Мулюков, М. В. О матрице Коши одного класса гибридных систем / М. В. Мулюков // Прикладная математика и вопросы управления. – 2024. – № 3. – С. 64–72. DOI 10.15593/2499-9873/2024.3.05

Библиографическое описание согласно ГОСТ Р 7.0.100–2018
Мулюков, М. В. О матрице Коши одного класса гибридных систем / М. В. Мулюков. – Текст : непосредственный. – DOI 10.15593/2499-9873/2024.3.05 // Прикладная математика и вопросы управления / Applied Mathematics and Control Sciences. – 2024. – № 3. – С. 64–72.

пермский политех

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ВОПРОСЫ УПРАВЛЕНИЯ
№ 3, 2024
https://ered.pstu.ru/index.php/amcs

Научная статья
DOI: 10.15593/2499-9873/2024.3.05
УДК 517.929

О матрице Коши одного класса гибридных систем

М.В. Мулюков

Пермский государственный национальный исследовательский университет,
Пермь, Российская Федерация
Пермский национальный исследовательский политехнический университет»,
Пермь, Российская Федерация
Пермская государственная фармацевтическая академия Министерства здравоохранения Российской Федерации, Пермь, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 06 сентября 2024
Одобрена: 07 октября 2024
Принята к публикации:
08 ноября 2024

Финансирование
Исследование не имело спонсорской поддержки.
Конфликт интересов
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.
Вклад автора
100 %.

Ключевые слова:
гибридная системы, непрерывно-дискретные системы, асимптотическая устойчивость, матрица Коши, производящие функции

АННОТАЦИЯ

Рассматривается вопрос об асимптотической устойчивости линейной непрерывно-дискретной системы функционально-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Такие системы состоят из двух подсистем: непрерывной и дискретной, и часто называются гибридными. Непрерывная подсистема представляет собой систему дифференциальных уравнений. Особенность рассматриваемой гибридной системы заключается в том, что её непрерывная часть представляет собой систему дифференциальных уравнений с сосредоточенным запаздыванием, в то время как в подавляющем большинстве работ рассматриваются такие гибридные системы, непрерывная часть которых представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Стандартный для последних подход изучения устойчивости – интегрирование на каждом конечном промежутке и построение матрицы монодромии. Однако этот подход, вообще говоря, неприменим к задаче исследования устойчивости гибридных систем, непрерывная часть которых представляет собой систему дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. В настоящей работе для исследования устойчивости гибридных систем применяется метод производящих функций совместно с анализом спектра оператора сдвига по траектории решения гибридной системы. Построение производящей функции для матрицы Коши и для фундаментального решения позволяет свести задачу асимптотической устойчивости гибридной системы к задаче исследования расположения корней некоторой функции в комплексной плоскости. Для этой функции естественно ввести термин «характеристическая функция гибридной системы», что и было сделано. Кроме того, доказано, что для данных гибридных систем асимптотическая устойчивость совпадает с равномерной экспоненциальной устойчивостью. Данный подход совместим с методом *D*-разбиения, что позволяет применять его для получения новых эффективных коэффициентных признаков асимптотической устойчивости гибридных систем: в частности, для построения области устойчивости. В настоящей статье построен новый простой необходимый признак асимптотической устойчивости гибридной системы, который сводится к проверке двух элементарных числовых неравенств.

© **Мулюков Михаил Вадимович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Информационные системы и математические методы в экономике», e-mail: mulykoff@gmail.com, ORCID 0000-0001-5610-8035.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

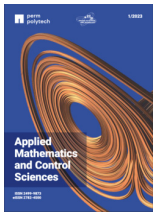
Perm Polytech Style: Mulyukov M.V. On the Cauchy matrix of a class of hybrid systems. *Applied Mathematics and Control Sciences.* 2024, no. 3, pp. 64–72. DOI: 10.15593/2499-9873/2024.3.05

MDPI and ACS Style: Mulyukov, M.V. On the Cauchy matrix of a class of hybrid systems. *Appl. Math. Control Sci.* **2024, 3**, 64–72. https://doi.org/10.15593/2499-9873/2024.3.05

Chicago/Turabian Style: Mulyukov, Mikhail V. 2024. "On the Cauchy matrix of a class of hybrid systems". *Appl. Math. Control Sci.* no. 3: 64–72. https://doi.org/10.15593/2499-9873/2024.3.05

perm polytech

APPLIED MATHEMATICS AND CONTROL SCIENCES
№ 3, 2024
https://ered.pstu.ru/index.php/amcs



Article
DOI: 10.15593/2499-9873/2024.3.05
UDC 517.929

On the Cauchy matrix of a class of hybrid systems

M.V. Mulyukov

Perm State University, Perm, Russian Federation
Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation
Perm State Pharmaceutical Academy of the Ministry of Health of the Russian Federation, Perm, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 06 September 2023
Approved: 07 October 2024
Accepted for publication:
08 November 2024

Funding
This research received no external funding.
Conflicts of Interest
The author declares no conflict of interest.
Author Contributions
100 %.

Keywords:
hybrid systems, continuous-discrete systems, asymptotic stability, Cauchy matrix, generating function.

ABSTRACT

We consider the issue of asymptotic stability of a linear continuous-discrete system of functional differential equations with constant coefficients. Such systems consist of two subsystems, continuous and discrete, and are often called hybrid. The continuous subsystem is a system of differential equations. The feature of the hybrid system under consideration is that its continuous part is a system of differential equations with concentrated delay, while the overwhelming majority of papers consider hybrid systems whose continuous part is a system of ordinary differential equations. The standard approach to studying the stability of the latter systems is integration on each finite interval and the construction of the monodromy matrix. However, this approach is generally inapplicable to the problem of studying the stability of hybrid systems such that the continuous part is a system of differential equations with deviating argument. In the present paper, the method of generating functions and the analysis of the spectrum of shift operator along the trajectory of the solution of a hybrid system are applied to study the stability of hybrid systems. Construction of the generating function for the Cauchy matrix and for the fundamental solution allows us to reduce the problem of asymptotic stability of a hybrid system to the problem of studying the location of the roots of a certain function in the complex plane. For this function, it is natural to introduce the term «the characteristic function of the hybrid system», which was done. In addition, it is proved that for these hybrid systems, the asymptotic stability is equivalent to the uniform exponential stability. This approach is compatible with the *D*-partition method, which allows us to use it to obtain new effective coefficient conditions of asymptotic stability for hybrid systems: in particular, to construct the stability region. In this article, a new simple necessary criterion for the asymptotic stability of a hybrid system is constructed, which is reduced to checking two elementary numerical inequalities.

© **Mikhail V. Mulyukov** – CSc of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Information System and Mathematical Methods in Economics, e-mail: mulykoff@gmail.com, ORCID 0000-0001-5610-8035.

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

Введение

Непрерывно-дискретные системы функционально-дифференциальных уравнений (называемые также гибридными системами) — это системы, состояние которых описывается двумя группами взаимосвязанных переменных: относящиеся к первой группе переменные представляют собой функции непрерывного аргумента и удовлетворяют дифференциальным уравнениям, другая группа переменных представлена функциями дискретного аргумента, удовлетворяющими разностным уравнениям.

В работе [1] поясняется, что гибридные системы возникают при изучении технических объектов с импульсным и цифровым управлением, а также в моделях экономической динамики, в которых экономические показатели непрерывны, но результаты их наблюдения и управленческие решения доступны в дискретные моменты времени.

Устойчивость гибридных систем исследуется следующими методами:

- модификация метода Ляпунова [1–3];
- принцип неподвижной точки [4];
- W-метод Азбелева [5; 6];
- сведение к разностной системе интегрированием исходной системы на конечном промежутке [7–10].

Последний метод может применяться только к таким гибридным системам, в которых непрерывная подсистема является системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Именно для такого рода систем до сих пор удавалось получить точные эффективные коэффициентные необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости.

В работе [11] исследовано уравнение с дискретным запаздывающим аргументом и постоянным сосредоточенным запаздыванием. Это уравнение сводится к гибридной системе другого типа, так как непрерывная подсистема является уравнением с запаздыванием; тем не менее область устойчивости хотя бы частично, но удалось построить. Гибридная система, относящаяся к тому же типу, рассматривалась в [5] — для неё были найдены достаточные условия экспоненциальной устойчивости.

В настоящем исследовании рассматривается гибридная система, непрерывная подсистема которой представляет собой систему дифференциальных уравнений с сосредоточенным запаздыванием. Мы применяем метод производящих функций для сведения задачи исследования устойчивости этой системы к вопросу о расположении корней характеристической функции в комплексной плоскости, а также используем этот метод для получения простых необходимых условий устойчивости данной гибридной системы.

Основной результат

Введём следующие обозначения:

- $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$,
- $\mathbb{N}_0$ — множество целых неотрицательных чисел,
- через $[\cdot]$ обозначена целая часть числа,
- через $\{\cdot\}$ обозначена дробная часть числа,
- I, Θ — единичная и нулевая матрицы соответственно.

Рассмотрим следующую гибридную систему:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + Ax(t) + Bx([t]) + Cx(t-1) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ x(t) = \psi(t), & t \in [-1, 0), \end{cases} \tag{1}$$

где $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times m}$, начальная функция ψ считается суммируемой.

К данному виду сводятся любая линейная автономная гибридная система такая что:

- дискретная подсистема представляет собой линейную автономную систему разностных уравнений с равномерным шагом сетки;
- непрерывная подсистема представляет собой систему линейных автономных дифференциальных уравнений с постоянными запаздываниями, величины которых кратны шагу сетки для дискретной подсистемы.

Обозначим матрицу Коши системы (1) через $Y = Y(t, s)$.

Как известно [12], решение задачи Коши для системы (1) в пространстве локально абсолютно непрерывных вектор-функций существует, единственно и представимо в виде:

$$x(t) = Y(t, 0)x(0) - \int_0^t Y(t, s)\,\psi(s-1)\,\chi(1-s)\,ds, \tag{2}$$

где χ — функция Хевисайда.

Как видно из формулы (2), асимптотические свойства решения гибридной системы определяются свойствами матрицы Коши.

Определение 1. Система (1) называется асимптотически устойчивой, если для любого $s \geq 0$ имеем $\lim\limits_{t\to+\infty} \|Y(t, s)\| = 0$.

Определение 2. Система (1) называется равномерно экспоненциально устойчивой, если существуют такие положительные числа M и σ, что $\|Y(t, s)\| < Me^{-\sigma(t-s)}$ для любых t и s таких, что $t \geq s$.

Легко видеть, что $Y(t, s) = Y(t - [s], \{s\})$, поэтому можно без ограничения общности считать, что $s \in [0, 1)$.

Разобьём матрицу Коши на последовательность функций, определённых на $[0, 1]$:

$$y_n(\tau) = Y(\tau + n + s, s), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \tau \in [0; 1].$$

Построим производящую функцию F для матрицы Коши:

$$F(z, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(\tau) z^n. \tag{3}$$

Здесь для любого $n \in \mathbb{N}_0$ справедливо равенство

$$y_n(1) = y_{n+1}(0). \tag{4}$$

Система (1) для последовательности $\{y_n\}$ принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{y}_n(\tau) + Ay_n(\tau) + By_{n-1}(1-s) + Cy_{n-1}(\tau) = \Theta, & \tau \leq 1 - s, \\ \dot{y}_n(\tau) + Ay_n(\tau) + By_n(1-s) + Cy_{n-1}(\tau) = \Theta, & \tau > 1 - s. \end{cases} \tag{5}$$

Применив сумму (3) к системе (5), учитывая равенство (4), получаем следующую систему:

$$\begin{cases} F'_\tau(\tau,z) + AF(\tau,z) + BzF(1-s,z) + CzF(\tau,z) = \Theta, & \tau \le 1-s, \\ F'_\tau(\tau,z) + AF(\tau,z) + BF(1-s,z) + CzF(\tau,z) = \Theta, & \tau > 1-s, \\ F(0,z) = I + zF(1,z). \end{cases} \tag{6}$$

Как легко видеть, система (6) представляет собой краевую задачу для системы двух обыкновенных дифференциальных матричных уравнений. Найдём решение этой системы.

Во-первых, находим решение первого матричного уравнения на отрезке $[0; 1-s]$:

$$F(\tau,z) = e^{-(A+Cz)\tau}F(0,z) - z\int\limits_0^\tau e^{-(A+Cz)\xi}d\xi\, BF(1-s,z).$$

Подставляем $\tau = 1-s$ в последнюю формулу:

$$F(1-s,z) = e^{-(A+Cz)(1-s)}F(0,z) - z\int\limits_0^{1-s} e^{-(A+Cz)\xi}d\xi\, BF(1-s,z).$$

Следовательно,

$$F(0,z) = e^{(A+Cz)(1-s)}\left(I + z\int\limits_0^{1-s} e^{-(A+Cz)\xi}d\xi\, B\right)F(1-s,z). \tag{7}$$

Во-вторых, найдём решение второго матричного уравнения на отрезке $[1-s, 1]$:

$$F(\tau,z) = e^{-(A+Cz)(\tau-1+s)}F(1-s,z) - \int\limits_{1-s}^\tau e^{-(A+Cz)(\xi-1+s)}d\xi\, BF(1-s,z).$$

Подставим $\tau = 1$:

$$F(1,z) = e^{-(A+Cz)s}F(1-s,z) - \int\limits_{1-s}^1 e^{-(A+Cz)(\xi-1+s)}d\xi\, BF(1-s,z).$$

Таким образом,

$$F(1,z) = e^{(A+Cz)(1-s)}\left(e^{-(A+Cz)} - \int\limits_{1-s}^1 e^{-(A+Cz)\xi}d\xi\, B\right)F(1-s,z). \tag{8}$$

Наконец, объединим (7) и (8) с последним равенством системы (6):

$$F(0,z) - zF(1,z) = e^{(A+Cz)(1-s)}\left(I - ze^{-(A+Cz)} + z\int\limits_0^1 e^{-(A+Cz)\xi}d\xi\, B\right)F(1-s,z).$$

Следовательно,

$$F(1-s,z) = \left(I - ze^{-(A+Cz)} + z\int\limits_0^1 e^{-(A+Cz)\xi}d\xi\, B\right)^{-1} e^{(A+Cz)(s-1)}.$$

В итоге получаем выражение для производящей функции:

$$F(\tau,z)=\begin{cases}\left(e^{(A+Cz)(1-\tau-s)}-z\int\limits_0^{\tau}e^{-(A+Cz)\xi}d\xi\,B\right)F(1-s,z), & \tau\le 1-s.\\ \left(e^{(A+Cz)(1-\tau-s)}-\int\limits_{1-s}^{\tau}e^{-(A+Cz)(\xi-1+s)}d\xi\,B\right)F(1-s,z), & \tau>1-s.\end{cases}$$

Обозначим определитель обращаемой матрицы через Ф. Как мы видим, асимптотические свойства матрицы Коши определяются расположением корней этой функции на комплексной плоскости, поэтому функцию Ф естественно назвать *характеристической функцией* гибридной системы (1):

$$\Phi(z)=\det\left(I-ze^{-(A+Cz)}+z\int\limits_0^1 e^{-(A+Cz)\xi}d\xi\,B\right). \tag{9}$$

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *система* (1) *равномерно экспоненциально устойчива,*

2) *система* (1) *асимптотически устойчива,*

3) *существуют положительные числа* σ, M *такие, что для любой суммируемой начальной функции* ψ *и любого вещественного* x_0 *выполняется неравенство*

$$\|x(t)\|<M(\|\psi\|+\|x_0\|)e^{-\sigma t},$$

4) *все корни функции* (9) *лежат вне единичного круга комплексной плоскости.*

Доказательство. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) очевидна.

Эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 3) непосредственно вытекает из формулы Коши (2).

Для доказательства импликации 4) $\Rightarrow$ 1) воспользуемся подходом, реализованном в работе [13] применительно к функционально-дифференциальным уравнениям нейтрального типа.

Так как Ф является целой функцией, она не имеет точек сгущения за исключением, быть может, бесконечно удалённых точек комплексной плоскости. Следовательно, существует $\sigma>0$ такое, что для любого корня z функции Ф справедливо неравенство $|z|>e^{\sigma}$.

Воспользуемся неравенством Коши для коэффициентов степенного ряда:

$$\|y_n(\tau)\|<Ke^{-\sigma n},\quad \text{где}\quad K=\max_{|z|=e^{\sigma},\ \tau\in[0,1]}\|F(z,\tau)\|.$$

Мы показали, что при $s\in[0;1)$ справедлива оценка $\|Y(t,s)\|<Ke^{-\sigma[t-s]}$. Итак, если $s\in[0;+\infty)$, то

$$\|Y(t,s)\|=\|Y(t-[s],\{s\})\|\le Ke^{-\sigma[t-[s]-\{s\}]}=Ke^{-\sigma[t-s]}.$$

Проведём доказательство импликации 2) $\Rightarrow$ 4).

Пусть $s\in[0;1)$. Рассмотрим оператор S, действующий из $C^m[0;1]$ в $C^m[0;1]$, следующим образом: $y=Sx$, где

$$\begin{cases}\dot y(\tau)+Ay(\tau)+By(0)+Cx(\tau)=0,\\ y(0)=x(1).\end{cases}$$

Иными словами, S представляет собой оператор сдвига по траекториям для гибридной системы (6), то есть $x_{n+1}=Sx_n$, где $x_n(\tau)=x(\tau+n)$.

Положив $x_{n+1}=\lambda x_n$, получаем

$$\left(\lambda I - e^{-(A+\lambda^{-1}C)} + B\int_0^1 e^{-(A+\lambda^{-1}C)s}\,ds\right)x_n = 0.$$

Для того чтобы существовал ненулевой вектор x_n, необходимо и достаточно, чтобы величина λ была равна z^{-1}, где z — корень характеристической функции.

Выберем в качестве начальной функции собственный вектор оператора S.

Если $\lim\limits_{t\to\infty}\|Y(t,s)\| = 0$, то согласно формуле (2) имеем $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$, следовательно, $|\lambda| < 1$, то есть $|z| > 1$. □

Теорема 2. *Для того, чтобы система* (1) *была асимптотически устойчивой, необходимо выполнение неравенств:*

1) $\det(A + B + C) > 0$;

2) $\det(I + e^{C-A} + \int\limits_0^1 e^{(C-A)\xi}d\xi\, B) > 0$.

Доказательство. Заметим, что $\det\left(\int\limits_0^1 e^{-(A+C)\xi}\,d\xi\right) > 0$.

Преобразуем неравенство $\det(A + B + C) > 0$:

$$0 < \det\left(\int_0^1 e^{-(A+C)\xi}\,d\xi\right)\det(A+B+C) = \det\left(\int_0^1 e^{-(A+C)\xi}\,d\xi(A+B+C)\right) =$$

$$= \det\left(\int_0^1 e^{-(A+C)\xi}\,d\xi(A+C) + \int_0^1 e^{-(A+C)\xi}d\xi\, B\right) = \det\left(I - e^{-(A+C)} + \int_0^1 e^{-(A+C)\xi}d\xi\, B\right) = \Phi(1).$$

Итак, неравенство 1) эквивалентно неравенству $\Phi(1) > 0$.

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что неравенство 2) эквивлентно неравенству $\Phi(-1) > 0$.

Очевидно, $\Phi(0) = 1 > 0$, поэтому если хотя бы одно из неравенств, 1) или 2), не выполняется, то существует хотя бы один вещественный корень функции Φ, принадлежащий отрезку $[-1, 1]$, и система (1) не является асимптотически устойчивой. □

Данная теорема обобщает результат работы [14].

Список литературы

1. Козлов, Р. И. Исследование устойчивости нелинейных непрерывно-дискретных моделей экономической динамики методом ВФЛ. I / Р. И. Козлов, О. Р. Козлова // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. — 2009. — № 2. — С. 104–113.

2. Козлов, Р. И. Исследование устойчивости нелинейных непрерывно-дискретных моделей экономической динамики методом ВФЛ. II / Р. И. Козлов, О. Р. Козлова // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. — 2009. — № 3. — С. 41–50.

3. Fridman, E. Stability of linear descriptor systems with delay: a Lyapunov-based approach / E. Fridman // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2002. — Vol. 273, no. 1. — P. 24–44.

4. De la Sen, M. Total Stability Properties Based on Fixed Point Theory for a Class of Hybrid Dynamic Systems / M. De la Sen // Fixed Point Theory and Applications. — 2009. — No. 826438.

5. Симонов, П. М. К вопросу об устойчивости системы двух линейных гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием / П. М. Симонов // Вестник российских университетов. Математика. — 2020. — Т. 25, № 131. — С. 299–306.

6. Bravyi, E. Some Economic Dynamics Problems for Hybrid Models with Aftereffect / E. Bravyi, V. Maksimov, P. Simonov // Mathematics. — 2020. — Vol. 8, no. 10. — Paper no. 1832.

7. Ye, H. Stability Theory for Hybrid Dynamical Systems / H. Ye, A. N. Michel, L. Hou // IEEE Transactions on automatic control. — 1998. — Vol. 43, no. 4. — P. 461–474.

8. Marchenko, V. M. On the Stability of Hybrid Difference-Differential Systems / V. M. Marchenko, J.-J. Loiseau // Differential Equations. — 2009. — Vol. 45. — P. 743–756.

9. Марченко, В. М. Устойчивость и стабилизация линейных гибридных дискретно-непрерывных стационарных систем / В. М. Марченко, И. М. Борковская // Труды БГТУ. Физико-математические науки и информатика. — 2012. — № 6. — С. 7–10.

10. Mulyukov, M. The asymptotic stability of the simplest hybrid systems / M. Mulyukov // Functional Differential Equations. — 2023. — Vol. 30, no. 1–2. — P. 77–86. DOI: 10.26351/FDE/30/1-2/6.

11. Мулюков, М. В. Об устойчивости одного уравнения с дискретным запаздывающим аргументом и постоянным сосредоточенным запаздыванием / М. В. Мулюков // Известия вузов. Математика. — 2023. — № 10. — С. 90–94. DOI: 10.26907/0021-3446-2023-10-90-94.

12. Азбелев, Н. В. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений / Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина. — М.: Наука, 1991. — 280 с.

13. Баландин, А. С. Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа / А. С. Баландин, В. В. Малыгина // Известия вузов. Математика. — 2007. — № 7. — С. 17–27.

14. Мулюков, М. В. Об асимптотической устойчивости одного уравнения с дискретным запаздывающим аргументом / М. В. Мулюков // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2024. — Т. 231. — С. 83–88. — DOI: 10.36535/2782-4438-2024-231-83-88.

References

1. Kozlov R. I., Kozlova O. R. Issledovanie ustojchivosti nelinejnyh nepreryvno-diskretnyh modelej jekonomicheskoj dinamiki metodom VFL [Study of stability of nonlinear continuous-discrete models of economic dynamics using the VFL method. I]. *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Theory and Control Systems*, 2009, no. 2, pp. 104–113.

2. Kozlov R. I., Kozlova O. R. Issledovanie ustojchivosti nelinejnyh nepreryvno-diskretnyh modelej jekonomicheskoj dinamiki metodom VFL [Study of stability of nonlinear continuous-discrete models of economic dynamics using the VFL method. II]. *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Theory and Control Systems*, 2009, no. 3, pp. 41–55.

3. Fridman E., Stability of linear descriptor systems with delay: a Lyapunov-based approach. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2002, vol. 273, no. 1, pp. 24–44.

4. De la Sen M., Total Stability Properties Based on Fixed Point Theory for a Class of Hybrid Dynamic Systems. *Fixed Point Theory and Applications*, 2009, no. 826438.

5. Simonov P. M., K voprosu ob ustojchivosti sistemy dvuh linejnyh gibridnyh funkcional'no-differencial'nyh sistem s posledejstviem [On the stability of a system of two linear hybrid functional-differential systems with aftereffect]. *Bulletin of Russian Universities. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 131, pp. 299–306.

6. Bravyi E., Maksimov V., Simonov P., Some Economic Dynamics Problems for Hybrid Models with Aftereffect. *Mathematics*, 2020, vol. 8, no. 10, paper 1832.

7. Ye H., Michel A. N., Hou L., Stability Theory for Hybrid Dynamical Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, vol. 43, no. 4, pp. 4161–474.

8. Marchenko V. M., Loiseau J.-J., On the Stability of Hybrid Difference-Differential Systems. *Differential Equations*, 2009, vol. 45, pp. 743–756.

9. Marchenko V. M., Borkovskaya I. M., Ustojchivost' i stabilizaciya linejnyh gibridnyh diskretno-nepreryvnyh stacionarnyh sistem [Stability and stabilization of linear hybrid discrete-continuous stationary systems]. *Proceedings of BSTU. Physical and Mathematical Sciences and Informatics*, 2012, no. 6, pp. 7–10.

10. Mulyukov M., The asymptotic stability of the simplest hybrid systems. *Functional Differential Equations*, 2023, vol. 30, no. 1–2, pp. 77–86. DOI: 10.26351/FDE/30/1-2/6.

11. Mulyukov M., On the stability of one equation with a discrete retarded argument and a constant concentrated delay. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2023, vol. 67, no. 10, pp. 81–84, DOI: 10.3103/S1066369X23100079.

12. Azbelev N. V., Maksimov V. P., Rakhmatullina L. F. Introduction to the Theory of Linear Functional Differential Equations, Transl. from the Russian, Advanced Series in Mathematical Science and Engineering, 3, Atlanta, GA: World Federation Publishers Company, 1995, 172 p.

13. Balandin A. S., Malygina V. V. Exponential stability of linear differential-difference equations of neutral type. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2007, vol. 51, no. 7, pp. 15–24. DOI: 10.3103/S1066369X0707002X.

14. Mulyukov M. V. Ob asimptoticheskoj ustojchivosti odnogo uravneniya s diskretnym zapazdyvayushim argumentom [On the asymptotic stability of an equation with a discrete retarded argument], *Results of Science and Technology. Modern mathematics and its applications. Thematic reviews*, 2024, vol. 231, pp. 83–88. DOI: 10.36535/2782-4438-2024-231-83-88.