УДК 517.9, 519.7, 51.77

В.П. Первадчук, Д.Б. Владимирова, П.О. Деревянкина

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь, Россия

РАСПРЕДЕЛЕННОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЗАДАЧЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЦИИ НАСЕЛЕНИЯ ПО ОБЪЕМУ НАКОПЛЕНИЙ

Активное развитие теории оптимального управления распределёнными системами во второй половине прошлого столетия было вызвано высокой востребованностью в задачах технической направленности, однако достаточно быстро эта теория показала инвариантность и к другим областям применения. Сегодня все более актуальными представляются прикладные исследования, ориентированные на повышение эффективности управления сложными социально-экономическими процессами, на основе использования и развития методов теории оптимального управления системами с распределенными параметрами.

Объектом исследования является распределенная система, описываемая начально-краевой задачей для дифференциального уравнения в частных производных параболического типа и моделирующая распределение народонаселения некоторого региона по объему денежных накоплений. Для исследуемой системы ставится задача оптимального управления типа «распределенное управление – финальное наблюдение». Это означает, что требуется приблизить состояния системы в фиксированный момент времени к некоторому заранее определенному виду за счет управления слагаемыми в уравнении состояния (т.е. притоком в систему новых членов или оттоком из нее). Приводится вывод оптимизационной системы в сильной форме и закона оптимального управления, полученный в терминах модели.

Применяются методы теории дифференциальных уравнений в частных производных, теории оптимального управления распределенными системами, математического и компьютерного моделирования.

Приводится пример численного расчета модели по данным Пермского края. Для проведения численных реализаций используется пакет Comsol Multiphysics. Предлагаемая авторами методология проведения подобных расчетов, учитывающих взаимозависимость миграционных процессов в регионе и финансового состояния населения в нем, может найти применение в разработке эффективных мер управления миграционными процессами, что является важной задачей как государственной, так и региональной политики.

Ключевые слова: оптимальное управление, оптимизационная система, распределенная система, управление экономическими системами, распределение по объему накоплений, плотность накоплений, миграционная политика.

V.P. Pervadchuk, D.B. Vladimirova, P.O. Derevyankina

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

DISTRIBUTED CONTROL IN THE TASK OF MODELING OF POPULATION DIFFERENTIATION BY THE AMOUNT OF SAVINGS

The active development of the optimal control theory of distributed systems in the second half of the last century was caused by a high demand for technical problems, however, this theory quickly showed invariance to other fields of application. Today, applied research aimed at improving the efficiency of complex socio-economic processes management, based on the using and development of methods of optimal control theory for systems with distributed parameters, is becoming increasingly relevant.

The object of the study is a distributed system, described by an initial-boundary value problem for a partial differential equation of a parabolic type and modeling the population distribution of a region in terms of cash savings. For the system under study, an optimal control problem of the "distributed control - final observation" type has been posed. This means that it is necessary to approximate the state of the system at a fixed time to a certain pre-defined form by controlling the terms in the equation of state (ie, the influx of new members into the system or the outflow from it). The conclusion of the optimization system in a strong form and the law of optimal control, obtained in terms of the model, have been given.

The methods of the theory of partial differential equations, the theory of optimal control of distributed systems, mathematical and computer modeling are applied.

An example of the numerical study of the model according to the Perm region has been given. The Comsol Multiphysics package has been used for numerical implementations. The methodology proposed by the authors for carrying out such calculations, taking into account the interdependence of migration processes in the region and the financial condition of the population in it, can be applied in the development of effective measures to manage migration processes, which is an important task of both state and regional policy.

Keywords: optimal control, optimization system, distributed system, management of economic systems, distribution by savings, savings density, migration policy.

Введение. Теория оптимального управления начала оформляться в самостоятельную дисциплину во второй половине прошлого столетия и продолжает активно развиваться в наше время.

В работах В.М. Алексеева, В.М. Тихомирова, С.В. Фомина, А.Д. Иоффе, Ф. Хартмана, Р. Габасова, Ф.М. Кирилловой [1–4] изложены основные ее положения для сосредоточенных систем (их состояния описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями). Монографии Ж.-Л. Лионса, А.Г. Бутковского, К.А. Лурье, А.И. Егорова, В.И. Иваненко, В.С. Мельника, А.В. Фурсикова, Т.К. Сиразетдинова [5–11] и других ученых посвящены проблемам теории оптимального управления распределенными системами, состояния которых описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. Такие системы, как известно, качественнее описывают сложные реальные процессы и объекты, но в то же время оперировать распределенными системами по сравнению с сосредоточенными на порядок сложнее.

Практическое применение методов теории оптимального управления началось с задач технической направленности, в том числе с задач управления летательными аппаратами, управления технологическими процессами на производстве.

Сегодня, в эпоху информатизации общества, наблюдается тенденция формализации и гуманитарных знаний. Таким образом, все более актуальными представляются прикладные исследования сложных социально-экономических процессов, ориентированные на повышение эффективности управления ими на основе использования и развития методов теории оптимального управления распределенными системами. Эта область интенсивно разрабатывается учеными по всему миру [12–15].

В рамках данного исследования рассматривается задача оптимального управления экономическим процессом, описываемым распределенной системой. Начально-краевая задача моделирует дифференциацию населения по объему денежных накоплений. Задача управления подобного рода системами актуальна, поскольку на современном этапе особую важность приобретают постановки, анализ которых позволяет регулировать процессы финансового состояния в обществе, управлять, в том числе оптимально, некоторыми параметрами исследуемых систем. Ряд ученых (Д.С. Чернявский [16], В.Т. Ерофеенко, И.С. Козловская [17], Г.А., Гюльмамедова Э.Г. Оружиев [18]) уже занимались разработкой и исследованием математических моделей спектра накоплений общества, однако в их работах вопросы управления такими системами не изучались.

1. Математическая постановка задачи оптимального управления. Рассмотрим математическую модель распределения населения по денежным накоплениям. Она описывается одномерным дифференциальным уравнением параболического типа:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\big(C(x,t)u\big)-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(b(x,t)u\big)=f(x,t) \tag{1}$$

с начальным и граничными условиями:

$$u(x,0)=u_{st},\ u(0,t)=u_0,\ u(l,t)=u_l, \tag{2}$$

где искомая функция $u=u(x,t)\in L_2\big(H^1(\Omega);0,\tau\big)$ есть плотность распределения населения по накоплениям $x\in\Omega$, $\Omega=[0,l]$ во времени $t\in[0,\tau]$, т.е. доля населения с накоплениями от x до $x+\Delta x$ $\left(\int\limits_0^l \int\limits_0^\tau u(x,t) dxdt = 1\right)$;

$C(x,t)$ – заданная функция сноса, $b(x,t)$ – заданная функция диффузии, $f(x,t)$ – функция семей-мигрантов, т.е. количество семей, мигрирующих на отрезок единичной длины за единичный интервал времени в окрестностях x и t; при этом положительное значение функции $f(x,t)$ будет означать число прибывающих в систему мигрантов, т.е. иммигрантов, а отрицательное значение функции $f(x,t)$ будем трактовать, наоборот, как число выбывающих из системы членов, т.е. эмигрантов; u_{st} , u_0, u_1 – заданные функции, характеризующие состояние системы в начальный момент времени и на границах [17].

Описав математическую модель динамики плотности распределения населения по накоплениям, перейдем к постановке задачи управления данной системой.

Пусть в качестве управления выступает функция семей-мигрантов $f(x,t)$, т.е. $upr(x,t) = f(x,t) \in L_2\left(H^1(\Omega);0,\tau\right)$, и доставляет минимум функционалу:

$$A(u,upr) = \int\limits_0^l \left(u(x,\tau) - u^*(x,\tau)\right)^2 dx + \alpha \int\limits_0^l \int\limits_0^\tau \left|upr(x,t)\right|^2 dxdt \to \min, \qquad (3)$$

где α – некоторое положительное число, состояние системы $u^*(x,\tau)$ в финальный момент времени τ – желаемое распределение населения по объему накоплений, к которому необходимо приблизиться.

Задача (1)–(3) называется задачей с распределенным управлением и финальным наблюдением. Оптимальное состояние системы, при котором функционал (3) будет достигать своей точной нижней грани, существует в силу его выпуклости, полунепрерывности снизу и коэрцитивности [19].

Получим теперь оптимизационную систему для задачи (1)–(3).

Согласно критерию оптимальности [10, 19] значение производной по Гато целевого функционала (3) на оптимальном элементе $upr_0(x,t)$ должно обратиться в ноль:

$$A'(u,upr_0) = 2\int\limits_0^l \left(u(x,\tau) - u^*(x,\tau)\right) \cdot \dot{u}(x,\tau)\, dx + 2\alpha \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l upr_0 \cdot \delta upr\, dxdt = 0. \qquad (4)$$

Запишем исходную краевую задачу (1)–(2) для функции $\dot{u}(x,t)$, которая означает производную функции состояния системы, вычисленную по функции оптимального управления на оптимальном элементе:

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial t}+\frac{\partial (C\dot{u})}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 (b\dot{u})}{\partial x^2}=\delta upr, \tag{5}$$

$$\dot{u}\,|_{x=0}=0,\ \dot{u}\,|_{x=l}=0,\ \dot{u}\,|_{t=0}=0. \tag{6}$$

Умножим уравнение состояния (5) проварьированной задачи на произвольную функцию $p(x,t)\in L_2\left(H^1(\Omega);0,\tau\right)$ и проинтегрируем по области $\Omega_t=[0,L]\times[0,\tau]$:

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega_e} p(x,t)\frac{\partial \dot{u}}{\partial t}dxdt+\int\limits_{\Omega_t} p(x,t)\frac{\partial (C\dot{u})}{\partial x}dxdt-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_t} p(x,t)\frac{\partial^2 (b\dot{u})}{\partial x^2}dxdt=\\ =\int\limits_{\Omega_t} p(x,t)\cdot\delta upr\,dxdt.\end{gathered} \tag{7}$$

Применим к (7) формулу Грина и, воспользовавшись краевыми условиями (6), получим:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^l p\dot{u}\,|_{t=\tau}\,dx-\int\limits_{\Omega_t}\dot{u}\cdot\left(\frac{\partial p}{\partial t}+C\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{2}b\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)dxdt-\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau pb\frac{\partial \dot{u}}{\partial x}\Big|_0^l dt=\\ =\int\limits_{\Omega_t} p\delta upr\,dxdt.\end{gathered} \tag{8}$$

Наложим условия на вспомогательную функцию $p(x,t)$, до сих пор произвольную:

$$\frac{\partial p}{\partial t}+C\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{b}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=0, \tag{9}$$

$$p\,|_{t=\tau}=u(x,\tau)-u^*(x,\tau),\ \ p\,|_{x=0}=0,\ p\,|_{x=l}=0. \tag{10}$$

Тогда, учитывая необходимое условие (4) экстремума целевого функционала (3), выражение (8) преобразуем к виду:

$$-\alpha\int\limits_{\Omega_t} upr_0\cdot\delta upr\,dxdt=\int\limits_{\Omega_t} p\cdot\delta upr\,dxdt. \tag{11}$$

Откуда находим оптимальный закон:

$$upr_0(x,t)=-\frac{p(x,t)}{\alpha}. \tag{12}$$

Окончательно получаем систему оптимальности в виде краевой задачи для исходного уравнения и уравнения так называемого сопряженного состояния:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(C(x,t)\cdot u\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(b(x,t)\cdot u\right)=-\frac{p(x,t)}{\alpha},\\
&u\,|_{t=0}=u_{st},\ u\,|_{x=0}=u_0,\ u\,|_{x=l}=u_l,\\
&\frac{\partial p}{\partial t}+C(x,t)\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{b(x,t)}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=0,\\
&p\,|_{t=\tau}=u(x,\tau)-u^*(x,\tau),\ p\,|_{x=0}=0,\ p\,|_{x=l}=0
\end{aligned}\tag{13}$$

Решая оптимизационную систему (12) относительно функций $u(x,t)$ и $p(x,t)$, мы определим распределение населения по накоплениям, наиболее близкое к заданному распределению $u^*(x,\tau)$, за счет управлением мигрантами: обеспечивая приток или отток мигрантов, распределенных по оси накоплений во времени по закону (12).

В следующем пункте приведем пример решения модельной оптимизационной задачи.

2. Численное исследование задачи оптимального управления. Рассмотрим численную реализацию модели на примере данных по Пермскому краю. При определении параметров модели использовались усредненные статистические данные по региону за 2016 г. [20] и экспертные оценки [16, 21]. Вычисления проводились в системе Comsol Multiphysics.

Задача решалась в области $[0,L]\times[0,\tau]$, где $L=104{,}26$ прожиточных минимумов (что соответствует 1 млн рублей), $\tau=12$ месяцев.

Функция сноса $C(x)$ была рассчитана по методологии Д.С. Чернавского [16, 21] и представлена на рис. 1.

Коэффициент диффузии был определен как $b=9$. Начальное и граничные условия (2) были заданы в соответствии со стационарным решением уравнения (1): $u(x,0)=u_{\text{stationary}}$, $u_0=6\cdot 10^{-3}$, $u_l=2\cdot 10^{-7}$.

Функция $u^*(x,\tau)$ была задана как нормальное распределение: $\mathrm{N}(30,4)$. Это означает выбор в качестве целевого такого распределения населения по накоплениям, чтобы средний уровень накоплений у большинства семей в регионе составлял 30 прожиточных минимумов.

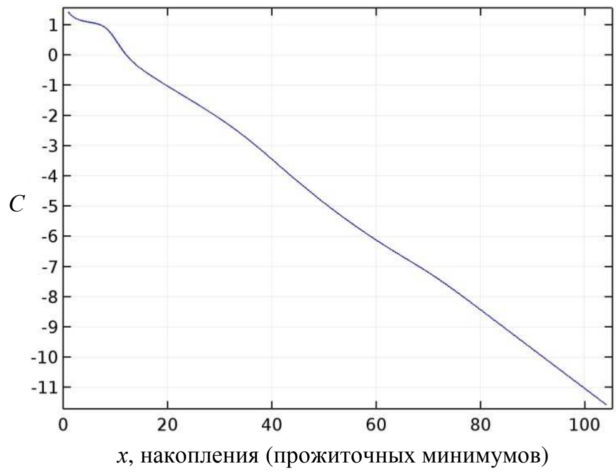

Рис. 1. Заданная функция сноса

На рис. 2 приведем решение $u(x,t)$ оптимизационной системы (11).

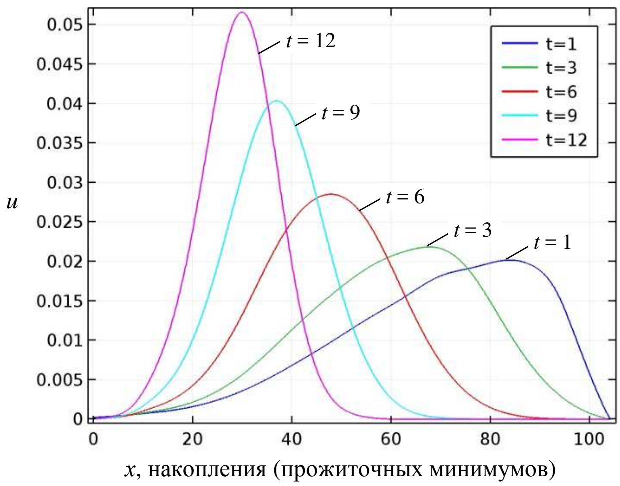

Рис. 2. График функции распределения населения
по накоплениям $u(x,t)$ по временным срезам

Для наглядности совместим нормированное решение $u(x,\tau)$ оптимизационной системы (11) в финальный момент времени, заданное целевое распределение $u^*(x,\tau)$ и нормированное решение $u_{\text{stationary}}(x)$ уравнения (1) в стационарном случае на одном графике (рис. 3). Судя по приведенным на рис. 3 графикам, можно констатировать, что аргумент функции распределения семей по накоплениям в точке максимума сдвинулся с 12 прожиточных минимумов (что соответствует стационарному состоянию $u_{\text{stationary}}$, т.е. ситуации на начало 2016 г., без управления) до 30 прожиточных минимумов (решение $u(x,\tau)$ системы оптимальности; при оптимальном управлении к концу 2016 г.). Таким образом, мы вплотную приблизились к заданному состоянию системы $u^*(x)$ (функция $u^*(x)$ имеет максимум также при $x = 30$ прожиточных минимумов).

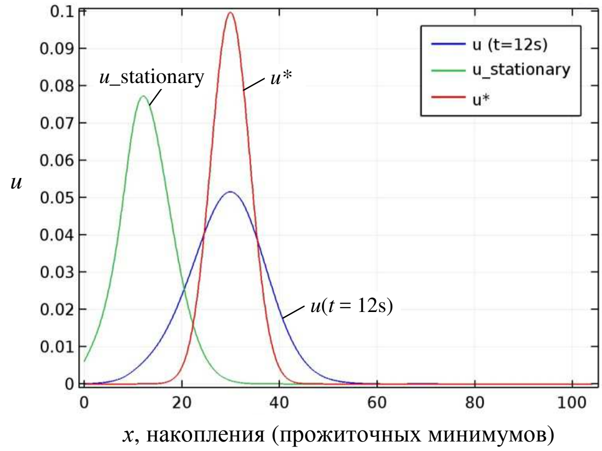

Рис. 3. Графики функции распределения населения по накоплениям в финальный момент времени $u(x,\tau)$ при оптимальном управлении, целевой функции распределения $u^*(x,\tau) = \mathrm{N}(30,4)$ и функции стационарного распределения населения по накоплениям $u_{\text{stationary}}(x)$ (в начальный момент времени, без управления)

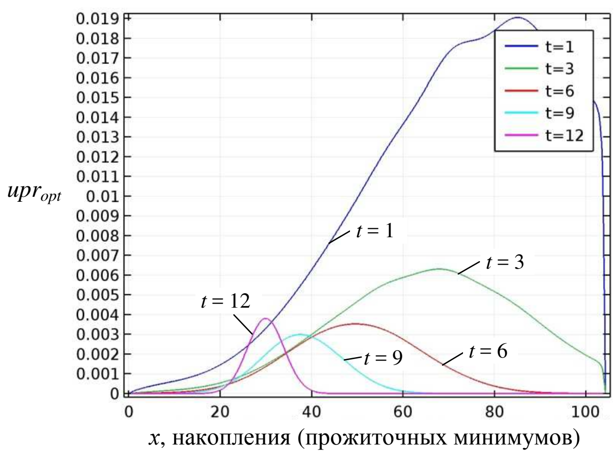

Рис. 4. График функции оптимального управления $upr_{opt}(x,t)$ по временным срезам

На рис. 4 приведен график функции $upr_{opt}(x,t)$ оптимального управления – распределение семей-мигрантов по накоплениям во времени. Он показывает, по какому закону должно происходить изменение числа семей-мигрантов по оси накоплений во времени. Если в первые месяцы требуется привлечение большого количества иммигрантов и в основном с накоплениями 60–100 прожиточных минимумов, то в последний момент времени – с накоплениями 30 прожиточных минимумов.

Выводы. В рамках данной работы для распределенной системы, моделирующей распределение населения по накоплениям, была сформулирована и обоснована задача оптимального управления. В качестве управления выступала функция семей-мигрантов. Получены необходимые условия разрешимости в форме системы оптимальности, представляющей собой краевую задачу в частных производных, а также формула для определения функции оптимального управления.

Выполнено численное исследование модельной задачи для населения Пермского края. Приведены графики решения системы оптимальности и функции оптимального управления.

Использованный в статье подход проведения подобных расчетов, учитывающих взаимозависимость миграционных процессов в регионе и финансового состояния населения в нем, может найти применение в разработке эффективных мер управления миграционными процессами, что является важной задачей как государственной, так и региональной политики.

Библиографический список

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979. – 432 с.

2. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974. – 479 с.

3. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / пер. с англ. И.Х. Сабитова; под ред. В.М. Алексеева. – М.: Мир, 1970. – 720 с.

4. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. – Минск: Наука и техника, 1974. – 272 с.

5. Лионс Ж.-Л. Об оптимальном управлении распределенными системами // УМН. – 1973. – Т. 28, № 4(172). – С. 15–46. DOI: 10.1070/RM1973v028n04ABEH001586

6. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1975. – 568 с.

7. Егоров А.И., Знаменская Л.Н. Введение в теорию управления системами с распределенными параметрами. – СПб.: Лань, 2017. – 292 с.

8. Иваненко В.И., Мельник В.С. Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. – Киев: Наукова думка, 1988. – 284 с.

9. Лурье К.А. Оптимальное управление в задачах математической физики. – М.: Наука, 1975. – 480 с.

10. Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. – Новосибирск: Научная книга, 1999. – 352 с.

11. Сиразетдинов Т.К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1977. – 480 с.

12. Luo Z., Li W.T., Wang M. Optimal harvesting control problem for linear periodic age-dependent population dynamics // Appl. Math. Comput. – 2004. – № 151(3). – P. 789–800.

13. Simon C., Skritek B., Veliov V.M. Optimal immigration age-patterns in populations of fixed size // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2013. – № 405(1). – P. 71–89.

14. Anit¸a L.I., Capasso V., Mosneagu A.M. Regional control in optimal harvesting of population dynamics // Nonlinear Analysis. – 2016. – № 147. – P. 191–212.

15. Ballestra L.V. The spatial AK model and the Pontryagin maximum principle // Journal of Mathematical Economics. – 2016. – № 67. – P. 87–94.

16. Чернавский Д.С., Попков Ю.С., Рахимов А.Х. Математические модели типологии семейных накоплений // Экономика и математические методы. – 1994. – Т. 30. – Вып. 2. – С. 98–106.

17. Ерофеенко В.Т., Козловская И.С. Уравнения с частными производными и математические модели в экономике: курс лекций. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 248 с.

18. Оруджев Э.Г., Гюльмамедова Г.А. О смешанных задачах на конечном пространстве накоплений // Актуальные проблемы экономики. – 2011. – № 11. – С. 431–441.

19. Шумкова Д.Б. Прикладная математика: оптимальное управление распределенными системами в экономике и технике: учеб. пособие. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2009. – 50 с.

20. Пермский край в цифрах. 2018: Краткий статистический сборник / Территориальный орган Федеральной службы государственной статистики по Пермскому краю. – Пермь, 2018. – 182 с.

21. Первадчук В.П., Владимирова Д.Б., Деревянкина П.О. Математическое моделирование экономической структуры общества на примере статистических данных по Пермскому краю // Вестник Перм. ун-та. Сер. Экономика = Perm University Herald. Economy. – 2018. – Т. 13. – № 3. – С. 390–401. DOI: 10.17072/1994-9960-2018-3-390-401

References

1. Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. Optimal'noe upravlenie [Optimal control]. Moscow: Nauka, 1979. 432 p.

2. Ioffe A.D., Tikhomirov V.M. Teoriia ekstremal'nykh zadach [The theory of extremal problems]. Moscow: Nauka, 1974. 479 p.

3. Khartman F. Obyknovennye differentsial'nye uravneniia [The ordinary differential equations]. Ed. V.M. Alekseeva. Moscow: Mir, 1970. 720 p.

4. Gabasov R., Kirillova F.M. Printsip maksimuma v teorii optimal'nogo upravleniia [Maximum principle in optimal control theory]. Minsk: Nauka i tekhnika, 1974. 272 p.

5. Lions Zh.-L. Ob optimal'nom upravlenii raspredelennymi sistemami [The optimal control of distributed systems]. *UMN*, 1973, vol. 28, no. 4(172), pp. 15-46. DOI: 10.1070/RM1973v028n04ABEH001586

6. Butkovskii A.G. Metody upravleniia sistemami s raspredelennymi parametrami [Control methods of systems with distributed parameters]. Moscow: Nauka, 1975. 568 p.

7. Egorov A.I., Znamenskaia L.N. Vvedenie v teoriiu upravleniia sistemami s raspredelennymi parametrami [Introduction to the control theory of systems with distributed parameters]. Saint Petersburg: Lan', 2017. 292 p.

8. Ivanenko V.I., Mel'nik B.C. Variatsionnye metody v zadachakh upravleniia dlia sistem s raspredelennymi parametrami [Variational methods in control problems for systems with distributed parameters]. Kiev: Naukova dumka, 1988. 284 p.

9. Lur'e K.A. Optimal'noe upravlenie v zadachakh matematicheskoi fiziki [Optimal control in problems of mathematical physics]. Moscow: Nauka, 1975. 480 p.

10. Fursikov A.V. Optimal'noe upravlenie raspredelennymi sistemami. Teoriia i prilozheniia [The optimal control of distributed systems. Theory and applications]. Novosibirsk: Nauchnaia kniga, 1999. 352 p.

11. Sirazetdinov T.K. Optimizatsiia sistem s raspredelennymi parametrami [Optimization of systems with distributed parameters]. Moscow: Nauka, 1977. 480 p.

12. Luo Z., Li W.T., Wang M. Optimal harvesting control problem for linear periodic age-dependent population dynamics. *Appl. Math. Comput*, 2004, no. 151(3), pp. 789-800.

13. Simon C., Skritek B., Veliov V.M. Optimal immigration age-patterns in populations of fixed size. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2013, no. 405(1), pp. 71-89.

14. Anit¸a L.I., Capasso V., Mosneagu A.M. Regional control in optimal harvesting of population dynamics. *Nonlinear Analysis*, 2016, no. 147, pp. 191-212.

15. Ballestra L.V. The spatial AK model and the Pontryagin maximum principle. *Journal of Mathematical Economics*, 2016, no. 67, pp. 87-94.

16. Chernavskii D.S., Popkov Iu.S., Rakhimov A.Kh. Matematicheskie modeli tipologii semeinykh nakoplenii [Mathematical models of family accumulation typology]. *Ekonomika i matematicheskie metody*, 1994, vol. 30, iss. 2, pp. 98-106.

17. Erofeenko V.T., Kozlovskaia I.S. Uravneniia s chastnymi proizvodnymi i matematicheskie modeli v ekonomike [Partial differential equations and mathematical models in economics]. Moscow: Editorial URSS, 2004. 248 p.

18. Orudzhev E.G., Giul'mamedova G.A. O smeshannykh zadachakh na konechnom prostranstve nakoplenii [On mixed problems on a finite accumulation space]. *Aktual'nye problemy ekonomiki*, 2011, no. 11, pp. 431-441.

19. Shumkova D.B. Prikladnaia matematika: optimal'noe upravlenie raspredelennymi sistemami v ekonomike i tekhnike [Optimal control of distributed systems in economics and technology]. Perm': Permskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet, 2009. 50 p.

20. Permskii krai v tsifrakh. 2018: Kratkii statisticheskii sbornik [Perm region in numbers. 2018. Brief statistical compilation]. Perm: Territorial'nyi organ Federal'noi sluzhby gosudarstvennoi statistiki po Permskomu kraiu, 2018. 182 p.

21. Pervadchuk V.P., Vladimirova D.B., Dereviankina P.O. Matematicheskoe modelirovanie ekonomicheskoi struktury obshchestva na

primere statisticheskikh dannykh po Permskomu kraiu [Mathematical modeling of economic society structure in the case study of the Perm region statistical data]. *Vestnik Permskogo universiteta. Ekonomika = Perm University Herald. Economy*, 2018, vol. 13, no. 3, pp. 390-401. DOI: 10.17072/1994-9960-2018-3-390-401

Сведения об авторах

Первадчук Владимир Павлович (Пермь, Россия) – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика» Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: pervadchuk@mail.ru).

Владимирова Дарья Борисовна (Пермь, Россия) – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Прикладная математика» Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: pervadchuk@mail.ru).

Деревянкина Полина Олеговна (Пермь, Россия) – аспирантка кафедры «Прикладная математика» Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: p.derevyankina@bk.ru).

About the authors

Pervadchuk Vladimir Pavlovich (Perm, Russian Federation) is a Doctor of Technical Sciences, Professor, The Head of the Department of Applied Mathematics Perm National Research Polytechnic University (614990, Perm, 29, Komsomolsky pr., e-mail: pervadchuk@mail.ru).

Vladimirova Dar'ia Borisovna (Perm, Russian Federation) is a Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor Department of Applied Mathematics Perm National Research Polytechnic University (614990, Perm, 29, Komsomolsky pr., e-mail: pervadchuk@mail.ru).

Derevyankina Polina Olegovna (Perm, Russian Federation) is a Graduate Student Department of Applied Mathematics Perm National Research Polytechnic University (614990, Perm, 29, Komsomolsky pr., e-mail: p.derevyankina@bk.ru).

Получено 15.04.2019