

Голованов, О. А. Динамическая реализация модифицированного градиентного спуска по узловым прямым: краткий обзор / О. А. Голованов // Прикладная математика и вопросы управления. – 2025. – № 2. – С. 38–51. DOI 10.15593/2499-9873/2025.2.03

Библиографическое описание согласно ГОСТ Р 7.0.100–2018

Голованов, О. А. Динамическая реализация модифицированного градиентного спуска по узловым прямым: краткий обзор / О. А. Голованов. – Текст : непосредственный. – DOI 10.15593/2499-9873/2025.2.03 // Прикладная математика и вопросы управления / Applied Mathematics and Control Sciences. – 2025. – № 2. – С. 38–51.



ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
И ВОПРОСЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 2, 2025

<https://ered.pstu.ru/index.php/amcs>



Научный обзор

DOI: 10.15593/2499-9873/2025.1.03

УДК 519.237.5: 004.021



Динамическая реализация модифицированного градиентного спуска по узловым прямым: краткий обзор

О.А. Голованов

Институт экономики Уральского отделения Российской академии наук,
Екатеринбург, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 05 июня 2025
Одобрена: 07 июля 2025
Принята к публикации:
08 августа 2025

Финансирование

Работа выполнена
в соответствии с планом
научно-исследовательских работ
Института экономики
Уральского отделения РАН.

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии
конфликта интересов.

Вклад автора

100 %.

Ключевые слова:

линейная регрессия,
динамический мониторинг,
спуск по узловым прямым, метод
наименьших модулей,
вычислительная эффективность

АННОТАЦИЯ

Динамический мониторинг быстропеременных процессов требует высокоскоростных и устойчивых методов оценивания параметров систем в режиме реального времени, обеспечивающих своевременное выявление критических отклонений. Линейный регрессионный анализ остается ключевым инструментом для решения таких задач, однако классический метод наименьших квадратов демонстрирует снижение точности при нарушении условий нормальности ошибок и наличии выбросов в данных, что ограничивает его применимость в условиях стохастической неоднородности данных. Альтернативный метод наименьших модулей обеспечивает повышенную устойчивость оценок к аномалиям и распределениям с тяжелыми хвостами. Однако его традиционная реализация сопряжена с низким быстродействием, что затрудняет его использование в задачах анализа потоковых данных.

Целью статьи является представление усовершенствованных алгоритмов координатного спуска по узловым прямым для решения задачи метода наименьших модулей. Ключевые оптимизации включают использование производных по направлению узловых прямых, анализ угла их наклона и применение стратегии первого приближения. Это позволило существенно снизить вычислительную сложность алгоритма по сравнению с базовой реализацией. Для задач мониторинга в реальном времени предложена динамическая версия алгоритма, основанная на скользящем окне наблюдений и использовании решения предыдущего шага в качестве начального приближения.

Результаты исследований демонстрируют значительное повышение вычислительной эффективности спуска по узловым прямым при сохранении точности оценок. Сложность алгоритма снижена до уровня, приемлемого для обработки данных высокой размерности в режиме реального времени. Сравнительный анализ подтверждает преимущества предложенного подхода перед известными методами оптимизации (симплекс-метод, метод внутренней точки, метод проектирования градиента) как по скорости работы, так и по асимптотической сложности. Динамическая реализация алгоритма приближает время анализа к методу наименьших квадратов, устраняя историческое отставание метода наименьших модулей по вычислительным затратам.

© Голованов Олег Александрович – младший научный сотрудник Центра экономической безопасности, e-mail: golovanov.oa@uiec.ru, ORCID 0000-0002-9977-6954



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

Perm Polytech Style: Golovanov O.A. Dynamic Implementation of Modified Gradient Descent Along Nodal Lines: A Brief Overview. *Applied Mathematics and Control Sciences*. 2025, no. 2, pp. 38–51. DOI: 10.15593/2499-9873/2025.2.03

MDPI and ACS Style: Golovanov, O.A. Dynamic Implementation of Modified Gradient Descent Along Nodal Lines: A Brief Overview. *Appl. Math. Control Sci.* **2025**, *2*, 38–51. <https://doi.org/10.15593/2499-9873/2025.2.03>

Chicago/Turabian Style: Golovanov, Oleg A. 2025. “Dynamic Implementation of Modified Gradient Descent Along Nodal Lines: A Brief Overview”. *Appl. Math. Control Sci.* no. 2: 38–51. <https://doi.org/10.15593/2499-9873/2025.2.03>



APPLIED MATHEMATICS
AND CONTROL SCIENCES

№ 2, 2025

<https://ered.pstu.ru/index.php/amcs>



Article / Review

DOI: 10.15593/2499-9873/2025.2.03

UDC 519.237.5: 004.021



Dynamic Implementation of Modified Gradient Descent Along Nodal Lines: A Brief Overview

O.A. Golovanov

Institute of Economics, Ural Branch, Russian Academy of Science, Yekaterinburg, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 05 June 2025

Approved: 07 July 2025

Accepted for publication:
08 August 2025

Funding

This research was funded in accordance with the research program of the Institute of Economics of the Urals Branch of the Russian Academy of Sciences.

Conflicts of Interest

The authors declare no conflict of interest.

Author Contributions

100 %.

Keywords:

linear regression, dynamic monitoring, descent along nodal lines, least absolute deviations method, computational efficiency

ABSTRACT

Dynamic monitoring of rapidly varying processes requires high-speed and robust methods for estimating system parameters in real-time, ensuring timely detection of critical deviations. Linear regression analysis remains a key tool for solving such problems; however, the classical least squares method exhibits a reduction in accuracy when the conditions of error normality are violated and in the presence of outliers in the data, which limits its applicability under conditions of stochastic data heterogeneity. The alternative least absolute deviations method provides increased robustness of estimates to anomalies and heavy-tailed distributions. However, its traditional implementation is associated with low computational speed, which hinders its use in streaming data analysis tasks.

The aim of the article is to present improved algorithms of coordinate descent along nodal lines for solving the least absolute deviations problem. Key optimizations include the use of directional derivatives along nodal lines, analysis of their slope angle, and application of a first approximation strategy. This allowed for a significant reduction in the computational complexity of the algorithm compared to the base implementation. For real-time monitoring tasks, a dynamic version of the algorithm is proposed, based on a sliding observation window and using the solution from the previous step as the initial approximation.

Research results demonstrate a significant increase in the computational efficiency of descent along nodal lines while maintaining estimation accuracy. The algorithm's complexity has been reduced to a level acceptable for processing high-dimensional data in real-time. Comparative analysis confirms the advantages of the proposed approach over known optimization methods (simplex method, interior point method, gradient projection method) both in terms of operating speed and asymptotic complexity. The dynamic implementation of the algorithm brings the analysis time closer to that of the least squares method, eliminating the historical lag of the least absolute deviations method in computational costs.



Введение

Динамический мониторинг быстропеременных процессов представляет собой систематическое непрерывное наблюдение, анализ и оценку ключевых характеристик системы, ее структуры и взаимодействия с внешней средой [1; 2]. Его цель – обнаружение критических отклонений, свидетельствующих о возникновении дефектов, а также выявление закономерностей, тенденций и отклонений от целевых параметров [3; 4]. Это позволяет своевременно принимать обоснованные решения для управления, корректировки или оптимизации системы.

В основе такого мониторинга лежит диагностическая модель, связывающая измеряемые параметры с внутренними характеристиками системы, определяющими ее текущее состояние [5; 6]. Для оперативного выявления неисправностей необходим непрерывный мониторинг состояния системы в режиме реального времени [7], особенно для динамических объектов с повышенными требованиями к быстродействию. Задержки в обработке данных в подобных системах могут привести к несвоевременному обнаружению критических отклонений, повышая риск возникновения неисправностей.

Линейный регрессионный анализ занимает центральное место в арсенале методов анализа данных, применяемых для мониторинга состояния систем, процессов и явлений [8; 9]. Его основной целью является построение математической зависимости, выявляющей закономерности между изучаемыми явлениями и отражающей состояние зависимой переменной Y относительно одной или нескольких объясняющих переменных $X_1, \dots, X_m$. Однако из-за влияния неучтенных факторов, несовершенства измерений или внешних возмущений наблюдения Y неизбежно отклоняются от строгой линейной зависимости. В результате связь между Y и $X_1, \dots, X_m$ приобретает стохастический, а не функциональный характер [10], что выражается уравнением в матричной форме:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1)$$

$$\text{где } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ 1 & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{x}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{y}$ – вектор значений зависимой (эндогенной) переменной Y ; $\mathbf{X} = \{x_{ij}\}_{n \times m}$ – матрица значений объясняющих (экзогенных) переменных $X_1, \dots, X_m$, $\mathbf{x}_i^T = (1, x_{i2}, \dots, x_{im})$; $\mathbf{a}$ – вектор неизвестных коэффициентов регрессии, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – вектор ненаблюдаемых случайных отклонений (ошибок).

Классическим методом оценивания параметров линейных регрессионных моделей, основанным на принципе максимального правдоподобия, является метод наименьших квадратов (МНК) [11]. Он предполагает минимизацию суммы квадратов остатков. Популярность МНК обусловлена его вычислительной простотой и теоретической оптимальностью оценок при нормальном распределении ошибок [12], обеспечивая получение наилучших линейных несмещенных оценок при выполнении условий Гаусса – Маркова [13]:

1. На вектор $\mathbf{a}$ не наложено ограничений, т.е. $\mathbf{A} = \mathbb{R}^m$, где $\mathbf{A}$ – множество априорных значений параметров $\mathbf{a}$.
2. Матрица $\mathbf{X}$ детерминирована, т.е. x_{ij} не являются случайными переменными.
3. $\text{rank}(\mathbf{X}) = m < n$.

4. Вектор ε – случайный, т.е. y – также случайный вектор.
5. Математические ожидания $E(\varepsilon_i) = 0$, $i = 1, \dots, n$, $E(\varepsilon) = 0$.
6. $\forall i \neq k \text{ cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_k) = 0$, $\forall i \text{ } E(\varepsilon_i^2) = \sigma_\varepsilon^2$, $i, k = 1, \dots, n$, σ_ε^2 – дисперсия отклонений.
7. Распределение ошибок ε является гауссовым.

Однако современные исследования показывают, что реальные данные редко соответствуют предположению о нормальном (гауссовском) распределении ошибок [14]. Ярko выразил эту мысль Р. Гири (R. Geary), отметив: «Нормальность – это миф; ее никогда не существовало в прошлом и не появится в будущем» [15]. Значительное влияние на МНК-оценки оказывают также резко выделяющиеся значения (выбросы), неизбежно присутствующие в реальных данных [16]. В сочетании с ограниченной устойчивостью МНК к нарушениям условий Гаусса – Маркова, особенно в условиях стохастической неоднородности данных, эти факторы стимулировали поиск альтернативных, устойчивых (робастных) методов оценивания. Наиболее распространенным среди них является метод наименьших модулей (МНМ) [11], основанный на минимизации суммы абсолютных отклонений:

$$Q(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n \left| y_i - \sum_{j=1}^m a_j x_{ij} \right| \rightarrow \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m} \quad (2)$$

Целевая функция $Q(\mathbf{a})$ является выпуклой, непрерывной, кусочно-линейной и ограниченной снизу, что гарантирует существование единственного минимума для задачи (2). Однако практическое применение МНМ сопряжено с трудностями, вызванными недифференцируемостью целевой функции и высокой плотностью особых точек в пространстве решений. Традиционные реализации метода не обеспечивают необходимой скорости пересчета параметров в режиме реального времени, что критично для задач динамического мониторинга систем с высокой вариативностью. Кроме того, достижение компромисса между робастностью оценок и вычислительной эффективностью остается сложной проблемой: попытки упрощения алгоритмов часто приводят к снижению точности, тогда как строгие методы оптимизации требуют значительных вычислительных ресурсов.

К точным методам решения задачи (2) относятся полный перебор, симплекс-метод [17], метод проектирования градиента [18] и метод внутренней точки [19; 20]. Однако эти подходы основаны преимущественно на алгебраических преобразованиях и не используют явно геометрические особенности целевой функции. Эффективным способом решения задачи (2), учитывающим ее выпуклость, является спуск по узловым прямым [21]. Последнее модификации этого алгоритма, как статические [22], так и динамические, позволили добиться существенного ускорения вычислений, приблизив его по скорости к МНК, без потери точности получаемых оценок.

Цель статьи – представить краткий обзор последних усовершенствований алгоритма покоординатного спуска по узловым прямым (в статических и динамических реализациях), направленных на обеспечение высокоскоростного и устойчивого оценивания параметров линейных регрессионных моделей в задачах динамического мониторинга быстропеременных процессов.

Модели и методы исследования

Принцип работы алгоритма покоординатного спуска по узловым прямым может быть кратко описан следующим образом. Конечность выборки гарантирует конечность количества гиперплоскостей вида:

$$\Omega_i = \Omega(\mathbf{a}, \mathbf{x}_i, y_i) = y_i - \mathbf{a}, \mathbf{x}_i = 0, (i = 1, \dots, n),$$

образующих множество $\Omega: \{\Omega_1, \dots, \Omega_n\}$. Это обеспечивает сходимость алгоритма к решению задачи (2) за конечное число итераций [23]. Узловая точка определяется как пересечение m линейно независимых гиперплоскостей:

$$\mathbf{u} = \bigcap_{s \in M} \Omega_s, M = \{k_1, \dots, k_m\}, k_1 < k_2 < \dots < k_m, k_l \in \{1, \dots, n\}.$$

Множество всех таких точек обозначим U . Узловая прямая представляет собой пересечение $(m - 1)$ независимых гиперплоскостей:

$$l_{(k_1, \dots, k_{m-1})} : \bigcap \Omega_i, i \in \{k_1, \dots, k_{m-1}\}, k_l \in \{1, \dots, n\}.$$

Первый шаг алгоритма заключается в выборе начального приближения $\mathbf{u}^{(0)}$. Эта узловая точка находится путем решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), сформированной из произвольных m уравнений из выборки: $y_i - \mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{x}_i = 0, (i = 1, 2, \dots, m)$. Точка $\mathbf{u}^{(0)}$, соответствующая пересечению $\Omega_1, \dots, \Omega_m$, принимается за текущий минимум. Отметим, что для сокращения числа операций, необходимых для определения коэффициентов узловых точек, были использованы единичные разреженные матрицы [24]. Далее проверяются все прилежащие к ней узловые прямые и находится такая, в которой целевая функция (2) принимает свое наименьшее значение, и происходит переход. Алгоритм осуществляет спуск по узловым прямым до тех пор, пока не будет найдена узловая точка, дальнейший спуск из которой невозможен. Это означает, что на всех прилежащих узловых прямых $Q(\mathbf{a})$ возрастает и был достигнут глобальный минимум функции (2).

Ключевая оптимизация алгоритма связана с преодолением основного недостатка классического подхода – необходимостью вычисления значения целевой функции $Q(\mathbf{a})$ в каждой анализируемой точке. Вместо этого предлагается использовать производные по направлению узловых прямых. В каждой узловой точке $\mathbf{u}^{(*)} = (u_1^{(*)}, \dots, u_m^{(*)})$ производная по направлению прямой вычисляется как сумма m слагаемых [21]:

$$\frac{\partial Q(\mathbf{u}^{(*)})}{\partial \mathbf{l}_{(k_1, \dots, k_{m-1})}} = \sum_{i=1}^n (c_1 + x_{i2}c_2 + \dots + x_{im}c_m) \cdot \text{sign} \left(\sum_{j=1}^m u_j^{(*)} x_{ij} - y_i \right),$$

где $\mathbf{l}_{(k_1, \dots, k_{m-1})} = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ – направляющий вектор узловой прямой $l_{(k_1, \dots, k_{m-1})}$.

Критерием минимума $Q(\mathbf{a})$ на узловой прямой служит смена знака этой производной при переходе через узловую точку $\mathbf{u}^{(*)}$: $\text{sign} \left(\frac{\partial Q(\mathbf{u}^{(*)})}{\partial \mathbf{l}_{(k_1, \dots, k_{m-1})}} \bigg|_{\mathbf{u}_-^{(*)}} \right) \neq \text{sign} \left(\frac{\partial Q(\mathbf{u}^{(*)})}{\partial \mathbf{l}_{(k_1, \dots, k_{m-1})}} \bigg|_{\mathbf{u}_+^{(*)}} \right)$. Данный

подход позволяет ограничиться однократным вычислением значения целевой функции $Q(\mathbf{a})$ только после идентификации точки разрыва производной (минимума на прямой), что существенно снижает вычислительные затраты.

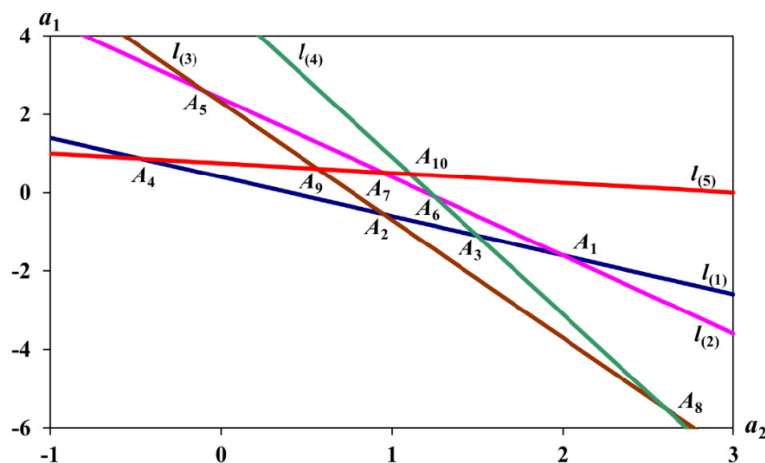
Пример 1. Рассмотрим задачу оценивания параметров парной линейной регрессии вида $y = a_1 + a_2x$ по данным, представленным в табл. 1. Оптимальным решением является узловая точка A_6 , образованная пересечением узловых прямых $l_{(1)}$ и $l_{(4)}$. Значение целевой функции в этой точке составляет $Q(\mathbf{a}^*) = 2,6375$, а оптимальные параметры модели равны $a_1^* = -0,1$, $a_2^* = 1,25$.

Таблица 1

Исходные данные для примера 1

№	X_1	X_2	Y
1	1	1	0,4
2	1	2	2,4
3	1	3	2,3
4	1	4	4,9
5	1	0,25	0,75

На рис. 1 представлены узловые прямые и соответствующие им точки в пространстве параметров (a_1, a_2) .

Рис. 1. Узловые прямые и точки функции $Q(\mathbf{a})$

Узловые прямые задаются уравнениями: $l_{(1)} : a_1 + a_2 = 0,4$; $l_{(2)} : a_1 + 2a_2 = 2,4$; $l_{(3)} : a_1 + 3a_2 = 2,3$; $l_{(4)} : a_1 + 4a_2 = 4,9$; $l_{(5)} : a_1 + 0,25a_2 = 0,75$. Их попарные пересечения образуют узловые точки, координаты которых представлены в табл. 2.

Таблица 2

Координаты узловых точек для примера 1

Уз. точка	Прямые	Координаты	Уз. точка	Прямые	Координаты
A_1	$l_{(1)} \cap l_{(2)}$	$(-1,6;2)$	A_6	$l_{(2)} \cap l_{(4)}$	$(-0,1;1,25)$
A_2	$l_{(1)} \cap l_{(3)}$	$(-0,55;0,95)$	A_7	$l_{(2)} \cap l_{(5)}$	$(0,51;0,94)$
A_3	$l_{(1)} \cap l_{(4)}$	$(-1,1;1,5)$	A_8	$l_{(3)} \cap l_{(4)}$	$(-5,5;2,6)$
A_4	$l_{(1)} \cap l_{(5)}$	$(0,87;-0,47)$	A_9	$l_{(3)} \cap l_{(5)}$	$(0,61;0,56)$
A_5	$l_{(2)} \cap l_{(3)}$	$(2,6;-0,1)$	A_{10}	$l_{(4)} \cap l_{(5)}$	$(0,47;1,11)$

Выполним спуск из узловой точки A_4 вдоль прямой $l_{(1)}$. Для этого упорядочим точки в направлении возрастания коэффициента a_2 : A_4, A_2, A_3, A_1 . Направляющий вектор прямой $l_{(1)}$ имеет вид:

$$\mathbf{l}_{(1)} = \frac{\overline{A_4 A_2}}{|\overline{A_4 A_2}|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Пусть A_{pq} – середина отрезка между точками A_p и A_q . Вычислим производные по направлению узловой прямой $l_{(1)}$, в окрестности узловой точки A_3 :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{l}_{(1)}} \right|_{A_{23}} &= \sum_{i=1}^5 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} x_i \right) \text{sign} \left(A_{23}^{(1)} + A_{23}^{(2)} x_i - y_i \right) = \\ &= \sum_{i=2}^5 \left(-\frac{1+x_i}{\sqrt{2}} \right) \text{sign} \left(-0,825 + 1,225 \cdot x_i - y_i \right) = \\ &= -\frac{3}{\sqrt{2}} (-0,825 + 1,225 \cdot 2 - 2,4) - \frac{4}{\sqrt{2}} (-0,825 + 1,225 \cdot 3 - 2,3) - \\ &- \frac{5}{\sqrt{2}} (-0,825 + 1,225 \cdot 4 - 4,9) - \frac{1,25}{\sqrt{2}} (-0,825 + 1,225 \cdot 0,25 - 0,75) = \\ &= -\frac{3}{\sqrt{2}} (-1) - \frac{4}{\sqrt{2}} (1) - \frac{5}{\sqrt{2}} (-1) - \frac{1,25}{\sqrt{2}} (-1) = \frac{5,25}{\sqrt{2}} = \frac{21\sqrt{2}}{8} > 0. \end{aligned}$$

По аналогичному принципу для точки A_{31} получим:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{l}_{(1)}} \right|_{A_{31}} &= \sum_{i=2}^5 \left(-\frac{1+x_i}{\sqrt{2}} \right) \text{sign} \left(-1,35 + 1,75 \cdot x_i - y_i \right) = \\ &= -\frac{3}{\sqrt{2}} (-1) - \frac{4}{\sqrt{2}} (1) - \frac{5}{\sqrt{2}} (1) - \frac{1,25}{\sqrt{2}} (-1) = -\frac{4,75}{\sqrt{2}} = -\frac{19\sqrt{2}}{8} < 0; \end{aligned}$$

Таким образом, минимум целевой функции (2) вдоль прямой $l_{(1)}$ достигается в точке A_3 .

Оптимизация алгоритма градиентного спуска по узловым прямым может быть достигнута за счет учета сгущения узловых точек вблизи глобального минимума (2) за счет использования первого приближения, а также угла наклона узловых прямых [22]. Проиллюстрируем это на примере спуска из узловой точки A_4 , где значение целевой функции составляет $Q(\mathbf{a}^*) = 11,2$.

Правосторонняя производная по направлению узловой прямой $\vec{l}_{(1)}$ в точке A_4 равна:

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial \vec{l}_{(1)}} \right|_{A_4^+} = -3,7123. \text{ Эта величина численно соответствует тангенсу угла наклона } \varphi \text{ функции}$$

$Q(\mathbf{a})$ на отрезке $A_4 A_2$ относительно узловой прямой $l_{(1)}$. Следовательно, разность значений целевой функции между точками A_4 и A_2 выражается как произведение евклидова расстояния между точками на этот тангенс угла наклона:

$$\begin{aligned}\Delta Q(A_{4,2}) &= Q(A_4) - Q(A_2) = |A_4 A_2| \cdot \tan \widehat{Q(A_{4,2})}, \vec{l}_{(1)} = \\ &= 2,0035 \cdot 3,7123 = 7,4375.\end{aligned}$$

Аналогично вычисляем приращения для других отрезков на прямой $l_{(1)}$:

$$\Delta Q(A_{2,3}) = |A_2 A_3| \cdot \tan \widehat{Q(A_{2,3})}, \vec{l}_{(1)} = 0,7778 \cdot 0,8839 = 0,6875,$$

$$\Delta Q(A_{3,1}) = |A_3 A_1| \cdot \tan \widehat{Q(A_{3,1})}, \vec{l}_{(1)} = 0,7071 \cdot (-3,3588) = -2,3750.$$

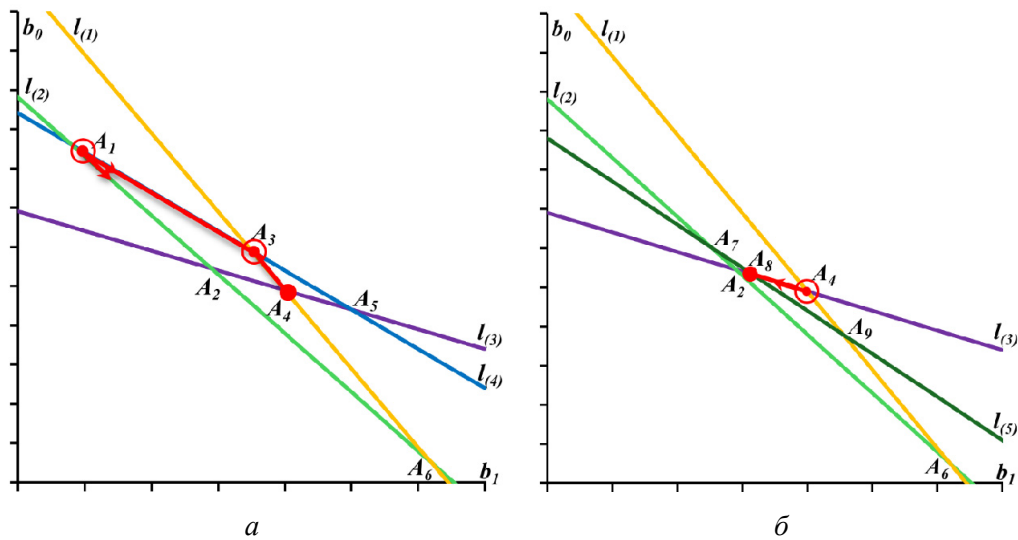
Анализ результатов показывает, что минимум $Q(\mathbf{a})$ на прямой $l_{(1)}$ достигается в точке A_3 . Суммарное уменьшение целевой функции вдоль исследуемого участка прямой составило: $\Delta(l_{(1)}) = 7,4375 + 0,6875 = 8,125$.

Сравнение направлений демонстрирует преимущество альтернативной узловой прямой $l_{(5)}$. На ней минимум $Q(\mathbf{a})$ достигается в точке A_7 при суммарном уменьшении: $\Delta(l_{(5)}) = 7,7273 + 0,7584 = 8,486 > \Delta(l_{(1)})$. Так как $8,486 > 8,125$, наибольшее локальное уменьшение целевой функции обеспечивает спуск по направлению $l_{(5)}$. Новое минимальное значение функции составляет $Q(\mathbf{a}^*) = 2,714$. Дальнейшая оптимизация продолжится вдоль прямой $l_{(2)}$.

Переход к динамической реализации модифицированного градиентного спуска обеспечивает обработку непрерывно поступающих данных. Такой переход требует адаптации алгоритма для работы с изменяющимся объемом информации при сохранении устойчивости оценок. Предположим, что для стартовой выборки $G^* : (\mathbf{X}, \mathbf{y}) = (x_{i1}, \dots, x_{im}, y_i)$ при $i = 1, 2, \dots, m+1$ найдено оптимальное решение $\mathbf{u}^{(*)}$, соответствующее пересечению m гиперплоскостей Ω^* , сформированных подмножеством наблюдений Z^* .

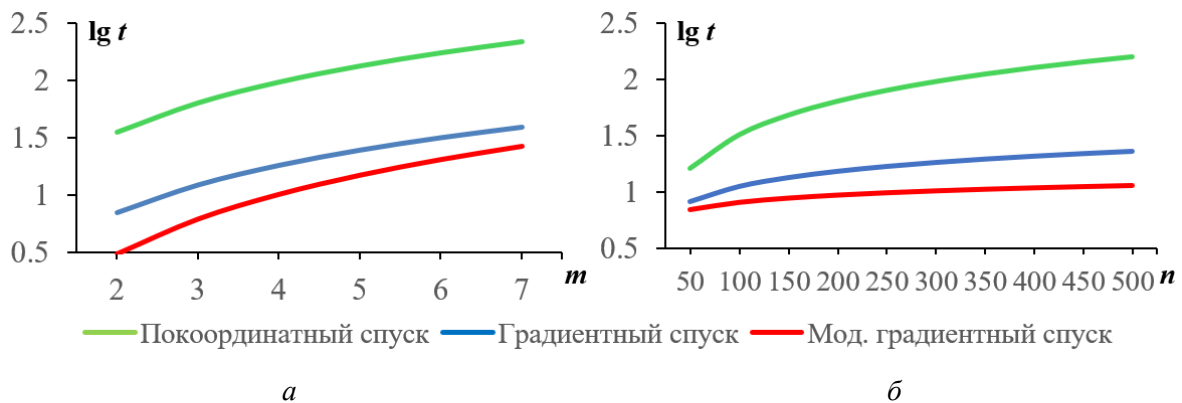
При динамическом добавлении новых наблюдений текущее решение $\mathbf{u}^*$ используется как начальное приближение на следующей итерации. Этот подход обеспечивает оперативное обновление оценок параметров регрессии с минимальной задержкой. Однако непрерывное расширение выборки увеличивает вычислительную сложность, нарушая устойчивость алгоритма. Для устранения этой проблемы предлагается фиксировать размер скользящего окна на уровне n : при достижении объема данных $n+1$ самое старое наблюдение $(\mathbf{X}_1, y_1)$ исключается, что сохраняет репрезентативность данных и вычислительную стабильность.

Ключевой особенностью динамической реализации является эффективное использование решения с предыдущего шага. Исследования показали, что сохранение полного вектора $\mathbf{u}^*$ предыдущей итерации является оптимальной стратегией [24]. На первом шаге (рис. 2, а) выполняется полный спуск до глобального минимума классическим алгоритмом. При последующих обновлениях данных (замене старого наблюдения новым) спуск инициируется из минимума, найденного на предыдущем шаге (рис. 2, б). Поскольку новый глобальный минимум обычно локализован в окрестности предыдущего, это позволяет существенно сократить количество переходов между узловыми прямыми и проверяемыми узловыми точками, повышая вычислительную эффективность в режиме реального времени.


 Рис. 2. Первый (а) и второй (б) шаги динамического алгоритма спуска при $m = 2$ и $n = 4$

Полученные результаты

В результате внедрения предложенных усовершенствований в алгоритмы спуска по узловым прямым достигнуто значительное повышение вычислительной эффективности при сохранении точности оценок. Оптимизация покоординатного спуска, изначально обладавшего вычислительной сложностью $O(m^3n^2)$, за счет использования производных по направлению узловых прямых позволила сократить количество операций в m раз и привела к снижению сложности до $O(m^2n^2)$. Дальнейшая модификация алгоритма, включающая анализ первого приближения основанного на предварительной обработке части выборки, а также учет угла наклона узловых прямых дополнительно снизили сложность до $O(m^{1,8}n^{1,5})$ [22]. Для визуализации полученных результатов на рис. 3 представлены десятичные логарифмы отношений времени вычислений алгоритмов спуска к МНК, принятому за эталонный.


 Рис. 3. Зависимость десятичного логарифма среднего времени обработки 1000 экспериментов (с) алгоритмами спуска к МНК при $n = 300$ (а) и $m = 4$ (б)

Сравнительный анализ с известными методами оптимизации подтвердил преимущества предложенных алгоритмов. Решение прямой и двойственной задачи линейного программирования (ЗЛП) при помощи симплекс-метода, методы внутренней точки и проектирования градиента демонстрируют асимптотическую сложность $O(n^3)$ и выше, что делает

их малоприспособленными для задач с высокой размерностью [22; 25]. Графики десятичных логарифмов отношения времени выполнения к МНК (рис. 4) показали, что рост вычислительной трудоемкости этих подходов с ростом n значительно опережает таковой для модифицированного градиентного спуска. Метод проектирования градиента, хотя и превосходит симплекс-метод и метод внутренней точки, страдает от ограниченной точности, что в ряде случаев приводит к грубым ошибкам.

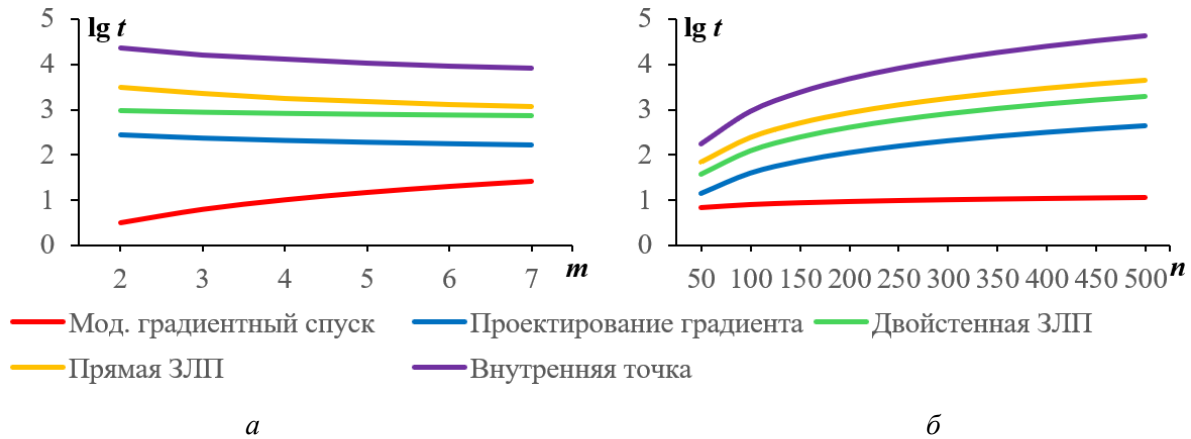


Рис. 4. Зависимость десятичного логарифма среднего времени обработки 1000 экспериментов (с) алгоритмов оптимизации к МНК при $n = 300$ (а) и $m = 4$ (б)

Переход к динамическим реализациям спуска по узловым прямым, основанным на скользящем окне наблюдений и учитывающим решение с предыдущего шага, позволил сильнее приблизить время анализа к МНК [7]. На графиках (рис. 5) видно, что динамическая версия модифицированного градиентного спуска уступает МНК менее чем на порядок, что является приемлемым для задач мониторинга. Это устранило исторический разрыв: если ранее МНМ уступал МНК многократно, то динамическая реализация существенно сократила это отставание.

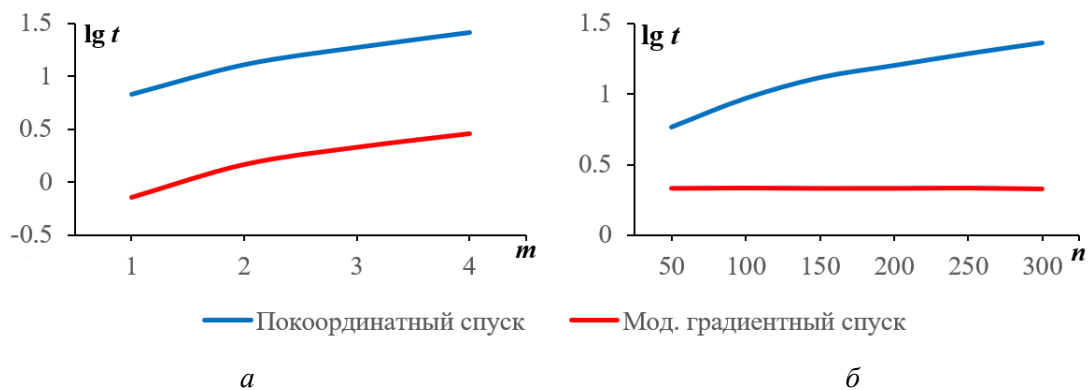


Рис. 5. Зависимость десятичного логарифма отношения среднего времени обработки 1000 экспериментов (с) динамическими алгоритмами к МНК $n = 300$ (а) и $m = 4$ (б)

Заключение

Проведённое исследование подтвердило высокую эффективность модифицированного алгоритма спуска по узловым прямым для задач динамического мониторинга быстропеременных процессов. Ключевым достижением является преодоление исторического разрыва между вычислительной эффективностью МНМ и МНК. Использование производных по

направлению узловых прямых, учет угла их наклона и использование первого приближения сократило вычислительную сложность статической реализации до $O(m^{1.8}n^{1.5})$, что значительно превосходит известные методы оптимизации.

Динамическая версия алгоритма обеспечила время обработки, сопоставимое с МНК (отставание менее чем на порядок), при сохранении устойчивости оценки параметров регрессионной модели. Это позволяет реализовывать непрерывный мониторинг систем с повышенными требованиями к быстродействию, минимизируя риски несвоевременного обнаружения критических отклонений.

Таким образом, предложенные модификации решают фундаментальную проблему совмещения устойчивости и высокой вычислительной эффективности, расширяя возможности анализа и управления сложными динамическими объектами.

Список литературы

1. Волкова, В.Н. Теория систем и системный анализ: учебник / В.Н. Волкова, А.А. Денисов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Юрайт, 2014. – 616 с.
2. Zeigler, B.P. Theory of Modeling and Simulation / B.P. Zeigler, H. Praehofer, T.G. Kim. – 2nd ed. – San Diego: Academic Press, 2000. – 510 p.
3. Богданов, Дж. Вероятностные модели накопления повреждений / Дж. Богданов, Ф. Козин. – М.: Мир, 1989. – 344 с.
4. Гражданская защита: энциклопедия: в 4 т. Т. 2: К–О. – М.: ФГБУ ВНИИ ГОЧС (ФЦ), 2015. – 624 с.
5. Шихалев, Д.В. Проблемы управления системой обеспечения пожарной безопасности объекта. Ч. 2. Методы мониторинга / Д.В. Шихалев // Проблемы управления. – 2022. – № 2. – С. 3–11. – DOI: 10.25728/ru.2022.2.1
6. Пресняков, В.Ф. Параметры и показатели мониторинга состояния предприятия / В.Ф. Пресняков // Экономика и математические методы. – 2022. – Т. 58, № 3. – С. 70–78. – DOI: 10.31857/S042473880021700-9.
7. Голованов, О.А. Спуск по узловым прямым в задачах устойчивого мониторинга динамических регрессионных моделей / О.А. Голованов, А.Н. Тырсин // Информационные технологии и вычислительные системы. – 2025. – № 2. – С. 51–63. DOI: 10.14357/20718632250205
8. Савоскина, Е.В. Анализ инновационных механизмов решения жилищных проблем в Российской Федерации / Е.В. Савоскина, Н.А. Солопов, Е.П. Акри, С.В. Домнина // Вестник МГСУ. – 2022. – Т. 17, № 8. – С. 1096–1112. DOI: 10.22227/1997-0935.2022.8.1096-1112
9. Акимов, П.А. Итерационный алгоритм для l_1 -аппроксимации в динамических задачах оценивания / П.А. Акимов, А.И. Матасов // Автоматика и телемеханика. – 2015. – № 5. – С. 7–26.
10. Демиденко, Е.З. Линейная и нелинейная регрессия / Е.З. Демиденко. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 302 с.
11. Мудров, В.И. Методы обработки измерений: квазиправдоподобные оценки / В.И. Мудров, В.Л. Кушко. – М.: Радио и связь, 1983. – 304 с.
12. Айвазян, С.А. Прикладная статистика. Исследование зависимостей / С.А. Айвазян, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин. – М.: Финансы и статистика, 1985. – 488 с.
13. Greene, W. H. Econometric Analysis / W. H. Greene. – 8th global ed. – London: Pearson Education, 2020. – 1320 p.

14. Орлов, А.И. Часто ли распределение результатов наблюдений является нормальным? / А.И. Орлов // Заводская лаборатория. – 1991. – Т. 57, № 7. – С. 64–66.
15. Tukey, J.W. The Future of Data Analysis / J.W. Tukey // Breakthroughs in Statistics: Methodology and Distribution. – New York: Springer, 1962. – P. 408–452. DOI: 10.1007/978-1-4612-4380-9_31
16. Ершов, А.А. Стабильные методы оценивания параметров (обзор) / А.А. Ершов // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 8. – С. 66–100.
17. Dantzig, G.B. Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities / G.B. Dantzig // Activity Analysis of Production and Allocation. – 1951. – Vol. 13. – P. 339–347.
18. Панюков, А.В. Параметрическая идентификация квазилинейного разностного уравнения / А.В. Панюков, Я.А. Мезал // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2019. – Т. 11, № 4. – С. 32–38. DOI: 10.14529/mmph190404
19. Зоркальцев, В.И. Метод внутренних точек: история и перспективы / В.И. Зоркальцев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2019. – Т. 59, № 10. – С. 1649–1665. DOI: 10.1134/S0044466919100181
20. Дикин, И.И. Итеративное решение задач линейного и квадратичного программирования / И.И. Дикин // Доклады АН СССР. – 1967. – Т. 174, № 4. – С. 747–748.
21. Тырсин, А.Н. Алгоритмы спуска по узловым прямым в задаче оценивания регрессионных уравнений методом наименьших модулей / А.Н. Тырсин // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2021. – Т. 87, № 5. – С. 68–75. DOI: 10.26896/1028-6861-2021-87-5-68-75
22. Голованов, О.А. Модифицированный алгоритм градиентного спуска по узловым прямым в задаче регрессионного анализа / О.А. Голованов, А.Н. Тырсин // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2025. – Т. 91, № 3. – С. 83–92. DOI: 10.26896/1028-6861-2025-91-3-83-92
23. Тырсин, А.Н. Точное оценивание линейных регрессионных моделей методом наименьших модулей на основе спуска по узловым прямым / А.Н. Тырсин, А.А. Азарян // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2018. – Т. 10, № 2. – С. 47–56. DOI: 10.14529/mmph180205
24. Голованов, О.А. Регрессионный анализ данных на основе метода наименьших модулей в динамических задачах оценивания / О.А. Голованов, А.Н. Тырсин // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2023. – Т. 89, № 5. – С. 71–80. DOI: 10.26896/1028-6861-2023-89-5-71-80
25. Голованов, О.А. Устойчивое регрессионное моделирование: методы внутренней точки, симплекс-метод, спуск по узловым прямым / О.А. Голованов, А.Н. Тырсин // Автоматика и телемеханика. – 2025. – № 3. – С. 100–118. DOI: 10.31857/S0005231025030063

References

1. Volkova V.N., Denisov A.A. Theory of systems and systems analysis. Moscow, Urait, 2014, 616 p.
2. Zeigler B.P., Praehofer H., Kim T.G. Theory of Modeling and Simulation. 2nd ed. San Diego, Academic Press, 2000, 510 p.
3. Bogdanoff J., Kozin F. Probabilistic models of cumulative damage. Moscow, Mir, 1989, 344 p.

4. Civil defense: encyclopedia: in 4 vols. Vol. 2: K–O]. Moscow, VNI GOChS (FC), 2015, 624 p.
5. Shikhalev D.V. Problems of managing the fire safety system of a facility. Part 2. Monitoring methods. *Control Sciences*. 2022, no. 2, pp. 3–11. DOI: 10.25728/pu.2022.2.1.
6. Presniakov V.F. Parameters and indicators of enterprise condition monitoring. *Economics and Mathematical Methods*. 2022, vol. 58, no. 3, pp. 70–78. DOI: 10.31857/S042473880021700-9.
7. Golovanov O.A., Tyrsin A.N. Descent along nodal straight lines in robust monitoring problems of dynamic regression models. *Journal of Information Technologies and Computing Systems*. 2025, no. 2, pp. 51–63. DOI: 10.14357/20718632250205.
8. Savoskina E.V., Solopov N.A., Akri E.P., Domnina S.V. Analysis of innovative mechanisms for solving housing problems in the Russian Federation. *Vestnik MGSU*. 2022, vol. 17, no. 8, pp. 1096–1112. DOI: 10.22227/1997-0935.2022.8.1096-1112.
9. Akimov P.A., Matasov A.I. Iterative algorithm for l_1 -approximation in dynamic estimation problems. *Automation and Remote Control*. 2015, no. 5, pp. 7–26.
10. Demidenko E.Z. Linear and nonlinear regression. Moscow, Finansy i statistika, 1981, 302 p.
11. Mudrov V.I., Kushko V.L. Measurement processing methods: quasi-likelihood estimates. Moscow, Radio i svyaz', 1983, 304 p.
12. Aïvazian S.A., Eniukov I.S., Meshalikin L.D. Applied statistics. Study of dependencies. Moscow, Finansy i statistika, 1985, 488 p.
13. Greene W.H. Econometric Analysis. 8th global ed. London, Pearson Education, 2020, 1320 p.
14. Orlov A.I. How often is the distribution of observational results normal? *Industrial Laboratory*. 1991, vol. 57, no. 7, pp. 64–66.
15. Tukey J.W. The Future of Data Analysis. *Breakthroughs in Statistics: Methodology and Distribution*. New York, Springer, 1962, pp. 408–452. DOI: 10.1007/978-1-4612-4380-9_31.
16. Ershov A.A. Stable methods of parameter estimation (review). *Automation and Remote Control*, 1978, no. 8, pp. 66–100.
17. Dantzig G.B. Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities. *Activity Analysis of Production and Allocation*. 1951, vol. 13, pp. 339–347.
18. Paniukov A.V., Mezaal Ya. A. Parametric identification of quasilinear difference equation. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics*. 2019, vol. 11, no. 4, pp. 32–38. DOI: 10.14529/mmph190404.
19. Zorkal'tsev V.I. Interior point method: history and prospects. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2019, vol. 59, no. 10, pp. 1649–1665. DOI: 10.1134/S0044466919100181.
20. Dikin I.I. Iterative solution of linear and quadratic programming problems. *Doklady Mathematics*. 1967, vol. 174, no. 4, pp. 747–748.
21. Tyrsin A.N. Algorithms of descent along nodal lines in the problem of estimating regression equations by the least absolute deviations method. *Industrial Laboratory. Materials Diagnostics*. 2021, vol. 87, no. 5, pp. 68–75. DOI: 10.26896/1028-6861-2021-87-5-68-75.
22. Golovanov O.A., Tyrsin A.N. Modified algorithm of gradient descent along nodal lines in the problem of regression analysis. *Industrial Laboratory. Materials Diagnostics*. 2025, vol. 91, no. 3, pp. 83–92. DOI: 10.26896/1028-6861-2025-91-3-83-92.

23. Tyrsin A.N., Azarian A.A. Exact estimation of linear regression models by the least absolute deviations method based on descent along nodal lines. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics.* 2018, vol. 10, no. 2, pp. 47–56. DOI: 10.14529/mmph180205.
24. Golovanov O.A., Tyrsin A.N. Regression analysis of data based on the least absolute deviations method in dynamic estimation problems. *Industrial Laboratory. Materials Diagnostics.* 2023, vol. 89, no. 5, pp. 71–80. DOI: 10.26896/1028-6861-2023-89-5-71-80.
25. Golovanov O.A., Tyrsin A.N. Stable regression modeling: interior point methods, simplex method, descent along nodal lines. *Automation and Remote Control.* 2025, no. 3, pp. 100–118. DOI: 10.31857/S0005231025030063.