DOI: 10.15593/2224-9397/2020.1.12
УДК 537.21

И.П. Попов

Курганский государственный университет, Курган, Россия

ЗАПАСАЕМАЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

При стремлении сокращения расстояния между электрическими зарядами к нулю потенциальная энергия электростатического поля стремится к бесконечности, что нехорошо. Возможные попытки спасти положение рассуждениями о невозможности достижения нулевого расстояния в связи с конечными размерами заряженных объектов не продуктивны, поскольку считается, что, например, у электронов и позитронов размеров нет. **Цель исследования:** повышение корректности электростатических расчетов, исключающей возможность получения недостоверных результатов в виде бесконечно большой энергии. **Результаты: д**аны определения. Определение 1. Полная запасаемая энергия – это энергия системы или объекта, равная максимальной работе, которую система или объект может совершить, если ей или ему предоставить такую возможность. Определение 2. Условная реализуемая запасаемая энергия – это часть полной запасаемой энергии системы или объекта, равная работе, которую система или объект *может* совершить, ограниченная условием, исключающим возможность совершения системой или объектом максимальной работы, которую система или объект гипотетически может совершить. Определение 3. Условная нереализуемая запасаемая энергия – это часть полной запасаемой энергии системы или объекта, равная работе, которую система или объект не может совершить, ограниченная условием, исключающим возможность совершения системой или объектом максимальной работы, которую система или объект гипотетически может совершить. Доказан ряд теорем, в том числе теорема 1 – запасаемая энергия всегда положительна; теорема 6 – энергия поля системы из двух заряженных сфер, одна из которых полностью находится внутри другой, есть величина постоянная, т.е. не зависит от местоположения внутренней сферы. **Практическая значимость:** актуальность работы обусловлена значительным повышением роли электростатической энергии в связи с началом массового производства ионисторов, используемых, в частности, в электромобилях, и необходимостью в связи с этим развития теоретического обеспечения.

Ключевые слова: полная, условная реализуемая, нереализуемая, запасаемая, электростатическая энергия, одноименные, разноименные заряды.

I.P. Popov

Kurgan State University, Kurgan, Russia

STORAGE ELECTROSTATIC ENERGY

When the distance between electric charges tends to zero, the potential energy of the electrostatic field tends to infinity, which is not good. Possible attempts to save the situation by reasoning about the impossibility of achieving a zero distance due to the finite size of charged objects are unproductive, since it is believed that, for example, electrons and positrons have no sizes. The purpose of the study is to exclude the possibility of developing infinitely large electrostatic energy. The relevance of the work is due to a significant increase in the role of electrostatic energy in connection with the start of mass production of electric vehicles and the need for the development of theoretical support in this regard. Definitions are given. Definition 1. The total stored energy is the energy of a system or an object equal to the maximum work that a system or object can do if it or he is given such an opportunity. Definition 2. The conditional realized stored energy is a part of the total stored energy of a system or object equal to the work that the system or object can do, limited by the condition that excludes the possibility of the system or object performing the maximum work that the system or object can hypothetically perform. Definition 3. Conditional unrealizable stored energy is a part of the total stored energy of a system or object equal to the work that the system or object cannot perform, limited by the condition that excludes the possibility of the system or object performing the maximum work that the system or object can hypothetically perform. A number of theorems are proved, including Theorem 1 - the stored energy is always positive; Theorem 6 - the field energy of a system of two charged spheres, one of which is completely inside the other, is a constant, i.e. independent of the location of the inner sphere.

Keywords: full, conditional realized, unrealized, stored, electrostatic energy, homonymous, unlike charges.

Введение. Потенциальная электростатическая энергия электрических зарядов определяется как

$$U = \pm \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}.$$

При $r \to 0$ энергия стремится к бесконечности, что нехорошо. Возможные попытки спасти положение рассуждениями о невозможности достижения $r = 0$ в связи с конечными размерами заряженных объектов, не продуктивны, поскольку считается, что, например, у электронов и позитронов размеров нет [1].

Цель исследования: повышение корректности электростатических расчетов, исключающей возможность получения недостоверных результатов в виде бесконечно большой энергии.

Актуальность работы обусловлена значительным повышением роли электростатической энергии в связи с началом массового производства ионисторов, используемых, в частности, в электромобилях, и необходимостью в связи с этим развития теоретического обеспечения [2–10].

Понятие о запасаемой энергии

Определение 1. Полная запасаемая энергия E_e – это энергия системы или объекта, равная максимальной работе, которую система или объект может совершить, если ей или ему предоставить такую возможность.

Замечание 1. Система или объект с нулевой полной запасаемой энергией не может свершить никакую работу.

Замечание 2. Система из двух разноименно заряженных сфер имеет нулевую полную запасаемую электростатическую энергию при совмещении их центров.

Последнее возможно, если сферы являются взаимно проникающими, например, несплошными [11, 12]. Кроме того, заряды не должны перемещаться по поверхностям сфер.

Замечание 3. Система из двух одноименно заряженных сфер имеет нулевую полную запасаемую электростатическую энергию при бесконечно большом расстоянии между сферами.

Потенциальная энергия пружины, энергия конденсатора [13, 14], энергия соленоида [15], энергия покоя

$$\Pi = \frac{k\left(\Delta l\right)^2}{2},\ W = \frac{CU^2}{2},\ W = \frac{LI^2}{2},\ E_0 = mc^2 \qquad (1)$$

и другие виды энергии удовлетворяют определению 1.

Кинетическая энергия не включена в приведенный выше список не случайно. Для нее дело обстоит несколько сложнее, поскольку скорость зависит от произвольного выбора системы отсчета, в результате чего формульное значение энергии может сколь угодно (произвольно) возрастать без совершения какой-либо работы.

Полная запасаемая кинетическая энергия системы двух тел [16–18] определяется как

$$E_{e1-2} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\frac{v}{2}.\ \text{При}\ m_1 \geq m_2\quad E_{e1-2} \approx \frac{m_2 v^2}{2}. \qquad (2)$$

Определение 2. Условная *реализуемая* запасаемая энергия E_r – это часть полной запасаемой энергии системы или объекта, равная работе, которую система или объект *может* совершить, ограниченная условием, исключающим возможность совершения системой или объектом максимальной работы, которую система или объект гипотетически может совершить.

Определение 3. Условная *нереализуемая* запасаемая энергия E_n – это часть полной запасаемой энергии системы или объекта, равная работе, которую система или объект *не может* совершить, ограниченная условием, исключающим возможность совершения системой или объектом максимальной работы, которую система или объект гипотетически может совершить.

Из определений 1–3 следует:

$$E_r + E_n = E_e. \qquad (3)$$

Потенциальная гравитационная энергия тела, находящегося на высоте h над поверхностью Земли $\Pi = mgh$, удовлетворяет определению 2.

Потенциальная электростатическая энергия одноименных зарядов

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{1\pm}q_{2\pm}}{r}$$

удовлетворяет определению 1.

Потенциальная электростатическая энергия разноименных зарядов

$$U = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{1\pm}q_{2\mp}}{r}$$

не удовлетворяет обоим определениям, поскольку такую работу сама система совершить не может.

Теорема 1. Запасаемая энергия всегда положительна.

Доказательство. Совершаемая системой работа равна уменьшению энергии системы (не обязательно потенциальной):

$$A = E_1 - E_2 .$$

$$E_1 > E_2 \Rightarrow E_1 - E_2 > E_2 - E_2 \Rightarrow A = E > 0.$$

Теорема доказана.

Пусть далее $r \geq r_1 + r_2$, $r_2 \geq r_1$.

Разноименные заряды

Теорема 2. Условная реализуемая запасаемая электростатическая энергия двух взаимно не проникающих разноименно заряженных сфер определяется по формуле

$$E_r = \frac{q_{1\pm}q_{2\mp}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r-(r_1+r_2)}{r(r_1+r_2)},$$

где r – расстояние между центрами сфер, r_1, r_2 – радиусы сфер.

Доказательство. Поскольку сферы взаимно не проникающие, наибольшая работа, которую система может совершить, – это сблизить сферы до соприкосновения, т.е. до расстояния между центрами равного $r_1 + r_2$.

$$E_r = A_c = \Pi_1 - \Pi_2 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{1\pm}q_{2\mp}}{r} - \left(-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{1\pm}q_{2\mp}}{r_1+r_2}\right) =$$

$$= \frac{q_{1\pm}q_{2\mp}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1+r_2} - \frac{1}{r}\right) = \frac{q_{1\pm}q_{2\mp}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r-(r_1+r_2)}{r(r_1+r_2)}.$$

Теорема доказана.

Следствие 2.1. При $r = r_1 + r_2$, т.е. при соприкосновении сфер условная реализуемая запасаемая электростатическая энергия равна нулю.

Теорема 3. Полная запасаемая электростатическая энергия двух разноименно заряженных сфер

$$E_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{1\pm}q_{2\mp}}{r_2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{1\pm}q_{2\mp}}{r}. \tag{4}$$

Доказательство. Работа, совершаемая электростатическими силами при соединении бесконечно удаленных одноименно заряженных частиц в однородную сферу радиуса r_1 (и r_2), по абсолютной величине равна энергии электростатического поля сферы:

$$-A_1 = E_1 = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q_1^2}{r_1}, \tag{5}$$

$$-A_2 = E_2 = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q_2^2}{r_2}. \tag{6}$$

Знак «–» указывает на возрастание запасаемой энергии. Другими словами, работу совершают сторонние силы.

Работа, совершаемая электростатическими силами при соединении сфер из бесконечности до расстояния r между ними, определяется как

$$A_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{1\pm}q_{2\mp}}{r}.$$

Энергия поля системы из двух сфер, центры которых совмещены, состоит из двух частей.

Энергия поля во внешнем пространстве по отношению к сфере радиуса r_2

$$E_{2-\infty} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{\left(q_2 - q_1\right)^2}{r_2}. \tag{7}$$

Дифференциал энергии поля в пространстве между сферами

$$dE_{1-2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0}dV = \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{4\pi}\frac{q_1}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q_1^2}{r^2}dr.$$

где D – электрическое смещение, dV – элементарный объем.

Энергия в пространстве между сферами

$$E_{1-2} = \int_{r_1}^{r_2} dE_{1-2} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q_1^2}{r^2}dr = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q_1^2}{r}\bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{q_1^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right).$$

Энергия поля системы из двух сфер, центры которых совмещены,

$$E_0 = -A_0 = E_{1-2} + E_{2-\infty} = \frac{q_1^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) + \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{(q_2-q_1)^2}{r_2} =$$

$$= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1^2}{r_1}-\frac{q_1^2}{r_2}+\frac{q_2^2}{r_2}-\frac{2q_1q_2}{r_2}+\frac{q_1^2}{r_2}\right) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1^2}{r_1}+\frac{q_2^2}{r_2}-\frac{2q_1q_2}{r_2}\right).$$

Замечание 4. Пусть $r_2 = \alpha r_1$, $q_2 = \beta q_1$.

$$E_0 = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1^2}{r_1}+\frac{\beta^2 q_1^2}{\alpha r_1}-\frac{2\beta q_1 q_1}{\alpha r_1}\right),$$

$$\frac{q_1^2}{r_1}+\frac{\beta^2 q_1^2}{\alpha r_1}-\frac{2\beta q_1 q_1}{\alpha r_1} = 0,$$

$$\beta^2 - 2\beta + \alpha = 0,$$

$$\beta = 1 \pm \sqrt{1-\alpha}.$$

Это решение показывает, что $E_0 \ge 0$, причем $E_0 = 0$ при $\alpha = \beta = 1$.

Замечание 5. При $r_1 = r_2$

$$E_0 = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1^2}{r_1}+\frac{q_2^2}{r_1}-\frac{2q_1q_2}{r_1}\right) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{(q_2-q_1)^2}{r_1},$$

что согласуется с (5), (6) и (7).

Замечание 6. При $r_1 = r_2$, $q_1 = q_2$

$$E_0 = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{(q_1-q_1)^2}{r_1} = 0.$$

Замечание 7. При $q_1 = q_2$

$$E_0 = E_{1-2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right).$$

Замечание 8. При $r_1 = r_2$, $q_1 = q_2$

$$A_{\infty 0} = 2E_1 - E_0 = 2E_1. \tag{8}$$

Очевидно, что искомая полная запасаемая электростатическая энергия определяется как следующая разность [19, 20]:

$$E_e = A_e = A_0 - A_1 - A_2 - A_r =$$

$$= -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1^2}{r_1} + \frac{q_2^2}{r_2} - \frac{2q_1q_2}{r_2}\right) + \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q_1^2}{r_1} + \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q_2^2}{r_2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r} =$$

$$= \frac{q_{1\pm}q_{2\mp}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r}\right).$$

Теорема доказана.

Следствие 3.1. При $r = \infty$

$$E_{e\infty} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_2}. \tag{9}$$

Следствие 3.2. При $r = r_1 + r_2$, т.е. при соприкосновении сфер полная запасаемая электростатическая энергия двух разноименно заряженных сфер равна условной нереализуемой запасаемой электростатической энергии:

$$E_{e1-2} = E_{n1-2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{1\pm}q_{2\mp}}{r_2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{1\pm}q_{2\mp}}{r_1 + r_2}. \tag{10}$$

Это вытекает из (3) и следствия 2.1.

Следствие 3.3.

$$E_e - E_{e1-2} = E_r.$$

Действительно,

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{1\pm}q_{2\mp}}{r_2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{1\pm}q_{2\mp}}{r} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{1\pm}q_{2\mp}}{r_2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{1\pm}q_{2\mp}}{r_1 + r_2} =$$

$$= \frac{q_{1\pm}q_{2\mp}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r - (r_1 + r_2)}{r(r_1 + r_2)}.$$

Следствие 3.4. При $r_1 = r_2,\ r = 2r_1$

$$E_{e1-1} = E_{n1-1} = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{1\pm}q_{2\mp}}{2r_1} = 0,5\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_1}. \tag{11}$$

Следствие 3.5. При $r_1 = r_2,\ r = \infty$

$$E_{e\infty} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{1\pm}q_{2\mp}}{r_1}. \tag{12}$$

Следствие 3.6. При $r_1 = r_2$, $r = \infty$, $q_1 = q_2$

$$E_{e\infty} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_1}{r_1} = 2\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q_1^2}{r_1} = 2E_1 . \qquad (13)$$

Эта энергия равна работе, совершаемой электростатическими силами при сближении двух идентичных разноименно заряженных сфер из бесконечности до нулевого расстояния между их центрами.

При бесконечном расстоянии между зарядами полная запасаемая электростатическая энергия двух разноименно заряженных сфер максимальна, в отличие от потенциальной энергии, которая бездоказательно принимается равной нулю.

Следствие 3.7. При $r = 0$

$$E_{e0} = 0 ,$$

в отличие от потенциальной энергии, которая принимает бесконечно большое значение, что не имеет никакого смысла и прямо указывает на несправедливость формулы.

Следствие 3.8.

$$A_{\infty 1-1} = E_{e\infty} - E_{n1-1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{1\pm}q_{2\mp}}{r_1} - 0,5\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{1\pm}q_{2\mp}}{r_1} = 0,5\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{1\pm}q_{2\mp}}{r_1} . \qquad (14)$$

Следствие 3.9. При $r_1 = r_2$, $q_1 = q_2$

$$A_{\infty 1-1} = E_1 . \qquad (15)$$

Одноименные заряды

Теорема 4. Полная запасаемая электростатическая энергия двух одноименно заряженных разделенных сфер определяется как

$$E_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{1\pm}q_{2\pm}}{r} . \qquad (16)$$

Она совпадает с потенциальной энергией одноименных зарядов вне пространства шаров.

Доказательство тривиально.

Следствие 4.1. При $r = r_1 + r_2$, т.е. при соприкосновении сфер полная запасаемая электростатическая энергия двух одноименно заряженных сфер определяется как

$$E_{e1-2} = E_{r1-2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{1\pm}q_{2\pm}}{r_1 + r_2} .$$

Следствие 4.2. При $r_1 = r_2$

$$E_{e1-1} = E_{r1-1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_1 + r_1} = 0,5\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_1}.$$

(Совпадает с (14))

Следствие 4.3. При $r_1 = r_2$, $q_1 = q_2$

$$E_{e1-1} = E_{r1-1} = E_1.$$

(Совпадает с (15))

Теорема 5. Полная запасаемая электростатическая энергия двух одноименно заряженных сфер при нулевом расстоянии между их центрами определяется как

$$E_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{1\pm} q_{2\pm}}{r_2}. \qquad (17)$$

(Совпадает с (7))

Доказательство. Применительно к рассматриваемому случаю аналоги выражений, полученных при доказательстве теоремы 3, принимают вид:

$$E_{2-\infty} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{(q_2 + q_1)^2}{r_2},$$

$$E_0 = -A_0 = E_{1-2} + E_{2-\infty} = \frac{q_1^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{(q_2 + q_1)^2}{r_2} =$$

$$= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1^2}{r_1} - \frac{q_1^2}{r_2} + \frac{q_2^2}{r_2} + \frac{2q_1 q_2}{r_2} + \frac{q_1^2}{r_2}\right) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1^2}{r_1} + \frac{q_2^2}{r_2} + \frac{2q_1 q_2}{r_2}\right).$$

Замечание 9. $E_0 > 0$.

Замечание 10. При $r_1 = r_2$

$$E_0 = -A_0 = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1^2}{r_1} + \frac{q_2^2}{r_1} + \frac{2q_1 q_2}{r_1}\right) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{(q_1 + q_2)^2}{r_1},$$

что согласуется с (5), (6) и (7).

Замечание 11. При $r_1 = r_2$, $q_1 = q_2$

$$E_0 = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{(q_1 + q_1)^2}{r_1} = 4\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q_1^2}{r_1} = 4E_1.$$

Замечание 12. При $r_1 = r_2,\ q_1 = q_2$

$$A_{0\infty} = E_0 - 2E_1 = 2E_1 .$$

(Совпадает с (8)).

Очевидно, что искомая полная запасаемая электростатическая энергия двух одноименно заряженных сфер при нулевом расстоянии между их центрами определяется как следующая разность:

$$E_e = E_0 - E_1 - E_2 =$$

$$= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1^2}{r_1} + \frac{q_2^2}{r_2} + \frac{2q_1q_2}{r_2}\right) - \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q_1^2}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2^2}{r_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_2} .$$

Теорема доказана.

Следствие 5.1. При $r_1 = r_2,\ q_1 = q_2$

$$E_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_1}{r_1} = 2\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q_1^2}{r_1} = 2E_1 .$$

(Совпадает с (13))

Эта энергия равна работе, совершаемой электростатическими силами при удалении двух идентичных одноименно заряженных сфер от нулевого расстояния между их центрами до бесконечности.

При нулевом расстоянии между центрами зарядов полная запасаемая электростатическая энергия двух одноименно заряженных сфер максимальна, но конечна, в отличие от потенциальной энергии, которая принимает бесконечно большое значение.

Следствие 5.2. Условная нереализуемая запасаемая энергия двух разноименно заряженных сфер

$$E_{n1-2} = E_e - E_{r1-2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_1 + r_2} .$$

(Совпадает с (10)). Это вытекает из (3)

Следствие 5.3. При $r_1 = r_2,\ r = 2r_1$

$$E_{n1-1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_1 + r_1} = 0,5\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_1} .$$

(Совпадает с (11)).

Любая комбинация зарядов

Теорема 6. Энергия поля системы из двух заряженных сфер, одна из которых полностью находится внутри другой, есть величина постоянная, т.е. не зависит от местоположения внутренней сферы.

Доказательство. Внутри внешней сферы напряженность поля, созданного ее зарядами, равна нулю. Следовательно, сила взаимодействия между сферами равна нулю. Поэтому работа по любому перемещению внутренней сферы во внутреннем пространстве внешней сферы равна нулю. Соответственно равно нулю изменение энергии поля системы из двух сфер.

Теорема доказана.

Следствие 6.1. Энергия поля системы из двух заряженных сфер при расстоянии между их центрами, равном $r_2 - r_1$, такая же, как при совмещении центров.

Выводы. Энергетика разноименных зарядов имеет различия и сходства с энергетикой одноименных зарядов.

Минимальная энергия поля одноименных идентичных зарядов равна максимальной энергия поля разноименных зарядов,

$$E_{\min \infty \pm\pm} = E_{\max \infty \pm\mp} = 2E_1 .$$

Максимальная энергия поля одноименных идентичных зарядов вдвое превышает максимальную энергию поля разноименных зарядов,

$$E_{\max 0 \pm\pm} = 2E_{\max \infty \pm\mp} = 4E_1 .$$

В то же время работа электростатического поля по сближению разноименных идентичных зарядов из бесконечности до совмещения их центров равна работе поля по противоположному разнесению одноименных зарядов,

$$A_{\infty 0 \pm\mp} = A_{0 \infty \pm\pm} = 2E_1 .$$

Для одноименных зарядов вне их внутреннего пространства полная запасаемая электростатическая энергия совпадает с потенциальной энергией.

Однако полная запасаемая электростатическая энергия при совмещении центров одноименно заряженных сфер вдвое превышает потенциальную энергию соприкасающихся сфер:

$$\frac{E_{0e}}{E_{e1-1}} = \frac{2E_1}{E_1} = 2.$$

Строго говоря, под потенциальной энергией понимают величину

$$\Pi = C - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{1\pm}q_{2\mp}}{r} ,$$

где C – аддитивная постоянная, которая принята равной нулю, что оправданно для одноименных зарядов и совершенно бездоказательно обобщено на разноименные заряды, что не дает представления о запасенной энергии в системе разноименных зарядов.

Если теперь уже не бездоказательно для разноименных зарядов принять

$$C = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}, \qquad \text{т} \tag{18}$$

то потенциальная энергия разноименных зарядов превратится в полную запасаемую электростатическую энергиию (4), что поднимет ее смысловой статус до уровня выражений (1), (2), (16) и (17).

Аддитивная постоянная (18) представляет собой полную запасаемую электростатическую энергию двух одноименно заряженных сфер при нулевом расстоянии между их центрами (17).

Полученная формула для полной запасаемой электростатической энергии разноименных зарядов может использоваться в качестве формулы для их потенциальной энергии.

Главным недостатком существующей формулы потенциальной энергии является бесконечно большое возрастание энергии при $r \to 0$. Этого недостатка лишены полученные формулы для запасаемой электростатической энергии.

Библиографический список

1. Popov I.P. The size of the electron with spin // Engineering physics. – 2016. – No. 9. – P. 45–46.

2. Караян Г.С., Гандилян С.В. Тенденции развития совмещенных магнито-электроиндукционных электромеханических преобразователей энергии // Вестник МЭИ. – 2018. – № 2. – С. 65–71. DOI: 10.24160/1993-6982-2018-2-65-71

3. Кузнецова Т.А. Алгоритмы анализа электрических полей кабелей постоянного тока в составе САУ ГТД // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Электротехника, информационные технологии, системы управления. – 2018. – № 25. – С. 23–35.

4. Труфанова Н.М., Бородулина К.В., Дятлов И.Я. Математическое моделирование зависимости напряженности электрического поля на проводах воздушной линии от параметров расщепления // Вестник

Пермского национального исследовательского политехнического университета. Электротехника, информационные технологии, системы управления. – 2018. – № 27. – С. 128–138.

5. Ковригин Л.А., Ситчихин Н.А. Исследование экранирующих свойств плетенок в стационарном электрическом поле // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Электротехника, информационные технологии, системы управления. – 2012. – № 6. – С. 93–97.

6. Двухчастичная матрица плотности и псевдопотенциал электрон-протонного взаимодействия для ультранизких температур / М.А. Бутлицкий, Б.Б. Зеленер, Б.В. Зеленер, Э.А. Маныкин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48. – № 1. – С. 154–158.

7. Тебер С., Котиков А.В. Эффекты электрон-электронного взаимодействия в планарных жидкостях Дирака // ТМФ. – 2019. – Т. 200. – № 2. – С. 343–360. – URL: https://doi.org/10.4213/tmf9678

8. Незнамов В.П., Сафронов И.И. Стационарные решения уравнения второго порядка для фермионов во внешнем кулоновском поле // ЖЭТФ. – 2019. – Т. 155. – № 5. – С. 792–805. DOI: 10.1134/S0044451019050031

9. Динамические свойства двумерного плотного электронного газа / М.Т. Кейкиманова, Г.И. Муратова, Р.Ж. Наметкулова, М.Н. Сарыбеков, И.М. Ткаченко // ЖЭТФ. – 2019. – Т. 155. – № 6. – С. 1098–1106. DOI: 10.1134/S0044451019060142

10. Попов И.П. Диэлектрическое сопротивление и аналог закона Ома для цепи потока электрического смещения // Сб. науч. трудов аспир. и соискат. Курган. гос. ун-та. – 2010. – Вып. XII. – С. 19–20.

11. Popov I.P. Combined vectors and magnetic charge // Applied Physics and Mathematics. – 2018. – No. 6. – P. 12–20. DOI: 10.25791/pfim.06.2018.329

12. Popov I.P. Mathematical modeling of the formal analogy of electromagnetic field // Applied mathematics and control sciences. – 2016. – No. 4. – P. 36–60.

13. Щербаков А.В. Импульсный высоковольтный модулятор с частичным разрядом емкостного накопителя // Вестник МЭИ. – 2017. – № 1. – С. 50–57.

14. Попов И.П., Сарапулов Ф.Н., Сарапулов С.Ф. Емкостно-емкостная колебательная система // Вестник Курган. гос. ун-та. Технические науки. – 2014. – Вып. 9.– № 2(33). – С. 21–23.

15. Смирнов Д.С. Удельная мощность силовых индуктивностей и емкостей // Вестник МЭИ. – 2017. – № 2. – С. 82–87.

16. Popov I.P. Calculated reference systems for relative motion of space objects // Engineering physics. – 2019. – No. 3. – P. 40–43. DOI: 10.25791/infizik.03.2019.564

17. Popov I.P. Reference Systems in the Navigation of Moving Objects // Mechatronics, Automation, Control. – 2019. – Vol. 20. – No. 3. – P. 189–192. – URL: https://doi.org/10.17587/mau.20.189-192

18. Попов И.П. «Уникальные» системы отсчета // Вестник Калуж. ун-та. – 2019. – № 1. – С. 67–69.

19. Popov I.P. Modeling of objects in the form of superposition of states // Applied mathematics and control sciences. – 2015. – No. 2. – P. 18–27.

20. Попов И.П. Суперпозиция граничных состояний макрообъектов // Вести высших учебных заведений Черноземья. – 2015. – № 2. – С. 43–47.

References

1. Popov I.P. The size of the electron with spin. *Engineering physics*, 2016, no. 9, pp. 45-46.

2. Karaian G.S., Gandilian S.V. Tendentsii razvitiia sovmeshchennykh magnito-elektroinduktsionnykh elektromekhanicheskikh preobrazovatelei energii [Development trends of combined magneto-electric induction electromechanical energy converters]. *Vestnik Moskovskogo energeticheskogo instituta*, 2018, no 2, pp. 65-71. DOI: 10.24160/1993-6982-2018-2-65-71

3. Kuznetsova T.A. Algoritmy analiza elektricheskikh polei kabelei postoiannogo toka v sostave SAU GTD [Algorithms for the analysis of the electric fields of DC cables as part of the ACS GTE]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Elektrotekhnika, informatsionnye tekhnologii, sistemy upravleniia*, 2018, no. 25, pp. 23-35.

4. Trufanova N.M., Borodulina K.V., Diatlov I.Ia. Matematicheskoe modelirovanie zavisimosti napriazhennosti elektricheskogo polia na provodakh vozdushnoi linii ot parametrov rasshchepleniia [Mathematical modeling of the dependence of the electric field on the wires of the overhead line on the splitting parameters]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo*

issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Elektrotekhnika, informatsionnye tekhnologii, sistemy upravleniia. 2018, no. 27, pp. 128-138.

5. Kovrigin L.A., Sitchikhin N.A. Issledovanie ekraniruiushchikh svoistv pletenok v statsionarnom elektricheskom pole [The study of the shielding properties of braids in a stationary electric field]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Elektrotekhnika, informatsionnye tekhnologii, sistemy upravleniia*, 2012, no. 6, pp. 93-97.

6. Butlitskii M.A., Zelener B.B., Zelener B.V., Manykin E.A. Dvukhchastichnaia matritsa plotnosti i psevdopotentsial elektron-protonnogo vzaimodeistviia dlia ul'tranizkikh temperatur [Two-particle density matrix and pseudopotential of electron-proton interaction for ultra-low temperatures]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*, 2008, vol. 48, no. 1, pp. 154-158.

7. Teber S., Kotikov A.V. Effekty elektron-elektronnogo vzaimodeistviia v planarnykh zhidkostiakh Diraka [Effects of electron-electron interaction in Dirac planar fluids]. *Teoreticheskaia i matematicheskaia fizika*, 2019, vol. 200, no. 2, pp. 343-360, available at: https://doi.org/10.4213/tmf9678

8. Neznamov V.P., Safronov I.I. Statsionarnye resheniia uravneniia vtorogo poriadka dlia fermionov vo vneshnem kulonovskom pole [Stationary solutions of the second order equation for fermions in an external Coulomb field]. *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki*, 2019, vol. 155, no. 5, pp. 792-805. DOI: 10.1134/S0044451019050031

9. Keikimanova M.T., Muratova G.I., Nametkulova R.Zh., Sarybekov M.N., Tkachenko I.M. Dinamicheskie svoistva dvumernogo plotnogo elektronnogo gaza [Dynamic properties of a two-dimensional dense electron gas]. *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki*, 2019, vol. 155, no. 6, pp. 1098-1106. DOI: 10.1134/S0044451019060142

10. Popov I.P. Dielektricheskoe soprotivlenie i analog zakona Oma dlia tsepi potoka elektricheskogo smeshcheniia [Dielectric resistance and an analogue of Ohm's law for an electric bias flow circuit]. *Sbornik nauchnykh trudov aspirantov i soiskatelei Kurganskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2010, iss. XII, pp. 19-20.

11. Popov I.P. Combined vectors and magnetic charge. *Applied Physics and Mathematics*, 2018, no. 6, pp. 12-20. DOI: 10.25791/pfim.06.2018.329

12. Popov I.P. Mathematical modeling of the formal analogy of electromagnetic field. *Applied mathematics and control sciences*, 2016, no. 4, pp. 36-60.

13. Shcherbakov A.V. Impul'snyi vysokovol'tnyi moduliator s chastichnym razriadom emkostnogo nakopitelia [Pulse high-voltage modulator with partial discharge of a capacitive storage]. *Vestnik Moskovskogo energeticheskogo instituta*, 2017, no. 1, pp. 50-57.

14. Popov I.P., Sarapulov F.N., Sarapulov S.F. Emkostno-emkostnaia kolebatel'naia sistema [Capacitive-capacitive oscillatory system]. *Vestnik Kurganskogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki*, 2014, iss. 9, no. 2(33), pp. 21-23.

15. Smirnov D.S. Udel'naia moshchnost' silovykh induktivnostei i emkostei [Power density inductance and capacitance]. *Vestnik Moskovskogo energeticheskogo instituta*, 2017, no. 2, pp. 82-87.

16. Popov I.P. Calculated reference systems for relative motion of space objects. *Engineering physics*, 2019, no. 3, pp. 40-43. DOI: 10.25791/infizik.03.2019.564

17. Popov I.P. Reference Systems in the Navigation of Moving Objects. *Mechatronics, Automation, Control*, 2019, vol. 20, no. 3, pp. 189-192, available at: https://doi.org/10.17587/mau.20.189-192

18. Popov I.P. "Unikal'nye" sistemy otscheta ["Unique" reference systems]. *Vestnik Kaluzhskogo universiteta*, 2019, no. 1, pp. 67-69.

19. Popov I.P. Modeling of objects in the form of superposition of states. *Applied mathematics and control sciences*, 2015, no. 2, pp. 18-27.

20. Popov I.P. Superpozitsiia granichnykh sostoianii makroob"ektov [Superposition of the boundary states of macro-objects]. *Vesti vysshikh uchebnykh zavedenii Chernozem'ia*, 2015, no. 2, pp. 43-47.

Сведения об авторе

Попов Игорь Павлович (Курган, Россия) – старший преподаватель кафедры «Технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты» Курганского государственного университета (640020, Курган, ул. Советская, 63/4, e-mail: ip.popow@yandex.ru).

About the author

Popov Igor Pavlovich (Kurgan, Russian Federation) is a Senior Lecturer of the Department "Technology of mechanical engineering, machine tools and instruments" Kurgan State University (640020, Kurgan, 63/4, Sovetskaya str., e-mail: ip.popow@yandex.ru).

Получено 27.01.2020