=0,037$ с

За счет межфазного обмена импульсом модуль скорости несущей среды газозвеси имеет меньшее значение, чем модуль скорости течения однородного газа (рис. 6). При учете коагуляции фракций газозвеси максимальное значение модуля скорости несущей среды – $|V_{1c}|=27,8$ м/с имеет меньшее значение, чем максимальное значение модуля скорости движения однородного газа – $|V|=28,4$ м/с, но большее значение, чем максимальное значение модуля скорости несущей среды в газозвеси без учета процесса коагуляции – $|V_{11}|=26,2$ м/с. Отношение максимального значения модуля скорости несущей среды газозвеси к максимальному значению модуля скорости в однородном газе – $|V|$, в газозвеси с коагуляцией дисперсных включений – $|V_{1c}|$ и в инертной газозвеси – $|V_{11}|$ составляют $|V_{1c}|/|V|=0,9788$ и $|V_{11}|/|V|=0,9225$ соответственно. Большее значение скорости несущей среды коагулирующей газозвеси в сравнении со скоростью движения несущей среды в инертной газозвеси можно объяснить тем, что в коагулирующей газозвеси дисперсная фаза менее существенно воздействует на динамику несущей среды.

При фиксированном объемном содержании одной из фракций частиц дисперсной фазы кратное уменьшение размера частиц фракции приводит к увеличению количества частиц в кубической пропорции и уменьшению площади одной частицы в квадратичной пропорции, таким образом, суммарная площадь частиц фракции при кратном уменьшении их размера кратно возрастает. В двухфракционной газозвеси площадь контакта с несущей средой больше у мелкодисперсной фракции дисперсной фазы, за счет коагуляции объемное содержание мелкодисперсной фракции уменьшается. В случае учета коагуляции уменьшается площадь взаимодействия несущей и дисперсной фазы, соответственно уменьшаются потери кинетической энергии несущей среды.

Величина максимального значения модуля скорости в пылевой фракции составляет $|V_{2l}|=25,8$ м/с в случае отсутствия учета коагуляции и $|V_{2c}|=27,5$ м/с в случае, если учитывается коагуляция (рис. 7). Скорость мелкодисперсной пылевой фракции согласуется со скоростью несущей среды, для инертной и коагулирующей газозвесей отношения макси-

мальных значений модуля скорости пылевой фракции и несущей среды составляют соответственно $|V_{2l}|/|V_{1l}| \approx 0,984$ и $|V_{2c}|/|V_{1c}| \approx 0,989$. При учете коагуляции дисперсных включений скорость пылевой фракции составляет $|V_{2c}|/|V_{2l}| = 1,066$ от скорости пылевой фракции в газозвеси без учета коагуляции дисперсных включений. Так как фракция мелкодисперсных частиц в большей степени влияет на динамику несущей среды, то уменьшение объемного содержания мелкодисперсной фракции снижает потери кинетической энергии несущей среды, и скорость движения несущей среды увеличивается. При этом скорость мелкодисперсных частиц согласуется со скоростью несущей среды, таким образом, скорость мелкодисперсных частиц за счет влияния процесса коагуляции имеет большую величину.

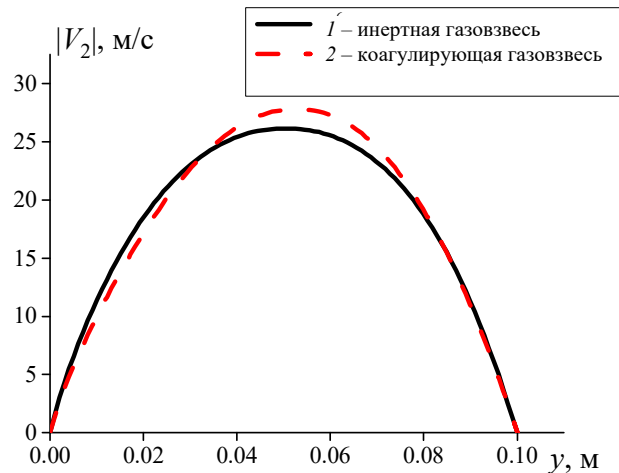


Рис. 7. Пространственное распределение модуля скорости пылевой фракции: кривая 1 – несущая среда инертной газозвеси, кривая 2 – несущая среда коагулирующей газозвеси, момент времени $t=0,037$ с

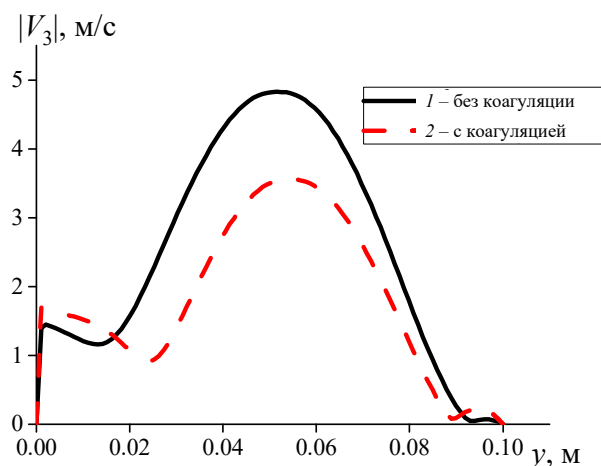


Рис. 8. Пространственное распределение модуля скорости капельной фракции: кривая 1 – несущая среда инертной газозвеси, кривая 2 – несущая среда коагулирующей газозвеси, момент времени $t=0,037$ с

Значение модуля скорости капельной фракции составляет – $|V_3|=4,8$ м/с в случае отсутствия учета коагуляции и $|V_3|=3,5$ м/с в случае, если учитывается коагуляция (рис. 8). При учете коагуляции дисперсных включений скорость капельной фракции составляет $|V_{3c}|/|V_{3l}|=0,729$ от скорости пылевой фракции в газозвеси без учета коагуляции дисперсных включений. Меньшее значение модуля скорости капельной фракции коагулирующей

газовзвеси в сравнении с модулем скорости капельной фракции инертной газовзвеси может быть объяснено тем, что масса капельной фракции увеличивается, что приводит к уменьшению скорости крупнодисперсной капельной фракции.

Заключение

В работе численно моделировалась динамика двухфракционной газовзвеси в канале с боковым вдувом капельной фракции. Математическая модель учитывала межфазное взаимодействие в двухфазной среде. Сопоставлялись результаты расчетов с учетом и без учета коагуляции дисперсных включений, были выявлены закономерности влияния коагуляции на динамику несущей среды и фракций дисперсной фазы. Процесс коагуляции частиц мелкодисперсной пылевой фракции и фракции крупных капель приводит к уменьшению объемного содержания мелкодисперсных частиц. Так как площадь контакта газа и фракции мелкодисперсных частиц существенно больше, чем у крупнодисперсной фракции, то процесс коагуляции уменьшает площадь контакта несущей среды и дисперсной фазы, тем самым снижается интенсивность межфазного взаимодействия и уменьшается воздействие дисперсной фазы на динамику несущей среды. Таким образом, скорость несущей среды в коагулирующей газовзвеси становится больше относительно скорости несущей среды в инертной газовзвеси. Так как скоростные параметры мелкодисперсной фракции согласуются со скоростными параметрами несущей среды, то при учете коагуляции увеличивается значение скорости мелкодисперсной фракции.

За счет поглощения мелкодисперсных частиц возрастает масса крупнодисперсной фракции, вследствие чего происходит уменьшение скорости движения поглощающей капельной фракции дисперсной фазы. Выявленные закономерности могут быть применены при расчетах аппаратов жидкостной фильтрации запыленных сред.

Список литературы

1. Провоторов, В.В. Управление линеаризованной системой Навье – Стокса в сетеподобной области / В.В. Провоторов, Е.Н. Провоторова // Прикладная математика и вопросы управления. – 2017. – № 2. – С. 65–84.
2. Численный анализ работы струйного насоса с изменяемой геометрией проточного тракта / М.А. Савин, М.А. Ошивалов, Е.И. Вахрамеев, К.С. Галягин // Прикладная математика и вопросы управления. – 2023. – № 3. – С. 8–21.
3. Нигматулин, Р.И. Основы механики гетерогенных сред / Р.И. Нигматулин. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
4. Кутушев, А.Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах / А.Г. Кутушев. – СПб.: Недра, 2003. – 284 с.
5. Федоров, А.В. Волновые процессы в газовзвесах частиц металлов / А.В. Федоров, В.М. Фомин, Т.А. Хмель. – Новосибирск: Параллель, 2015. – 301 с.
6. Клиначева, Н.Л. Ослабление сферических ударных волн в гетерогенных средах / Н.Л. Клиначева, Ю.М. Ковалев // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2017. – Т. 10, № 4. – С. 35–45.
7. Шиляев, М.И. Динамика процесса тепломассообмена при инжектировании диспергированного адсорбента в парогазовый поток / М.И. Шиляев, Е.М. Хромова // Теоретические основы химической технологии. – 2021. – Т. 55, № 4. – С. 506–516.

8. Лаптева, Е.А. Математическая модель контактного охлаждения и очистки от дисперсной фазы газов в насадочных скрубберах / Е.А. Лаптева, А.Г. Лаптев, С.У. Аласгарли // Теоретические основы химической технологии. – 2022. – Т. 56, № 2. – С. 244–251.
9. A Highly Efficient Biomass Compound Aerosol Suppressant in Purifying Radioactive Cesium Droplet Aerosols / L. Wu, S. Lei, Y. Wang, S. Yang, X. Lin, H. Wang // *Molecules*. – 2022. – Vol. 27, no. 19.
10. Моделирование процесса мокрой очистки газов с наложением ультразвуковых полей / В.Н. Хмелев, А.В. Шалунов, Р.С. Доровских, В.А. Нестеров, Р.Н. Голых // Южно-Сибирский научный вестник. – 2017. – Т. 20, № 4. – С. 57–63.
11. Повышение эффективности пылеулавливания / В.Н. Макаров, А.В. Угольников, Н.В. Макаров, Г.А. Боярских // Горный журнал. – 2022. – № 8. – С. 62–70.
12. Тимофеева М.В. Влияние коагуляции капель воды на их распределение по размерам в рабочей части аэрохолодильной установки // Журнал технической физики. – 2019. – Т. 89, № 4. – С. 491–496.
13. Термодинамические и теплофизические свойства продуктов сгорания: справочник в 5 т. Т. 1. Методы расчета / В.Е. Алемасов, А.Ф. Дрегаллин, А.П. Тишин, В.А. Худяков. – М.: Изд-во ВИНТИ, 1971. – 267 с.
14. Тукмаков, А.Л. Динамика коагулирующей полидисперсной газозвеси в нелинейном волновом поле акустического резонатора / А.Л. Тукмаков // Инженерно-физический журнал. – 2015. – Т. 88, № 1. – С. 11–19.
15. Тукмаков А.Л. Программный код для моделирования динамики однородных и дисперсных сред явным методом Мак-Кормака в обобщенных криволинейных координатах (2D): свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018616542; заявл. 02.08.2018; опубли. 19.06.2018.
16. Тукмаков, А.Л. Динамика заряженной газозвеси с начальным пространственно неравномерным распределением средней плотности дисперсной фазы при переходе к равновесному состоянию / А.Л. Тукмаков, Д.А. Тукмаков // Теплофизика высоких температур. – 2017. – Т. 55, № 4. – С. 509–512.
17. Тукмаков, Д.А. Численное исследование влияния граничных условий на расчеты динамики полидисперсной газозвеси / Д.А. Тукмаков // Прикладная математика и механика. – 2024. – Т. 88, № 3. – С. 422–433.
18. Тукмаков, Д.А. Сопоставление численных расчетов континуальной математической модели динамики монодисперсного аэрозоля в акустическом резонаторе – закрытой трубе с физическим экспериментом / Д.А. Тукмаков // Вестник Омского университета. – 2022. – Т. 27, № 2. – С. 40–46.
19. Tukmakov, D.A. Investigation of the grid convergence of a finite-difference model of the dynamics of an electrically charged gas suspension / D.A. Tukmakov // Proceedings of 2024 6th International Youth Conference on Radio Electronics, Electrical and Power Engineering (REEPE). – Moscow, 2024. – P. 1–6. DOI: 10.1109/REEPE60449.2024.10479689
20. Тукмаков, Д.А. Численное моделирование взаимодействия газозвеси с ударной волной континуальными математическими моделями с идеальной и диссипативными несутущими средами / Д.А. Тукмаков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. – 2022. – Т. 11, № 4. – С. 67–87.
21. Флетчер, К. Вычислительные методы в динамике жидкостей / К. Флетчер. – М.: Мир, 1991. – Т. 2. – 551 с.

22. Музафаров, И.Ф. Применение компактных разностных схем к исследованию нестационарных течений сжимаемого газа / И.Ф. Музафаров, С.В. Утюжников // Математическое моделирование. – 1993. – Т. 5, № 3. – С. 74–83.

References

1. Provotorov V.V., Provotorova E.N. Control of a linearized Navier-Stokes system in a net-like domain. *Applied Mathematics and Control Sciences*. 2017, no. 2, pp. 65-84.
2. Savin M.A., Oshivalov M.A., Vakhrameev E.I., Galyagin K.S. Numerical analysis of a jet pump operation with a variable flow path. *Applied Mathematics and Control Sciences*. 2023, no. 3, pp. 8-21.
3. Nigmatulin R.I. Fundamentals of mechanics of heterogeneous media. Moscow, Nauka, 1978, 336 p.
4. Kutushev A.G. Mathematical modeling of wave processes in aerodispersed and powdery media. Saint Petersburg, Nedra, 2003, 284 p.
5. Fedorov A.V., Fomin V.M., Khmel' T.A. Wave processes in gas suspensions of metal particles. Novosibirsk, Parallel', 2015, 301 p.
6. Klinacheva N.L., Kovalev Iu.M. Attenuation of spherical shock waves in heterogeneous media. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*. 2017, vol. 10, no. 4, pp. 35-45.
7. Shiliaev M.I., Khromova E.M. Dynamics of the heat and mass transfer process during the injection of a dispersed adsorbent into a vapor-gas flow. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 2021, vol. 55, no. 4, pp. 506-516.
8. Lapteva E.A., Laptev A.G., Alasgarly S.U. Mathematical model of contact cooling and purification of gases from the dispersed phase in packed scrubbers. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 2022, vol. 56, no. 2, pp. 244-251.
9. Wu L., Lei S., Wang Y., Yang S., Lin X., Wang H. A Highly Efficient Biomass Compound Aerosol Suppressant in Purifying Radioactive Cesium Droplet Aerosols. *Molecules*. 2022, vol. 27, no. 19, Art. 6520. DOI 10.3390/molecules27196520
10. Khmelev V.N., Shalunov A.V., Dorovskikh R.S., Nesterov V.A., Golykh R.N. Modeling of the process of wet gas cleaning with the imposition of ultrasonic fields. *South-Siberian Scientific Bulletin*. 2017, vol. 20, no. 4, pp. 57-63.
11. Makarov V.N., Ugol'nikov A.V., Makarov N.V., Boiarskikh G.A. Improving the efficiency of dust collection. *Mining Journal*. 2022, no. 8, pp. 62-70.
12. Timofeeva M.V. Influence of water droplet coagulation on their size distribution in the working part of an air cooling unit. *Technical Physics*. 2019, vol. 89, no. 4, pp. 491-496.
13. Alemasov V.E., Dregalin A.F., Tishin A.P., Khudiakov V.A. Thermodynamic and thermophysical properties of combustion products: reference book in 5 volumes. Vol. 1 Calculation methods. Moscow, VINITI, 1971, 267 p.
14. Tukmakov A.L. Dynamics of a coagulating polydisperse gas suspension in the nonlinear wave field of an acoustic resonator. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2015, vol. 88, no. 1, pp. 11-19.
15. Tukmakov A.L. Programmnyi kod dlia modelirovaniia dinamiki odnorodnykh i dispersnykh sred iavnym metodom Mak-Kormaka v obobshchennykh krivolinenykh koordinatakh (2D) [Software code for modeling the dynamics of homogeneous and dispersed media by the explicit

McCormack method in generalized curvilinear coordinates (2D)]. Computer program certificate RU 2018616542 from 19 June 2018.

16. Tukmakov A.L., Tukmakov D.A. Dynamics of a charged gas suspension with an initial spatially non-uniform distribution of the average density of the dispersed phase during the transition to an equilibrium state. *High Temperature*. 2017, vol. 55, no. 4, pp. 509-512.

17. Tukmakov D.A. Numerical study of the influence of boundary conditions on calculations of the dynamics of a polydisperse gas suspension. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2024, vol. 88, no. 3, pp. 422-433.

18. Tukmakov D.A. Comparison of numerical calculations of a continuum mathematical model of the dynamics of a monodisperse aerosol in an acoustic resonator - a closed pipe with a physical experiment. *Herald of Omsk University*. 2022, vol. 27, no. 2, pp. 40-46.

19. Tukmakov D.A. Investigation of the grid convergence of a finite-difference model of the dynamics of an electrically charged gas suspension. *2024 6th International Conference on Radio Electronics, Electrical and Power Engineering (REEPE): proceedings*, Moscow, Russia, 2024. – 6 p. – art. 10479689. – DOI 10.1109/REEPE60449.2024.10479689.

20. Tukmakov D.A. Numerical simulation of the interaction of a gas suspension with a shock wave by continuum mathematical models with ideal and dissipative carrier media. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering*. 2022, vol. 11, no. 4, pp. 67-87.

21. Fletcher K. Computational methods in fluid dynamics. Vol. 2. Moscow, Mir, 1991, 551 p.

22. Muzafarov I.F., Utiuzhnikov S.V. Application of compact difference schemes to the study of unsteady compressible gas flows. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 1993, vol. 5, no. 3, pp. 74-83.