

Давыдов, А. Р. Статистические толерантные интервалы распределений в задачах, связанных с приемлемым риском / А. Р. Давыдов, В. В. Носкова // Прикладная математика и вопросы управления. – 2025. – № 2. – С. 131–139. DOI 10.15593/2499-9873/2025.2.09

Библиографическое описание согласно ГОСТ Р 7.0.100–2018

Давыдов, А. Р. Статистические толерантные интервалы распределений в задачах, связанных с приемлемым риском / А. Р. Давыдов, В. В. Носкова. – Текст : непосредственный. – DOI 10.15593/2499-9873/2025.2.09 // Прикладная математика и вопросы управления / Applied Mathematics and Control Sciences. – 2025. – № 2. – С. 131–139.



**ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
И ВОПРОСЫ УПРАВЛЕНИЯ**

№ 2, 2025

<https://ered.pstu.ru/index.php/amcs>



Научная статья

DOI: 10.15593/2499-9873/2025.2.09

УДК 519.23



Статистические толерантные интервалы распределений в задачах, связанных с приемлемым риском

А.Р. Давыдов, В.В. Носкова

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 21 марта 2025
Одобрена: 25 июня 2025
Принята к публикации:
08 августа 2025

Финансирование

Исследование не имело
спонсорской поддержки.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии
конфликта интересов.

Вклад авторов

Равноценен.

Ключевые слова:

статистические интервальные
оценки, толерантные интервалы,
доверительные интервалы,
контроль свойств материалов,
параметрический и непараметри-
ческий метод, имитационное
моделирование

АННОТАЦИЯ

Расчет толерантных границ распределений является необходимой задачей эффективного решения проблем, связанных с приемлемым риском. Это отражается в том числе в требованиях международных стандартов.

В статье приведены теоретические сведения о статистических толерантных интервалах и направления их применения. Представлены формулы для расчета одно-сторонних толерантных интервалов. В качестве примера рассмотрена задача расчета характеристик конструкционной прочности материалов в авиастроении по экспериментальным данным. Проведен сравнительный анализ значений нижней толерантной границы при использовании различных законов распределения данных.

Показано использование непараметрических методов для расчета толерантных границ. С использованием основного соотношения для расчетных показателей получены доверительные вероятности, позволяющие использовать минимальные элементы выборок в качестве левой односторонней границы. При заданных значениях доверительной вероятности построены зависимости величин охвата данных от объема выборки. Для расчета значений нижней толерантной границы использованы методы статистического моделирования. При вычислениях использован программный пакет R.

© Давыдов Андрей Русланович – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики, ПНИПУ, e-mail: ardavydov@mail.ru, ORCID 0009-0004-3831-7561.

Носкова Виктория Вадимовна – ассистент кафедры прикладной математики, ПНИПУ, e-mail: faiwronvick@gmail.com, ORCID 0009-0007-2207-4501.



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

Perm Polytech Style Davydov A.R., Noskova V.V. Statistical tolerance intervals of distributions in tasks associated with acceptable risk. *Applied Mathematics and Control Sciences*. 2025, no. 2, pp. 131–139. DOI: 10.15593/2499-9873/2025.2.09

MDPI and ACS Style: Davydov, A.R.; Noskova, V.V. Statistical tolerance intervals of distributions in tasks associated with acceptable risk. *Appl. Math. Control Sci.* **2025**, *2*, 131–139. <https://doi.org/10.15593/2499-9873/2025.2.09>

Chicago/Turabian Style: Davydov, Andrey R., and Viktoria V. Noskova. 2025. “Statistical tolerance intervals of distributions in tasks associated with acceptable risk”. *Appl. Math. Control Sci.* no. 2: 131–139. <https://doi.org/10.15593/2499-9873/2025.2.09>



APPLIED MATHEMATICS
AND CONTROL SCIENCES

№ 2, 2025

<https://red.pstu.ru/index.php/amcs>



Article

DOI: 10.15593/2499-9873/2025.2.09

UDC 519.23



Statistical tolerance intervals of distributions in tasks associated with acceptable risk

A.R. Davydov, V.V. Noskova

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 21 March 2025

Approved: 25 June 2025

Accepted for publication:

08 August 2025

Funding

This research received no external funding.

Conflicts of Interest

The author declares no conflict of interest.

Authors Contributions

equivalent.

Keywords:

statistical interval estimation, tolerance intervals, confidence intervals, control of material properties, parametric and non-parametric method, simulation modelling

ABSTRACT

The calculation of tolerance bounds for distributions is a necessary task to effectively address acceptable risk. This is reflected, among other things, in the requirements of international standards.

The article provides theoretical information about statistical tolerance intervals and directions of their application. Formulas for calculating one-sided tolerance intervals are presented. As an example, the problem of calculating the characteristics of structural strength of materials in aircraft construction using experimental data is considered. A comparative analysis of the values of the lower tolerance limit using different laws of data distribution is carried out.

The use of non-parametric methods for calculation of tolerance limits is shown. Using the basic relation for the calculated indices, the confidence probabilities are obtained, allowing to use the minimum elements of the samples as the left one-sided boundary. At given values of the confidence probability, the dependences of the data coverage values on the sample size are plotted. Statistical modelling methods were used to calculate the values of the lower tolerance boundary. The R software package was used for calculations.

© **Andrey R. Davydov** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, PNRPU
e-mail: ardavydov@mail.ru, ORCID 0009-0004-3831-7561.

Victoria V. Noskova – Assistant of the Department of Applied Mathematics, PNRPU, e-mail: faiwronvick@gmail.com,
ORCID 0009-0007-2207-4501.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

Введение

Статистические интервальные оценки тесно связаны с понятием приемлемого риска, особенно в контексте оценки неопределенности при принятии решений на основе статистических данных. Приемлемый риск в такой интерпретации эквивалентен статистическому уровню значимости.

Очевидно, что достигнуть нулевого риска невозможно, поэтому актуальной является концепция приемлемого риска. Суть концепции заключается в стремлении к такой малой опасности, которую приемлет общество в данный период времени. Приемлемый риск обычно на 2–3 порядка строже фактического, поэтому введение такой меры является допустимым [1, с. 24].

В статистике выделяют два основных вида интервальных оценок: доверительные и толерантные. Доверительный интервал строится по выборочным данным для оценки конкретного параметра распределения при заданной доверительной вероятности и измеряет, таким образом, ошибку выборки. Если говорить, например, про выборочный контроль качества, то доверительный интервал – это некоторый диапазон значений, который с заданной вероятностью покрывает средний параметр качества всей продукции или генеральной совокупности. Но, очевидно, что средние значения параметров качества не соответствуют концепции приемлемого риска.

Толерантные интервалы используются реже, но уже известны следующие направления их применения: выборочный контроль качества особо важных изделий, контроль, производимый на основе выборочных данных малого объема. Толерантные интервалы используются также в связи с некоторыми вопросами безопасности [2; 3]. В международных стандартных ИСО¹ рекомендуют использовать именно толерантные интервалы.

В действующем стандарте² дается следующее определение. Толерантный интервал – это интервал, определяемый по случайной выборке таким образом, что с заданным уровнем доверия накрывает долю совокупности, не менее заданной. Уровень доверия в этом случае – предел доли интервалов, определенных указанным способом, накрывающих долю в выбранной совокупности, не менее заданной, при бесконечном повторении метода.

Толерантный интервал строится для оценки всего распределения, содержит в себе определенную часть генеральной совокупности и сочетает, таким образом, охват и уверенность.

Одним из основных источников, раскрывающих теоретические основы толерантных интервалов является работа, в которой Ш. Закс приводит выводы оценок толерантных пределов в основном для нормально распределенной генеральной совокупности [4]. В ряде других работ предлагаются оценки толерантных границ для распределений логнормального, гамма-, Вейбулла – Гнеденко методом сведения их к нормальному распределению [5; 6]. Хансен и Купменс предлагают способ искать толерантный интервал для семейства лог-выпуклых функций [7]. Т.А. Осечкина выводит алгоритм построения нижней толерантной границы с помощью ядерной оценки функции плотности [8].

¹ ГОСТ Р ИСО 16269-6-2005. Статистические методы. Статистическое представление данных. Определение статистических толерантных интервалов. – Введ. с 01.09.2005. – М.: Стандартинформ, 2005. – 29 с.

² ГОСТ Р 50779.29-2017 (ИСО 16269-6:2014). Статистические методы. Статистическое представление данных. Часть 6. Определение статистических толерантных интервалов. – Введ. с 01.12.2018. – М.: Стандартинформ, 2020. – 49 с.

Выделяют два основных подхода при построении толерантных интервалов: параметрический и непараметрический. Параметрический метод основан на предположении о том, что данные подчиняются конкретному распределению, а непараметрический метод этого не требует.

Расчет толерантных интервалов при контроле качества

В качестве примера использования толерантных интервальных оценок рассмотрен выборочный контроль характеристик конструкционной прочности материалов в авиастроении. Конструкционная прочность – это комплексная характеристика материала, включающая сочетание критериев его прочности, надежности и долговечности.

В расчетах на прочность деталей в авиастроении используются расчетные значения характеристик конструкционной прочности материалов (РЗХКП), определяемые соотношением:

$$X_{\text{рзхкп}} = \bar{x} - ks, \quad (1)$$

где \bar{x} – среднее значение наблюдений по выборке, k – расчетный множитель, s – выборочное стандартное отклонение.

В рекомендательном циркуляре³ множитель k принимается равным значению квантили распределения Гаусса U_p . При расчете основных деталей принимается $U_p = 3$. Это позволяет определять минимальные значения механических характеристик с вероятностью неразрушения 0,99 при доверительной вероятности 0,95. Для расчета деталей, не отнесенных к категории основных, но разрушение которых может привести к значительному экономическому ущербу, принимается $U_p = 2$. В этом случае допускается определять значения механических характеристик с вероятностью неразрушения 0,9 при доверительной вероятности 0,95.

Вместе с тем более точные и обоснованные результаты дает использование вместо квантили нормального распределения толерантного множителя, зависящего в том числе и от закона распределения данных.

Даны две выборки (табл. 1, 2), содержащие экспериментальные данные значений характеристик конструкционной прочности образцов [5].

Таблица 1

Значение характеристик конструкционной прочности образцов первой выборки ($N = 10$)

211	195	220	216	211
218	207	200	208	215

Таблица 2

Значение характеристик конструкционной прочности образцов второй выборки ($N = 23$)

206	220	204	214	205	225	222
219	227	219	223	210	217	222
216	219	226	219	220	209	218
214	218					

³ Методические рекомендации по определению расчетных характеристик конструкционной прочности металлических материалов: РЦ-АП-33.15-1. – М.: Авиаиздат, 2013. – 41 с.

Расчетное значение характеристики конструкционной прочности будем определять по формуле (1) как нижнюю границу L одностороннего толерантного интервала (рис. 1). Множитель k определим как толерантный множитель, учитывающий вероятность неразрушения, доверительную вероятность, а также объем и распределение выборки.

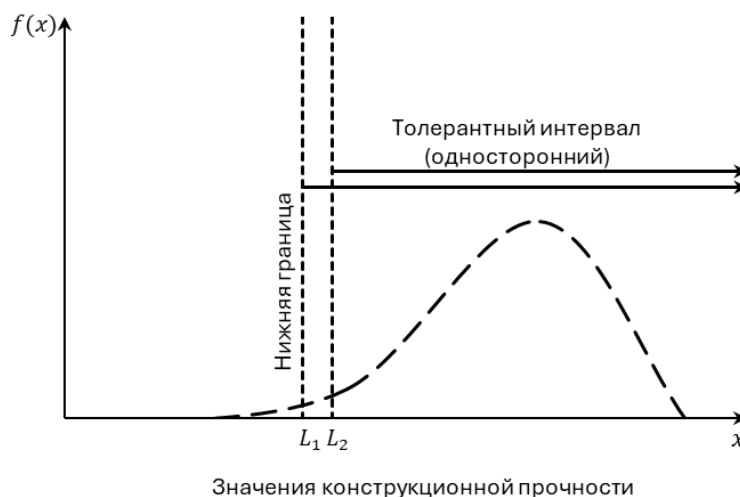


Рис. 1. Схематичное изображение толерантного интервала распределения с плотностью $f(x)$

Применение параметрического метода для расчета толерантных интервалов

Выборки были исследованы на распределение по критерию Колмогорова – Смирнова. Для первой выборки значения критерия статистически значимы для нормального, логнормального и гамма-распределений. Данные второй выборки соответствуют нормальному и логнормальному законам [5]. Рассчитаны выборочные оценки среднего \bar{x} и стандартного отклонения s . Толерантный множитель $k(n; p; 1 - \alpha)$ определяется в зависимости от n – объема выборки, p – доли генеральной совокупности, $\gamma = 1 - \alpha$ доверительной вероятности.

Для одностороннего интервала нормально распределенной совокупности толерантный множитель рассчитывается по формуле⁴:

$$k(n; p; 1 - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1, u_p \sqrt{n}), \quad (2)$$

где $t_{1-\alpha}(n-1, u_p \sqrt{n})$ – квантиль нецентрального распределения Стьюдента с $n-1$ степенью свободы и параметром нецентральности $u_p \sqrt{n}$; u_p – квантиль стандартного нормального распределения уровня p .

Нижняя (левая) граница толерантного интервала L ищется по формуле (1) с использованием толерантного множителя (2). Для логнормального распределения после нормализации данных используется тот же алгоритм.

⁴ ГОСТ Р 50779.29-2017. Статистические методы. Статистическое представление данных. Часть 6. Определение статистических толерантных интервалов. С. 7.

Результаты расчетов, приведенные в табл. 3, были получены при помощи программной среды R, специального пакета *tolerance* для вычисления толерантных интервалов [9; 10]. Расчеты могут быть проведены с использованием таблиц стандарта⁵.

Таблица 3

Результаты расчетов значений нижней толерантной границы L
при доверительной вероятности 0,95

Распределение	Выборка 1		Выборка 2	
Охват (вероятность неразрушения), %	90	99	90	99
Нормальное	191,4453	178,5594	204,7829	196,0432
Логнормальное	191,9074	180,3502	204,9242	196,7618
Гамма	192,8102	181,4947	-	-

Таким образом, интервал $[L; +\infty)$ содержит не менее чем 90 % (99 %) значений прочности образцов гипотетически возможной партии изделий – генеральной совокупности, при доверительной вероятности 0,95. Если сравнивать результаты при использовании разных законов распределения, то для выборки 1 более предпочтительна модель гамма-распределения. В этом случае расчетное значение прочности выше, что обеспечит в дальнейшем меньшую материалоемкость изделий. Заметим также, что большему объему выборки при близких значениях среднего и стандартного отклонения соответствуют более высокие значения нижней толерантной границы.

Применение непараметрического метода для расчета толерантных интервалов

При неизвестном виде распределения для поиска толерантных интервалов используют порядковые статистики. Любая единственная пара порядковых статистик может быть использована в качестве толерантных границ. По исходной выборке X_1, \dots, X_n строится вариационный ряд $X_{(1)} < \dots < X_{(n)}$. Границы определяются порядковыми статистиками: $L = X_{(i)}$, $U = X_{(j)}$. В частности, минимальный и максимальный элемент выборки могут являться толерантными границами: $L = X_{(1)}$, $U = X_{(n)}$.

При использовании данного метода существуют ограничения на минимальный размер выборки n , чтобы можно было оперировать величинами доверительной вероятности и охватом генеральной совокупности. Все эти три параметра содержатся в соотношении Уилкса, которое является основным для построения толерантных интервалов⁶:

$$np^{n-1} - (n-1)p^n \leq \alpha, \quad (3)$$

где α – уровень значимости.

При контроле характеристик материалов объем выборки чаще всего известен. Заданы также вероятности неразрушения или величины охвата совокупности 90 и 99 % (для неос-

⁵ ГОСТ Р 50779.29-2017. Статистические методы. Статистическое представление данных. Часть 6. Определение статистических толерантных интервалов. С. 16.

⁶ ГОСТ Р 50779.29-2017. Статистические методы. Статистическое представление данных. Часть 6. Определение статистических толерантных интервалов. С. 41.

новых и основных деталей). Тогда по соотношению Уилкса возможно вычислить доверительную вероятность.

В частном случае для одностороннего толерантного интервала можно определить уровень доверия для минимального элемента выборки:

$$p^n \leq \alpha. \quad (4)$$

Тогда для первой выборки при охвате 90 % и 10 наблюдениях уровень доверия равен 0,65. Этого, конечно, недостаточно для обеспечения приемлемого риска. Необходим больший объем данных.

Для второй выборки при охвате 90 % и 23 наблюдениях получен уровень доверия 0,91. То есть с таким уровнем доверия можно утверждать, что не меньше чем 90 % изделий всей партии будут иметь прочность выше минимального значения выборки 204. При повышении вероятности неразрушения до 0,99 доверительная вероятность уменьшается до 0,21.

Рассчитаем минимальный объем выборки, который обеспечит необходимый охват совокупности при заданных уровнях доверия (рис. 2). В частности, при доверительной вероятности 0,95 в случае 90 % охвата необходимый объем выборки составит $n > 29$, а при 99 % охвата $n > 299$.

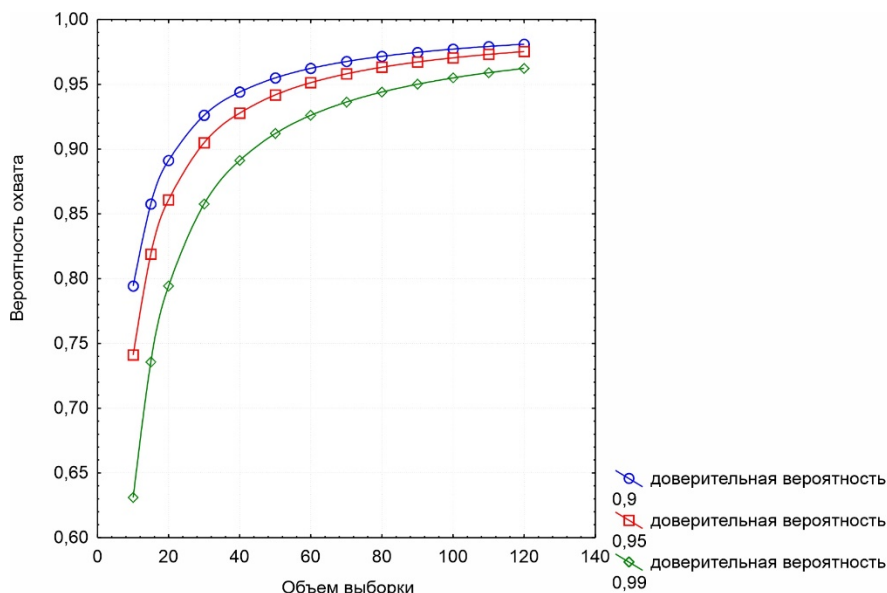


Рис. 2. Значения вероятности охвата в зависимости от объема выборки и заданных доверительных вероятностей

В связи с недостатком реальных данных для построения толерантной границы используем методы имитационного статистического моделирования. Примем, что экспериментальные наблюдения представляют собой смесь данных, имеющих нормальное, логнормальное и гамма-распределения в равных соотношениях. По вычисленным параметрам этих распределений [5] смоделируем случайные выборки общим объемом 30 единиц. Метод статистического моделирования предполагает многократное повторение случайных выборок. Затем, в соответствии с алгоритмами непараметрического метода, составляем последовательность минимальных элементов этих выборок и выбираем элемент с таким значением, меньше которого не более 10 % элементов этой последовательности. При стократном повторении этого алгоритма получено значение левой толерантной границы совокупности, составляющее 197 единиц.

Заключение

Предложено использование толерантных интервалов в задачах с приемлемым риском. Для выборочных данных прочности материалов при заданных уровнях доверительной вероятности и вероятности неразрушения рассчитаны значения нижней толерантной границы, которые используются в качестве расчетных значений характеристик конструкторской прочности. При использовании параметрических методов установлено, что применение модели гамма-распределения данных более предпочтительно, поскольку обеспечивает большее расчетное значение прочности. При использовании непараметрических методов показана взаимосвязь объема выборки, доверительной вероятности и охватываемой доли генеральной совокупности. Расчеты значений нижней толерантной границы проведены с использованием методов имитационного статистического моделирования.

Список литературы

1. Цепелев, В.С. Основные сведения о БЖД: учебное пособие / В.С. Цепелев, Г.В. Тягунов, И.Н. Фетисов. – 3-е изд., испр. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2014. – 120 с. – (Безопасность жизнедеятельности в техносфере: в 2 ч.; ч. 1).
2. Розенталь, О.М. Сравнение методов оценивания риска ошибочного контроля качества природных вод / О.М. Розенталь, Л.Н. Александровская // Аналитика и контроль. – 2016. – Т. 20, № 1. – С. 53–61
3. Об оценке погрешностей расчетов, выполняемых при обосновании безопасности объектов использования атомной энергии / С.Н. Богдан, О.М. Ковалевич, С.А. Шевченко, Д.А. Яшников // Ядерная и радиационная безопасность. – 2017. – № 2. – С. 38–53.
4. Закс, Ш. Теория статистических выводов: пер. с англ / Ш. Закс. – М.: МИР, 1975. – 776 с.
5. Первадчук, В.П. Прикладной статистический анализ результатов механических испытаний: учеб.-метод. пособие. – Ч. 1: Алгоритмы анализа и определение статистических толерантных интервалов характеристик материалов / В.П. Первадчук, А.Р. Давыдов, Т.А. Осечкина. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2017. – 86 с.
6. Cho, K.S. Tolerance intervals in statistical software and robustness under model misspecification / K.S. Cho, H.K. Tony Ng // Journal of Statistical Distributions and Applications. – 2021. – Vol. 8(10).
7. Hanson, L. Tolerance Limits for the Class of Distributions with Increasing Hazard Rates / L. Hanson, L.H. Koopmans // The Annals of Mathematical Statistics. – 1964. – P. 1562–1570.
8. Осечкина, Т.А. Ядерные оценки при расчетах границ толерантных интервалов / Т.А. Осечкина // Современные наукоемкие технологии. – 2019. – № 5. – С. 64–68.
9. R Core Team. R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing. – Vienna, Austria. – 2023. [Электронный ресурс]. – URL: <https://www.R-project.org/> (дата обращения: 05.01.2025).
10. Young, D.S. tolerance: An R Package for Estimating Tolerance Intervals / D.S. Young // The Pennsylvania State University. Journal of Statistical Software. – 2010. – Vol. 36, iss. 5. – P. 39.

References

1. Tsepelev V.S., Tyagunov G.V., Fetisov I.N. Basic Information on Life Safety 3rd ed., Ekaterinburg, Ural University Press, 2014, 120 p.
2. Rozental O.M., Aleksandrovskaya L.N. Comparison of Methods for Estimating the Risk of Erroneous Quality Control of Natural Waters. *Analytics and Control*, 2016, vol. 20, no. 1, pp. 53–61.
3. Bogdan S.N., Kovalevich O.M., Shevchenko S.A., Yashnikov D.A. On the Assessment of Calculation Errors Performed in Justifying the Safety of Nuclear Facilities. *Nuclear and Radiation Safety*, 2017, no. 2, pp. 38–53.
4. Zaks Sh. Theory of Statistical Inference; translated from English. Moscow: Mir, 1975, 776 p.
5. Pervadchuk V.P., Davydov A.R., Osechkina T.A. Applied Statistical Analysis of Mechanical Test Results: study guide, part 1: Analysis Algorithms and Determination of Statistical Tolerance Intervals for Material Properties. Perm, Perm National Research Polytechnic University Publish, 2017, 86 p.
6. Cho K.S., Tony Ng H.K. Tolerance intervals in statistical software and robustness under model misspecification. *Journal of Statistical Distributions and Applications*, 2021, vol. 8, no. 10.
7. Hanson L., Koopmans L.H. Tolerance Limits for the Class of Distributions with Increasing Hazard Rates. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1964, pp. 1562–1570.
8. Osechkina T.A. Kernel Estimates in Tolerance Interval Boundary Calculations. *Modern High Technologies*, 2019, no. 5, pp. 64–68.
9. R Core Team. R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2023, available at: <https://www.R-project.org/>.
10. Young D.S. tolerance: An R Package for Estimating Tolerance Intervals. *Journal of Statistical Software*, 2010, vol. 36, no. 5, art. 39.