УДК 519.83

И.А. Седых, А.И. Ворфоломеева

Липецкий государственный технический университет, Липецк, Россия

НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО АССОРТИМЕНТА МАГАЗИНОВ НА ОСНОВЕ БИМАТРИЧНЫХ ИГР

В работе дано понятие биматричной игры, приведены определение ситуации равновесия, а также условие нахождения смешанных стратегий, составляющих ситуацию равновесия. Приведен алгоритм Лемке для решения биматричных игр с заданными платежными матрицами. Особенностью данного алгоритма является замена переменной, выводимой из базиса на соответствующее ей дополнение. Рассмотрена актуальная задача получения максимальной прибыли двумя конкурирующими магазинами при реализации кондитерских товаров, заказанных у одного поставщика. Показана сравнительная характеристика магазинов по нескольким критериям. Целью работы является нахождение оптимального количества ассортимента кондитерских изделий двух магазинов для получения ими максимальной средней прибыли. На основе мнения экспертов о приоритетах магазинов и их ассортимента, а также исходных данных по закупочным ценам товаров и величине наценки на них составлены платежные матрицы прибылей магазинов. Мнение экспертов послужило основным условием для формирования биматричной игры с заданными матрицами, при решении которой были найдены оптимальные смешанные стратегии реализации товаров на основе алгоритма Лемке. Размерность исходных матриц была изменена с помощью вычеркивания строк и столбцов, соответствующих доминируемым стратегиям игроков. Полученные в результате сокращения матрицы выигрышей игроков приводятся к эквивалентному виду, необходимому для составления начальной симплекс-таблицы алгоритма Лемке. Далее по правилам симплекс-метода осуществляется пересчет таблиц до нахождения оптимального решения по алгоритму Лемке. Результаты работы имеют реальное практическое значение, могут быть использованы для поиска оптимального решения для двух конкурирующих сторон в конфликтных ситуациях.

Ключевые слова: биматричные игры, оптимальные смешанные стратегии, алгоритм Лемке.

I.A. Sedykh, A.I. Vorfolomeeva

Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation

FINDING THE OPTIMAL ASSORTMENT OF STORES BASED ON BIMATRIX GAMES

Abstract. In this paper, the concept of the bimatrix game is given, the definition of the equilibrium situation is given, as well as the condition for finding mixed strategies that make up the equilibrium situation. The Lemke algorithm for solving bimatrix games with given payment matrices is given. A special feature of this algorithm is the replacement of a variable derived from the basis by its complement. The actual task of obtaining the maximum profit by two competing shops when selling confectionery products ordered from one supplier is considered. Comparative characteristics of stores are shown by several criteria. The aim of the work is to find the optimal number of assortment of confectionery products of two stores to obtain the maximum average profit. Based on the opinion of experts on the priorities of stores and their assortment, as well as the initial data on the purchase prices of goods and the amount of mark-up on them, payment matrixes of store profits are drawn up. The opinion of the experts served as the main condition for the formation of a bimatrix game with given matrices, in the solution of which the optimal mixed strategies for selling goods were found on the basis of the Lemke algorithm. The size of the original matrices was changed by deleting rows and columns corresponding to the dominant strategies of the players. The resulting reduction in the payoff matrix of the players is reduced to the equivalent form necessary to compile the initial simplex table of the Lemke algorithm. Further, according to the rules of the simplex method, tables are recalculated to find the optimal solution by the Lemke algorithm. The results of the work are of real practical importance, they can be used to find the optimal solution for two competing parties in conflict situations.

Keywords: bimatrix games, optimal mixed strategies, Lemke algorithm.

Введение. Общество постоянно сталкивается с проблемой правильного принятия решений [1–4] в той или иной ситуации, и каждый стремится к такому решению, которое даст наилучший результат. В любой управленческой деятельности возникают конфликтные ситуации, в которых затрагиваются интересы двух или более сторон, например, взаимоотношения между покупателем и продавцом.

Для правильного принятия решений в таких ситуациях применяется теория игр [5–9], которая представляет собой теоретические основы математических моделей принятия оптимальных решений в конфликтных ситуациях, носящих характер конкурентной борьбы, в которых одна сторона выигрывает за счет другой. Одним из разделов теории игр [10–12] являются биматричные игры, рассматриваемые в данной работе.

1. Биматричные игры. Основные понятия. Биматричной называется конечная игра двух лиц с ненулевой суммой, при этом интересы игроков не являются полностью противоположными [13–14].

Биматричная игра полностью определяется двумя матрицами A и B:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

где матрица A – это платежная матрица первого игрока, B – платежная матрица второго игрока [15]. Первый игрок имеет m стратегий, второй игрок – n стратегий. Иногда биматричные игры записывают в виде одной матрицы.

Пара смешанных стратегий (p, q) составляет ситуацию равновесия в биматричной игре тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$\begin{cases} Aq \le \left(p^T Aq\right) 1_m \ , \\ B^T p \le \left(p^T Bq\right) 1_n \ , \\ \sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1 \ ; \ \sum\limits_{j=1}^{n} q_j = 1 \ , \\ p_i \ge 0 \ ; \ \ i = 1,\ldots,m \ , \\ q_j \ge 0 \ ; \ j = 1,\ldots,n \ , \end{cases} \tag{1}$$

где 1_m – это вектор размера m, все компоненты которого равны 1.

Теорема (условия дополняющей нежесткости): все решения (p,q) системы неравенств удовлетворяют следующим условиям [16]:

$$\begin{aligned} & p_i\left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{kl} p_k q_l - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j\right) = 0, \ i = 1,\ldots,m, \\ & q_j\left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} b_{kl} p_k q_l - \sum_{i=1}^{m} b_{ij} p_i\right) = 0, \ j = 1,\ldots,n. \end{aligned} \tag{2}$$

Приводим первые два неравенства системы (1) к каноническому виду:

$$\begin{cases} Aq + s = \left(p^T Aq\right) 1_m, \\ B^T p + t = \left(p^T Bq\right) 1_n, \end{cases} \tag{3}$$

где $s \in R_+^m$; $t \in R_+^n$. Система (3) преобразуется к виду (4), а затем к (5):

$$\begin{cases} A\left(\dfrac{q}{-p^T Aq}\right) + \dfrac{s}{-p^T Aq} = \ -1_m, \\ B^T\left(\dfrac{p}{-p^T Bq}\right) + \dfrac{t}{-p^T Bq} = \ -1_n, \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} Ay + u = -1_m, \\ B^T x + v = -1_n, \end{cases} \tag{5}$$

где $y = \dfrac{q}{-p^T Aq}$; $x = \dfrac{p}{-p^T Bq}$; $u = \dfrac{s}{-p^T Aq}$; $v = \dfrac{t}{-p^T Bq}$. Заметим, что x, y, u, v должны удовлетворять условиям (6), в которые преобразуется система (2):

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0, \qquad (6)$$

где u, v – дополнения для x, y соответственно.

Рассмотрим алгоритм Лемке для решения биматричной игры с заданными матрицами A и B размерностью $m \times n$.

1. По элементам матрицы A находим константу d_1, по элементам матрицы B – d_2 по соответствующим формулам: $d_1 = \max\limits_{i,j}\left\{\left|a_{ij}\right|\right\} + 1$; $d_2 = \max\limits_{i,j}\left\{\left|b_{ij}\right|\right\} + 1$.

2. Осуществляем переход от матриц A и B к матрицам A_1 и B_1, где $A_1 = A - d_1 E$; $B_1 = B - d_2 E$; E – матрица размерности $m \times n$, составленная из единиц.

3. Выбираем начальные базисы $p^0(X) = \{u_1, \dots, u_m\}$, $q^0(Y) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Начальная симплекс-таблица имеет вид, как показано в табл. 1, где 1_k – это вектор размера k, все компоненты которого равны 1; I_m, I_n – единичные матрицы размерности m и n соответственно.

Таблица 1

Начальная симплекс-таблица

Базис	q	u	v	x	y
u	-1_m	I_n	0	0	A
v	-1_n	0	I_m	B^T	0

4. Вводим в базис переменную x_1. По правилам симплекс-метода осуществляем пересчет таблицы и выбираем переменную, которая выходит из базиса.

5. Переменную, выведенную из базиса на предыдущем шаге, заменяем на ее дополнение. Пересчитываем таблицу по правилам симплекс-метода. Дополнением к переменной x_i является u_i, $i = 1, \dots, m$,

и, наоборот; дополнением к переменной y_j является v_j, $j = 1, \ldots, n$ и наоборот.

6. Если в базисе вводимая переменная уже присутствует, то конец алгоритма. Иначе переходим к пункту 5 [17–18].

2. Постановка задачи. В микрорайоне находятся два магазина *A* и *B*. Магазин *B* реализует только кондитерские изделия, а в магазине *A* ассортимент товаров более разнообразный, небольшую часть которого составляют кондитерские изделия. Сравнительная характеристика магазинов приведена в табл. 2.

Таблица 2

Характеристика магазинов

	Магазин A	Магазин B
Площадь	50,0 кв. м	150,0 кв. м
График работы	с 8^{00} до 19^{00}	с 7^{00} до 21^{00}
Наценка	40 %	25 %
Ассортимент (кондитерские изделия)	10 наименований	30 наименований
Месторасположение	Спальный район, рядом школа и детский сад	Вблизи остановки, парковка для автомобилей
Обслуживание	% от продаж	Оклад
Количество продавцов	2	6

Для товароведов магазинов *A* и *B* поставлена задача – определить оптимальное количество ассортимента кондитерских изделий при многократных заказах товаров у одного поставщика, при реализации которых будет получена наибольшая средняя прибыль для каждого магазина. На основе мнения экспертов о приоритетах магазинов и их ассортименте, а также исходных данных по закупочным ценам товаров и величине наценки на них составляем платежные матрицы прибылей магазинов, сведенных в одну таблицу, фрагмент которой представлен в табл. 3.

Таблица 3

Фрагмент таблицы прибылей магазинов

	B1	B2	B3	⋯	B29	B30
A1	(0, 147)	(42, –47)	(–20, 23)	⋯	(–4; 4)	(–113; 127)
A2	(36, –41)	(58, –66)	(–4, 4)	⋯	(13; –15)	(–96; 108)
A3	(–6, 7)	(0, 122)	(–46, 52)	⋯	(–29; 33)	(–138; 156)

Окончание табл. 3

	B1	B2	B3	···	B29	B30
A4	(–3, 3)	(19, –22)	(–43, 48)	···	(–26; 29)	(–134; 152)
A5	(62, –70)	(84, –95)	(22, –25)	···	(39; –44)	(–70; 79)
A6	(–2, 2)	(20, –23)	(–42, 47)	···	(–25; 28)	(–134; 151)
A7	(68, –77)	(90, –102)	(28, –32)	···	(45; –51)	(–64; 72)
A8	(31, –35)	(53, –60)	(–9, 10)	···	(8; –9)	(–101; 114)
A9	(–49, 55)	(–27, 30)	(–89, 100)	···	(–72; 81)	(–181; 204)
A10	(12, –13)	(34, –38)	(–28, 32)	···	(–12; 13)	(–120; 136)

Заполнение матриц происходит, исходя из условия: при реализации одинаковой позиции товара магазин A предположительно получит нулевую прибыль, а магазин B получит максимальную прибыль, так как приоритет магазина A, по мнению экспертов, ниже приоритета магазина B . В табл. 3 прибыль выражена в условных единицах.

3. Нахождение оптимальных смешанных стратегий. Вычеркнув доминируемые стратегии [19] в исходных матрицах, в результате получаем сокращенные платежные матрицы, сведенные в одну таблицу (табл. 4).

Таблица 4

Платежные матрицы

	B8	B23	B30
A2	(–13, 15)	(–30, 34)	(–96, 108)
A5	(12, –14)	(0, 222)	(–70, 79)
A7	(0, 203)	(2, –2)	(–64, 72)

В данной игре нет равновесия в чистых стратегиях [20]. Будем искать равновесие в смешанных стратегиях с помощью алгоритма Лемке. Отняв 13 от всех выигрышей игрока A и 223 от всех выигрышей игрока B, получим эквивалентную игру со следующими матрицами выигрышей игроков:

$$A=\begin{bmatrix}-26 & -43 & -109\\ -1 & -13 & -83\\ -13 & -11 & -77\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}-208 & -189 & -115\\ -237 & -1 & -144\\ -20 & -225 & -151\end{bmatrix}.$$

Начальная симплекс-таблица для алгоритма Лемке приведена в табл. 5.

Таблица 5

Начальная симплекс-таблица (шаг 0)

Базис	q	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
u_1	–1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	–26	–43	–109
u_2	–1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	–1	–13	–83
u_3	–1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	–13	–11	–77
v_1	–1	0	0	0	1	0	0	–208	–237	–20	0	0	0
v_2	–1	0	0	0	0	1	0	–189	–1	–225	0	0	0
v_3	–1	0	0	0	0	0	1	–115	–144	–151	0	0	0

Вводим в базис переменную x_1. Вычисляем отношения Δ базисных значений к разрешающему столбцу (табл. 6).

Таблица 6

Шаг 1

Б	q	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	Δ
u_1	–1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	–26	–43	–109	–
u_2	–1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	–1	–13	–83	–
u_3	–1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	–13	–11	–77	–
v_1	–1	0	0	0	1	0	0	–208	–237	–20	0	0	0	0,005
v_2	–1	0	0	0	0	1	0	–189	–1	–225	0	0	0	0,005
v_3	–1	0	0	0	0	0	1	–115	–144	–151	0	0	0	0,008

Максимальное отношение Δ находится в строке v_3, которую объявляем ведущей. Выполняем операцию замещения и пересчет таблицы. Вводим в базис переменную y_3 (дополнение v_3). Вычисляем отношения Δ (табл. 7).

Таблица 7

Шаг 2

Б	q	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	Δ
u_1	–1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	–26	–43	–109	0,009
u_2	–1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	–1	–13	–83	0,012
u_3	–1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	–13	–11	–77	0,013
v_1	$\frac{93}{115}$	0	0	0	1	0	–1,81	0	23,45	253,1	0	0	0	–
v_2	$\frac{74}{115}$	0	0	0	0	1	–1,64	0	235,7	23,17	0	0	0	–
x_1	$\frac{1}{115}$	0	0	0	0	0	–0,01	1	1,25	1,313	0	0	0	–

Максимальное отношение Δ находится в строке u_3, которую объявляем ведущей. Выполняем операцию замещения и пересчет таблицы. Вводим в базис переменную x_3 (дополнение u_3). Вычисляем отношения Δ (табл. 8).

Таблица 8

Шаг 3

Б	q	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	Δ
u_1	$\frac{32}{77}$	1	0	–1,42	0	0	0	0	0	0	–7,6	–27,43	0	–
u_2	$\frac{6}{77}$	0	1	–1,08	0	0	0	0	0	0	13,01	–1,143	0	–
y_3	$\frac{1}{77}$	0	0	–0,01	0	0	0	0	0	0	0,17	0,143	1	–
v_1	$\frac{93}{115}$	0	0	0	1	0	–1,81	0	23,45	253,1	0	0	0	0,003
v_2	$\frac{74}{115}$	0	0	0	0	1	–1,64	0	235,7	23,17	0	0	0	0,028
x_1	$\frac{1}{115}$	0	0	0	0	0	–0,01	1	1,25	1,313	0	0	0	0,007

Дальнейший пересчет таблиц осуществляется аналогично.

В табл. 9 представлен 8-й шаг нахождения оптимального плана решаемой задачи.

Таблица 9

Шаг 8

Б	q	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
u_1	$\frac{205}{79}$	1	–1,73	–1,87	0	0	0	0	0	0	0	0	89,1
y_1	$\frac{1}{79}$	0	0,07	–0,08	0	0	0	0	0	0	1	0	0,56
y_2	$\frac{6}{79}$	0	–0,08	0,006	0	0	0	0	0	0	0	1	6,34
x_3	$\frac{2883}{971020}$	0	0	0	0,00002	–0,004	0	0,836	0	1	0	0	0
x_2	$\frac{592}{242755}$	0	0	0	–0,004	0,0004	0	0,807	1	0	0	0	0
v_3	$\frac{1693}{971020}$	0	0	0	–0,605	–0,617	1	127,5	0	0	0	0	0

Нужно вводить в базис переменную u_1 (дополнение x_1), но u_1 уже в базисе, следовательно, конец алгоритма.

Построен дополняющедопустимый базис. Решение задачи:

$$x^0 = \left(0; \frac{41}{10661}; \frac{236}{53305}\right)^T; \; y^0 = \left(\frac{1}{79}, \frac{6}{79}, 0\right)^T.$$

Найдем сумму элементов векторов x^0 и y^0:

$$x_2 + x_3 = \frac{41}{10661} + \frac{236}{53305} = \frac{63}{7615} \text{ и } y_1 + y_2 = \frac{1}{79} + \frac{6}{79} = \frac{7}{79}.$$

Решив задачи алгоритмом Лемке, получаем решение биматричной игры в смешанных стратегиях:

$$p^0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i} x^0 = \frac{7615}{63}\left(0; \frac{41}{10661}; \frac{236}{53305}\right)^T = \left(0; \frac{205}{441}; \frac{236}{441}\right)^T = (0; 0{,}465; 0{,}535) -$$

оптимальная смешанная стратегия магазина A;

$$q^0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} y_i} y^0 = \frac{79}{7}\left(\frac{1}{79}; \frac{6}{79}; 0\right)^T = \left(\frac{1}{7}; \frac{6}{7}; 0\right) = (0{,}143; 0{,}857; 0) \text{ – оптималь-}$$

ная смешанная стратегия магазина B.

С учетом доминируемых стратегий оптимальные смешанные стратегии магазинов A и B равны соответственно:

$$p^* = (0; 0; 0; 0; 0{,}465; 0; 0{,}535; 0; 0; 0);$$

$$q^* = \begin{pmatrix} 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0{,}143; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; \\ 0; 0; 0{,}857; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, магазин *A*, применяя оптимальные смешанные стратегии, получит дополнительную среднюю прибыль при продаже кондитерских изделий не менее $\gamma_A = 1{,}714$ условных единиц, а магазин B – не менее $\gamma_B = 102{,}127$ условных единиц.

Выводы. В работе даны основные понятия по теории биматричных игр, приведен алгоритм их решения в смешанных стратегиях. Сформулирована и решена задача нахождения оптимального количества ассортимента кондитерских изделий двух магазинов при заказе товара у одного поставщика, при реализации которого нужно получить наибольшую прибыль для каждого магазина. Мнение экспертов послужило основным условием для составления биматричной игры, при решении которой были найдены оптимальные смешанные стратегии реализации товаров по алгоритму Лемке.

Библиографический список

1. Седых И.А., Поздняков А.И. Решение нечеткой задачи принятия решений при выборе марки телефона // Вестник ЛГТУ. – 2016. – № 4(30). – С. 26–31.

2. Блюмин С.Л., Шуйкова И.А. Модели и методы принятия решений в условиях неопределенности. – Липецк: Изд-во ЛЭГИ, 2001. – 138 с.

3. Ворфоломеева А.И., Седых И.А. Применение теории принятия решений к выбору магазина на основе опроса экспертов // Физика и технологии. Тенденции развития современной науки: материалы науч. конф. студентов и аспирантов ЛГТУ. – Липецк: Изд-во ЛГТУ, 2018. – С. 49–51.

4. Губко М.В Лекции по принятию решений в условиях нечеткой информации [Электронный ресурс]. – М.: [б. и.], 2004. – URL: http://bourabai.ru/library/gubko.pdf (дата обращения: 11.06.2018).

5. Ворфоломеева А.И., Седых И.А. Применение матричных игр для решения конфликтных ситуаций // Сборник тезисов докладов науч. конф. студ. и аспир. ЛГТУ: в 2 ч. Ч. 1. – Липецк: Изд-во ЛГТУ, 2016. – С. 349–352.

6. Горелик В.А., Фомина Т.П. Элементы теории игр: учеб. пособие. – Липецк: Изд-во ЛГТУ, 1999. – 128 с.

7. Petrosjan L.A., Mazalov V.V. Game theory and applications // International Game Theory Review. – 2006. – Vol. 8, № 2. – P. 327.

8. Satoh A., Tanaka Ya. Two person zero-sum game with two sets of strategic variables // International Game Theory Review. – 03.09.2018. DOI: 10.1142/s0219198918500147

9. Fernando V.-R. Economics and the Theory of Games. – Cambridge, UK and New York: Cambridge University Press, 2003. – 512 p.

10. Садовин Н.С., Садовина Т.Н. Основы теории игр: учеб. пособие. – Йошкар-Ола, 2011. – 119 с.

11. Baskov O.V. Equilibrium payoffs in repeated two-player zero-sum games of finite automata // International Journal of Game Theory. – 2018. DOI: 10.1007/s00182-018-0634-x

12. Larsson U., Nowakowski R.J., Santos, C.P. Games with guaranteed scores and waiting moves // International Journal of Game Theory. – 2018. DOI: 10.1007/s00182-017-0590-x

13. Седых И.А., Ворфоломеева А.И. Математическая модель биматричной игры. Ситуация равновесия в чистых стратегиях // Вестник ЛГТУ. – 2017. – № 4(34). – С. 6–13.

14. Теоретико-игровое компьютерное моделирование [Электронный ресурс]. – URL: http://bourabai.ru/cm/game_theory.htm (дата обращения: 06.06.2018).

15. Соловьев В.И. Методы оптимальных решений: учеб. пособие. – М.: Финансовый университет, 2012. – 364 с.

16. Теория игр [Электронный ресурс]. – URL: http://smalltalks.ru/soderjanie/1031-teria-igr (дата обращения: 03.04.2017).

17. Писарук Н.Н. Введение в теорию игр. – Минск: Изд-во БГУ, 2015. – 256 с.

18. Методы математического программирования в задачах оптимизации сложных технических систем / Н.А. Загребаев, Н.А. Крицына, Ю.П. Кулябичев, Ю.Ю. Шумилов. – М.: Изд-во МИФИ, 2007. – 332 с.

19. Протасов И.Д. Теория игр и исследование операций: учеб. пособие. – М.: Гелиос АРВ, 2003. – 368 с.

20. Колобашина Л.В., Алюшин М.В. Информационные технологии принятия решений в условиях конфликта. Ч.1: Основы теории игр: учеб. пособие для вузов: в 2 ч. – М.: НИЯУ МИФИ, 2010. – 164 с.

References

1. Sedykh I.A., Pozdniakov A.I. Reshenie nechetkoi zadachi priniatiia reshenii pri vybore marki telefona [Solution of the fuzzy task of making decisions when choosing a phone brand]. *Vestnik Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2016, no. 4(30), pp. 26-31.

2. Bliumin S.L., Shuikova I.A. Modeli i metody priniatiia reshenii v usloviiakh neopredelennosti [Models and methods of decision-making under conditions of uncertainty]. Lipetsk: Lipetskii ekologo-gumanitarnyi institut, 2001. 138 p.

3. Vorfolomeeva A.I., Sedykh I.A. Primenenie teorii priniatiia reshenii k vyboru magazina na osnove oprosa ekspertov [Application of decision theory to the choice of a store based on a survey of experts]. *Fizika i tekhnologii. Tendentsii razvitiia sovremennoi nauki. Materialy nauchnoi konferentsii studentov i aspirantov Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta.* Lipetsk: Lipetskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet, 2018, pp. 49-51.

4. Gubko M.V Lektsii po priniatiiu reshenii v usloviiakh nechetkoi informatsii [Lectures on decision making in conditions of fuzzy infor-

mation]. Moscow, 2004, available at: http://bourabai.ru/library/gubko.pdf (accessed 11 June 2018).

5. Vorfolomeeva A.I., Sedykh I.A. Primenenie matrichnykh igr dlia resheniia konfliktnykh situatsii [Application of matrix games for solving conflict situations]. *Sbornik tezisov dokladov nauchnoi konferentsii studentov i aspirantov Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. Lipetsk: Lipetskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet, 2016, vol. 1, pp. 349-352.

6. Gorelik V.A., Fomina T.P. Elementy teorii igr [Elements of the theory of games]. Lipetsk**:** Lipetskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet, 1999. 128 p.

7. Petrosjan L.A., Mazalov V.V. Game theory and applications**.** *International Game Theory Review*, 2006, vol. 8, no. 2. 327 p.

8. Satoh A., Tanaka Ya. Two person zero-sum game with two sets of strategic variables. *International Game Theory Review. 03.09.2018*. DOI: 10.1142/s0219198918500147

9. Fernando V.-R. Economics and the Theory of Games. Cambridge, UK and New York: Cambridge University Press, 2003. 512 p.

10. Sadovin N.S., Sadovina T.N. Osnovy teorii igr [Fundamentals of game theory]. Yoshkar-Ola, 2011. 119 p.

11. Baskov O.V. Equilibrium payoffs in repeated two-player zero-sum games of finite automata. *International Journal of Game Theory*, 2018. DOI: 10.1007/s00182-018-0634-x

12. Larsson U., Nowakowski R.J., Santos, C.P. Games with guaranteed scores and waiting moves. I*nternational Journal of Game Theory*, 2018. DOI: 10.1007/s00182-017-0590-x

13. Sedykh I.A., Vorfolomeeva A.I. Matematicheskaia model' bimatrichnoi igry. Situatsiia ravnovesiia v chistykh strategiiakh [Mathematical model of bimatrix game. The situation of equilibrium in pure strategies]. *Vestnik Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. 2017, no. 4(34), pp. 6-13.

14. Teoretiko-igrovoe komp'iuternoe modelirovanie [Game-theoretic computer simulation], available at: http://bourabai.ru/cm/game_theory.htm (accessed 06 June 2018).

15. Solov'ev V.I. Metody optimal'nykh reshenii [Methods of optimal solutions]. Moscow: Finansovyi universitet, 2012. 364 p.

16. Teoriia igr [Theory of games], available at: http://smalltalks.ru/ soderjanie/1031-teria-igr (accessed 03 April 2017).

17. Pisaruk N.N. Vvedenie v teoriiu igr [Introduction to the theory of games]. Minsk: Belorusskii gosudarstvennyi universitet, 2015. 256 p.

18. Zagrebaev N.A., Kritsyna N.A., Kuliabichev Iu.P., Shumilov Iu.Iu. Metody matematicheskogo programmirovaniia v zadachakh optimizatsii slozhnykh tekhnicheskikh sistem [Methods of mathematical programming in problems of optimization of complex technical systems]. Moscow: Natsional'nyi issledovatel'skii iadernyi universitet "MIFI", 2007. 332 p.

19. Protasov I.D. Teoriia igr i issledovanie operatsii [Game theory and operations research]. Moscow: Gelios ARV, 2003. 368 p.

20. Kolobashina L.V., Aliushin M.V. Informatsionnye tekhnologii priniatiia reshenii v usloviiakh konflikta. Chast 1. Osnovy teorii igr [Information technologies for decision-making in conflict situations. Part 1. Fundamentals of the theory of games]. Moscow: Natsional'nyi issledovatel'skii iadernyi universitet "MIFI", 2010. 164 p.

Сведения об авторах

Седых Ирина Александровна (Липецк, Россия) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика» Липецкого государственного технического университета (398055, Липецк, ул. Московская, 30, e-mail: sedykh-irina@yandex.ru).

Ворфоломеева Анастасия Игоревна (Липецк, Россия) – магистрант кафедры «Промышленная теплоэнергетика» Липецкого государственного технического университета (398055, Липецк, ул. Московская, 30, e-mail:n.vorfolomeeva@mail.ru).

About authors

Sedykh Irina Alexandrovna (Lipetsk, Russian Federation) is a Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor Department of Higher Mathematics Lipetsk State Technical University (398055, Lipetsk, 30, Moscow str., e-mail: sedykh-irina@yandex.ru).

Vorolomeyeva Anastasia Igorevna (Lipetsk, Russian Federation) is a Master Student of Industrial Thermal Power Engineering Department Lipetsk State Technical University (398055, Lipetsk, 30, Moskovskaya str., e-mail: n.vorfolomeeva@mail.ru).

Получено 15.04.2019