УДК 519.6

И.А. Седых, А.М. Сметанникова

Липецкий государственный технический университет, Липецк, Россия

ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОКРЕСТНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ В MATHCAD

Дискретные модели имеют широкое применение в современном мире. Существует множество сложных пространственно-распределенных объектов и систем, таких как транспортные системы, сталеплавильное производство, процесс износа элементов конструкций мостовых сооружений, цементное производство, процесс очистки сточных вод и многие другие. Окрестностные модели применяются для имитационного моделирования сложных производственных систем, а также для управления ими. Именно окрестностные модели обобщают многие дискретные системы. В работе рассмотрены два простейших класса окрестностных моделей, такие как линейные и билинейные динамические дискретные окрестностные модели, которые в данной статье представлены в матричном виде. Также показано основное отличие линейных от билинейных динамических дискретных окрестностных моделей; объясняется, в чем выражена дискретность окрестностных моделей. Даны определения таких понятий, как блочное умножение, параметрическая идентификация и устойчивость окрестностных моделей.Проведена параметрическая идентификация рассмотренных динамических дискретных окрестностных моделей, приведены формулы переопределенной системы линейных алгебраических уравнений для выполнения параметрической идентификации окрестностных систем. В работе рассмотрено характеристическое уравнение динамических дискретных окрестностных моделей, по которому находятся собственные числа, необходимые для определения устойчивости. Описано условие устойчивости для дискретных динамических окрестностных моделей по критерию Ляпунова. По результатам устойчивости и адекватности окрестностной модели производственной пространственно-распределенной системы можно судить о возможности применения данной модели для прогнозирования ее состояний. Была разработана программа для построения и исследования дискретных динамических окрестностных моделей на устойчивость по критерию Ляпунова. Данная программа была выполнена в блоке программирования математического пакета Mathcad. Представлена блок-схема алгоритма программы, в которой показана последовательность выполнения операций для проведения параметрической идентификации и изучения линейных и билинейных дискретных окрестностных моделей на устойчивость по критерию Ляпунова. Подробно описаны основные шаги и команды в среде Mathcad, которые были использованы в ходе написания программного кода.

Ключевые слова: линейные и билинейные окрестностные модели, параметрическая идентификация, устойчивость, критерий Ляпунова, программа, среда Mathcad.

I.A. Sedykh, A.M. Smetannikova

Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation

CONSTRUCTION AND INVESTIGATION OF DISCRETE DYNAMIC NEIGHBORHOOD MODELS IN MATHCAD

Discrete models are widely used in the modern world. There are many complex spatially distributed objects and systems, such as transport systems, steelmaking, the wear process of structural elements of bridge structures, cement production, the process of wastewater treatment, and many others. Neighborhood models are used to simulate complex production systems, as well as to manage them. It is the neighborhood models that generalize many discrete systems. In the paper, two simplest classes of neighborhood models are considered, such as linear and bilinear dynamic discrete neighborhood models, which in this paper are presented in a matrix form. The main difference between linear and bilinear dynamic discrete neighborhood models is also shown; explains the discreteness of the neighborhood models. Definitions of such concepts as block multiplication, parametric identification and stability of neighborhood models are given. Parametric identification of the considered dynamic discrete neighborhood models is carried out, formulas for an overdetermined system of linear algebraic equations for performing parametric identification of neighborhood systems are given. The characteristic equation of dynamical discrete neighborhood models is considered in which the eigenvalues necessary for determining stability are found. The stability condition for discrete dynamical neighborhood models is described by the Lyapunov criterion. Based on the results of the stability and adequacy of the neighborhood model of the production spatially-distributed system, one can judge the possibility of using this model for forecasting its states. A program was developed for constructing and investigating discrete dynamic neighborhood models for stability by the Lyapunov criterion. This program was implemented in the programming block of the mathematical package Mathcad. A block diagram of the program algorithm is presented, which shows the sequence of operations for parametric identification and study of linear and bilinear discrete neighborhood models for stability by the Lyapunov criterion. The main steps and commands in the Mathcad environment that were used during the writing of the program code are described in detail.

Keywords: linear and bilinear neighborhood models, parametric identification, stability, Lyapunov's criterion, program, environment Mathcad.

Введение. Окрестностное моделирование применяется для исследования и изучения пространственно-распределенных систем [1–3]. Динамика окрестностных моделей выражается в изменении состояний модели с течением времени [4–5]. В работе рассмотрены линейные и билинейные дискретные динамические окрестностные модели [6–13].

Приведенные два простейших класса окрестностных моделей в работе исследуются на устойчивость по критерию Ляпунова с помощью разработанной в блоке программирования математического пакета Mathcad программы.

1. Линейная и билинейная окрестностные модели. Линейные окрестностные системы являются простейшим классом окрестностного моделирования, с которого началась разработка окрестностных моделей. Далее изучались нелинейные системы, простейшим случаем которых являются билинейные окрестностные модели.

Далее в (1) и (2) покажем формулы линейной и билинейной окрестностных моделей соответственно:

$$X[t+1,i] = A_i + B_i \cdot V[t,i] + C_i \cdot X[t,i], \tag{1}$$

где $A_i \in R^{m\times 1}, B_i, C_i \in R^{m\times m}$ – матрицы-параметры, $X[t,i] \in R^m$ – состояния модели, $V[t,i] \in R^m$ – входы модели, $i = 1,\ldots,n$ – количество узлов модели.

$$X[t+1,i] = A_i + B_i \cdot V[t,i] + C_\text{i} \cdot X[t,i] + E_i \circ X[t,i] \cdot V[t,i], \tag{2}$$

где $E_i \in R^{m\times m\times m}, E_i \circ X[t,i] \cdot V[t,i]$ – блочное умножение.

Основное отличие линейной от билинейной окрестностной модели в том, что в линейном случае отсутствует блочное умножение.

2. Параметрическая идентификация окрестностных моделей. Параметрическая идентификация заключается в нахождении параметров заданной окрестностной модели. Для параметрической идентификации окрестностных моделей необходимо решить переопределенную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида $AX_i = B_i$ для i-го узла [14–18], где:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & v_1[t,1] & \ldots & v_1[t,n] & x_1[t,1] & \ldots & x_1[t,n] \\ 1 & v_2[t,1] & \ldots & v_2[t,1] & x_2[t,1] & \ldots & x_2[t,n] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & v_M[t,1] & \ldots & v_M[t,1] & x_M[t,1] & \ldots & x_M[t,n] \end{bmatrix},$$

$$X_i = \begin{bmatrix} g_c[i] \\ g_v[1,i] \\ \ldots \\ g_v[n,i] \\ g_x[1,i] \\ \ldots \\ g_x[n,i] \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} x_1[t+1,i] \\ x_2[t+1,i] \\ \ldots \\ x_M[t+1,i] \end{bmatrix},$$

где $v_k[t,i]$ – входные данные модели для k-й строчки обучающей выборки; $x_k[t,i]$ – состояния i-го узла модели для k-й строчки обучающей выборки; $g_h[j,i]$ – коэффициенты функции пересчета состояний модели; M – количество реализаций всех $x_k[t,i]$, $v_k[t,i]$ в некоторый текущий момент времени t и $x_k[t+1,i]$ в следующий момент времени $t+1$, $k=1,...,M$, $i=1,...,n$, $j=1,...,n$, $h=\{c,v,x\}$.

В билинейном случае матрицы A, X_i изменяются, в них добавляются произведения состояний модели на входы и соответствующие им коэффициенты.

3. Условие устойчивости дискретных окрестностных моделей.

Устойчивость – способность системы стремиться из различных начальных состояний к некоторому равновесному состоянию. Исследование устойчивости дискретных динамических окрестностных моделей по Ляпунову сводится к изучению расположения корней характеристического уравнения замкнутой динамической дискретной системы относительно единичной окружности.

Покажем характеристическое уравнение дискретной системы:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0 = 0, \tag{3}$$

где n – порядок системы, a_i – коэффициенты характеристического уравнения, x – собственные числа, $i=0,...,n$ [19–20].

Чтобы динамическая дискретная окрестностная модель была устойчивой по критерию Ляпунова, необходимо составить матрицы для каждого узла окрестностной модели, найти собственные числа характеристического уравнения. Если собственные числа характеристического уравнения каждого узла по модулю меньше единицы, то данная система будет устойчива по критерию Ляпунова.

4. Программа для построения и исследования окрестностных моделей. В данной работе описывается программа для построения и исследования дискретных динамических окрестностных моделей на устойчивость, которая была выполнена в блоке программирования математического пакета Mathcad. На рисунке представлена блок-схема алгоритма программы, на которой показана последовательность выполнения шагов.

С помощью данной программы можно проводить параметрическую идентификацию и проверять на устойчивость два класса окрестностных моделей, а именно линейные и билинейные динамические окрестностные модели. Для того чтобы проверить на устойчивость линейную или билинейную динамическую окрестностную модель, вначале необходимо прописать в программе путь из файла Excel формата

.xlsx к рассматриваемой окрестностной модели, который задан в качестве переменной *Path*. Зададим циклы по номеру узлов *i* и номеру координат вектора состояния *j*. Далее считываем из файла Excel матрицы *D* и *F*, для этого существует команда *submatrix*(), определяющая границы матриц, которые необходимо использовать для дальнейших вычислений.

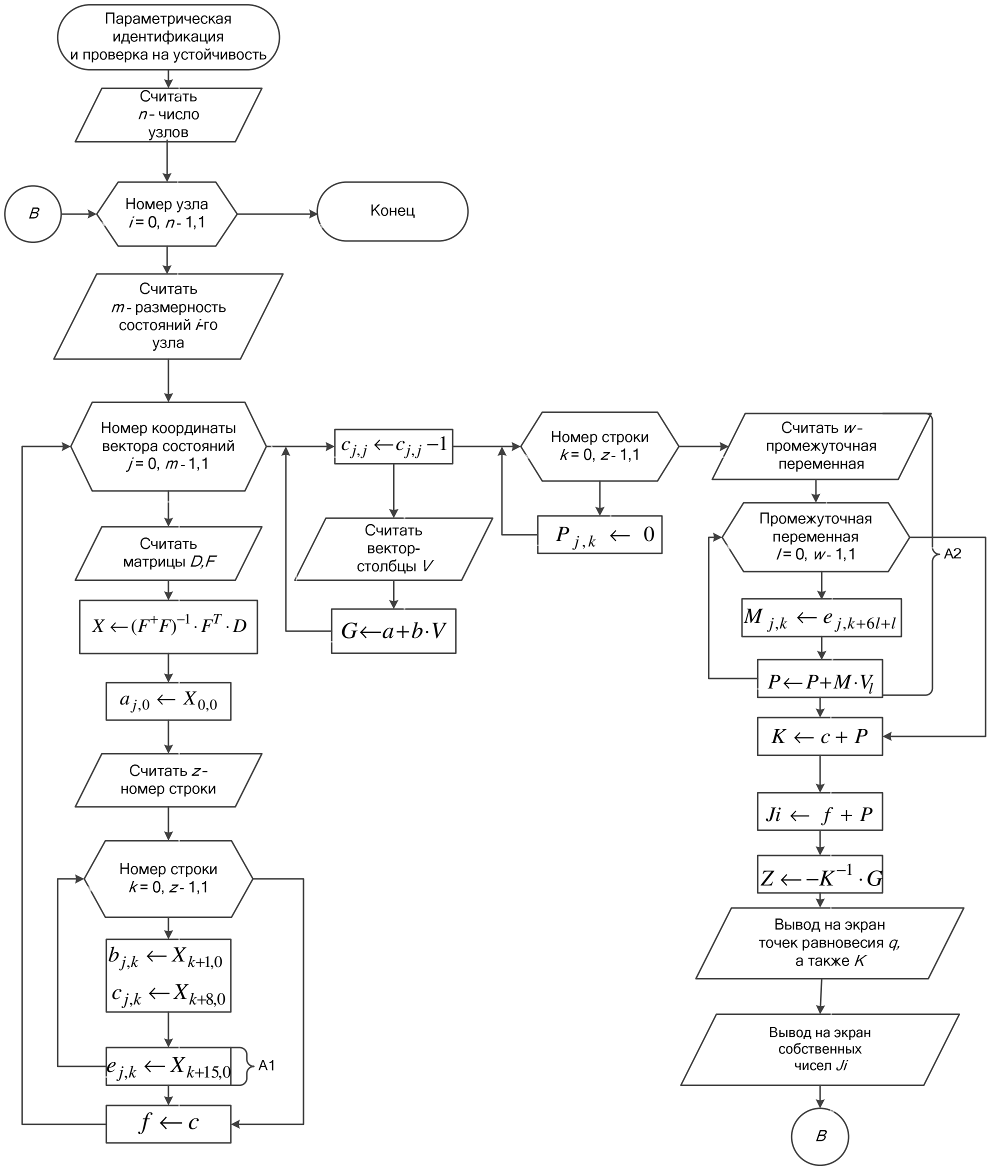

Рис. Блок-схема алгоритма программы

Вычисляем вектор-столбец X для всех параметров каждого узла по формуле $X \leftarrow (F^T F)^{-1} \cdot F^T D$. Затем производим разбиение вектор-столбца X на части по формулам (2) и (3), т.е. выделяем матрицы a, b, c, e. Отличие в проверке на устойчивость линейной динамической окрестностной модели от билинейной окрестностной модели в том, что в линейном случае отсутствует блочное умножение, т.е. составляем матрицы a, b, c из вектора X. Блочная часть «e» в линейном случае обнуляется. В данной программе блоки $A1, A2$ – это условия блочного умножения, которые выполняются только для билинейной окрестностной модели.

Системы уравнений дискретных линейных и билинейных динамических окрестностных моделей с пятью узлами в общем виде имеют вид (31) и (32). Присваиваем $f \leftarrow c$, чтобы сохранить исходную матрицу «c» для дальнейшего вычисления собственных чисел матрицы Якоби для каждого узла. Для нахождения точек равновесия линейной или билинейной окрестностной модели необходимо приравнять систему к нулю. В программе Mathcad производим замену $c_{j,j} \leftarrow c_{j,j} - 1$. Далее упрощаем формулы (2) и (3) следующим образом:

1. Вводим переменную $G \leftarrow a + bV$, где V – вектор управлений, a, b – матрицы.

2. Вводим переменную M, которая содержит все семь блоков каждой матрицы E_i, представленной в виде $E_i = [E_{i1} \quad E_{i2} \quad \ldots \quad E_{i7}]$, где i – номер узла.

3. Вводим промежуточную матрицу $P = M \cdot V_l$, где V_l – число. Затем матрице P присваивается следующее значение: $P \leftarrow P + M \cdot V_l$.

Для нахождения точек равновесия вычислим матрицу K, которая в линейном и билинейном случае будет следующей: $K \leftarrow c + P$. Найдем точки равновесия q для каждого узла путем решения формулы $Z \leftarrow -K^{-1}G$ и сохраним результаты в файле Excel, используя следующий синтаксис $q \leftarrow WRITEEXCEL(Z, Path, concat("x", num2str(i+1), "!"))$, который означает, что для каждого узла переменная Z сохраняется в файле Excel по заданному пути $Path$ и записывается в лист «xi». Функция $concat("x", num2str(i+1), "!")$ в блоке программирования Mathcad обозначает название листа в файле Excel, где запись $"x", num2str(i+1), "!"$ – это лист «xi».

Чтобы проверить модели на устойчивость, необходимо найти собственные числа для каждой точки равновесия линейной и билинейной динамических окрестностных моделей с помощью встроенной в Mathcad функции $eigenvals\ (Ji)$, где $Ji \leftarrow f + P$ – матрица Якоби для каждого узла i. Согласно критерию Ляпунова для проверки устойчивости дискретных динамических окрестностных моделей система устойчива, если собственные числа для каждого узла будут по модулю меньше единицы.

Выводы. Таким образом, рассмотрены линейные и билинейные окрестностные модели, выполнена их параметрическая идентификация. Произведено исследование линейных и билинейных дискретных динамических окрестностных моделей на устойчивость по критерию Ляпунова.

Была реализована программа в Mathcad для параметрической идентификации и проверки окрестностных моделей на устойчивость. Данная программа позволяет разрабатывать и исследовать линейные и билинейные окрестностные модели. С помощью представленной программы можно проводить изучение свойств пространственно-распределенных объектов и процессов сложных производственных систем. В дальнейшем планируются рассмотрение вопроса управления динамическими окрестностными моделями и его программная реализация.

Библиографический список

1. Shmyrin A., Sedykh I. Neural Networks Neighborhood Models // Global Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2016. – Vol. 12, № 6. – P. 5039–5046.

2. Седых И.А. Окрестностные производственные сети // XVII Междунар. науч. чтения (памяти В.К. Зворыкина): сб. ст. междунар. науч.-практ. конф.; 1 ноября 2017 г., г. Москва. – М.: ЕФИР, 2017. – С.16–19.

3. Шмырин А.М., Мишачёв Н.М. Окрестностные системы и алгоритм Качмажа // Вестник Тамбов. ун-та. Сер. Естественные и технические науки. – 2016. – Т. 21. – Вып. 6. – С. 2113–2120.

4. Седых И.А. Управление динамическими окрестностными моделями с переменными окрестностями // Системы управления и информационные технологии. – 2018. – № 1(71). – С. 18–23.

5. Shmyrin A., Sedykh I. A Measure of the Non-Determinacy of a Dynamic Neighborhood Model // Systems. – 2017. – 5(49). DOI: 10.3390/systems5040049

6. Седых И.А., Сметанникова А.М. Применение генетических алгоритмов для параметрической идентификации линейных и нелинейных динамических окрестностных моделей // Летняя школа молодых ученых ЛГТУ – 2017: сб. трудов науч.-практ. конф. студ. и аспир. Липецк. гос. техн. ун-та. – Липецк, 2018. – С. 44–47.

7. Шмырин А.М., Седых И.А. Классификация билинейных окрестностных моделей // Вестник Тамбов. ун-та. Сер. Естественные и технические науки. – 2012. – Т. 17. – Вып. 5. – С. 1366–1369.

8. Шмырин А.М., Седых И.А., Щербаков А.П. Общие билинейные дискретные модели // Вестник Воронеж. гос. техн. ун-та. – 2014. – Т. 10. – Вып. 3–1. – С. 44–49.

9. Шмырин А.М., Седых И.А. Дискретные модели в классе окрестностных систем // Вестник Тамбов. ун-та. Сер. Естественные и технические науки. – 2012. – Т. 17. – Вып. 3. – С. 867–871.

10. Седых И.А. Окрестностное моделирование мультиагентных систем // Вестник Тамбов. ун-та. Сер. Естественные и технические науки. – 2013. – Т. 18. – Вып. 5–2. – С. 2667–2668.

11. Седых И.А. Параметрическая идентификация линейной динамической окрестностной модели // Инновационная наука: прошлое, настоящее, будущее: сб. ст. междунар. науч.-практ. конф. – Уфа: АЭТЕРНА, 2016. – С. 12–19.

12. Седых И.А., Сметанникова А.М. Решение СЛАУ с помощью генетического алгоритма // Тенденции развития современной науки: сб. тез. докл. науч. конф. студ. и аспир. ЛГТУ. Ч. 2. – Липецк, 2017. – С. 233–236.

13. Екатеринчук Е.Д., Ряшко Л.Б. Анализ стохастических аттракторов квадратичной дискретной популяционной модели с запаздыванием // Компьютерные исследования и моделирование. – 2015. – Т. 7. – Вып. 1. – С. 145–157.

14. Седых И.А., Сметанникова А.М. Применение пакета MatLab для параметрической идентификации окрестностных моделей на основе генетических алгоритмов // Вестник ВГУ. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2017. – С. 24–29.

15. Седых И.А., Сметанникова А.М. Параметрическая идентификация окрестностной модели с помощью генетического алгоритма и псевдообращения // Интерактивная наука. – 2017. – Т. 4. – Вып. 14. – С. 113–116.

16. Седых И.А. Идентификация и управление динамическими окрестностными моделями // Современные сложные системы управления (HTCS'2017): материалы XII Междунар. науч.-практ. конф.; 25–27 октября 2017 г.: в 2 ч. Ч. 1. – Липецк: Изд-во ЛГТУ, 2017. – С. 138–142.

17. Shmyrin A., Sedykh I. Identification and control algorithms of functioning for neighborhood systems based on petri nets // Automation and Remote Control. – 2010. – Vol. 71, № 6. – P. 1265–1274.

18. Окрестностное моделирование процесса очистки сточных вод / А.М. Шмырин, И.А. Седых, А.М. Сметанникова, Е.Ю. Никифорова // Вестник ТГУ. Сер. Естественные и технические науки. – 2017. – Т. 22. – Вып. 3. – С. 596–604.

19. Седых И.А., Сметанникова А.М. Проверка устойчивости линейных динамических окрестностных моделей процесса очистки сточных вод // Материалы областного профильного семинара «Школа молодых ученых» по проблемам технических наук; 17 ноября 2017 г. – Липецк, 2017. – С. 125–129.

20. Седых И.А., Сметанникова А.М. Критерий Гурвица для проверки устойчивости линейных динамических окрестностных моделей процесса очистки сточных вод // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. – Пенза: Изд-во Пензен. гос. технолог. ун-та, 2018. – Т. 7, № 1(41). – С. 67–71.

References

1. Shmyrin A., Sedykh I. Neural Networks Neighborhood Models. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2016, vol. 12, no. 6, pp. 5039-5046.

2. Sedykh I.A. Okrestnostnye proizvodstvennye seti [Neighboring production networks]. *XVII Mezhdunarodnye nauchnye chteniia (Pamiati V.K. Zvorykina). Sbornik statei mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii*, 1 November 2017. Moscow, EFIR, 2017, pp. 16-19.

3. Shmyrin A.M., Mishachev N.M. Okrestnostnye sistemy i algoritm Kachmazha [Surrounding systems and Kachmazh's algorithm]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Estestvennye i tekhnicheskie nauki*, 2016, vol. 21, iss. 6, pp. 2113-2120.

4. Sedykh I.A. Upravlenie dinamicheskimi okrestnostnymi modeliami s peremennymi okrestnostiami [Control of dynamic neighborhood models with variable neighborhoods]. *Sistemy upravleniia i informatsionnye tekhnologii*, 2018, no. 1(71), pp. 18-23.

5. Shmyrin A., Sedykh I. A Measure of the Non-Determinacy of a Dynamic Neighborhood Model. *Systems*, 2017, vol. 5, iss. 4. DOI: 10.3390/systems5040049

6. Sedykh I.A., Smetannikova A.M. Primenenie geneticheskikh algoritmov dlia parametricheskoi identifikatsii lineinykh i nelineinykh dinamicheskikh okrestnostnykh modelei [Application of genetic algorithms for the parametric identification of linear and nonlinear dynamic neighborhood models]. *Letniaia shkola molodykh uchenykh LGTU-2017. Sbornik trudov nauchno-prakticheskoi konferentsii studentov i aspirantov Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. Lipetsk, 2018, pp. 44-47.

7. Shmyrin A.M., Sedykh I.A. Klassifikatsiia bilineinykh okrestnostnykh modelei [Classification of bilinear neighborhood models]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Estestvennye i tekhnicheskie nauki*, 2012, vol. 17, iss. 5, pp. 1366-1369.

8. Shmyrin A.M., Sedykh I.A., Shcherbakov A.P. Obshchie bilineinye diskretnye modeli [General bilinear discrete models]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2014, vol. 10, iss. 3-1, pp. 44-49.

9. Shmyrin A.M., Sedykh I.A. Diskretnye modeli v klasse okrestnostnykh sistem [Discrete models in the class of neighborhood systems]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Estestvennye i tekhnicheskie nauki*, 2012, vol. 17, iss. 3, pp. 867-871.

10. Sedykh I.A. Okrestnostnoe modelirovanie mul'tiagentnykh sistem [Neighborhood modeling of multi-agent systems]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Estestvennye i tekhnicheskie nauki*, 2013, vol. 18, iss. 5-2, pp. 2667-2668.

11. Sedykh I.A. Parametricheskaia identifikatsiia lineinoi dinamicheskoi okrestnostnoi modeli [Parametric identification of linear dynamic neighborhood model]. *Innovatsionnaia nauka: proshloe, nastoiashchee, budushchee. Cbornik statei mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii*. Ufa: AETERNA, 2016, pp. 12-19.

12. Sedykh I.A., Smetannikova A.M. Reshenie SLAU s pomoshch'iu geneticheskogo algoritma [The solution of systems of linear equations using a genetic algorithm]. *Tendentsii razvitiia sovremennoi nauki. Sbornik tezisov dokladov nauchnoi konferentsii studentov i aspirantov LGTU*. Lipetsk, 2017, part. 2, pp. 233-236.

13. Ekaterinchuk E.D., Riashko L.B. Analiz stokhasticheskikh attraktorov kvadratichnoi diskretnoi populiatsionnoi modeli s zapazdyvaniem [Analysis of stochastic attractors of quadratic discrete population model with delay]. *Komp'iuternye issledovaniia i modelirovanie*, 2015, vol. 7, iss. 1, pp. 145-157.

14. Sedykh I.A., Smetannikova A.M. Primenenie paketa MatLab dlia parametricheskoi identifikatsii okrestnostnykh modelei na osnove geneticheskikh algoritmov [Application of the MatLab package for parametric identification of neighborhood models based on genetic algorithms]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Estestvennye i tekhnicheskie nauki*, 2017, pp. 24-29.

15. Sedykh I.A., Smetannikova A.M. Parametricheskaia identifikatsiia okrestnostnoi modeli s pomoshch'iu geneticheskogo algoritma i psevdoobrashcheniia [Parametric identification of the neighborhood model by means of a genetic algorithm and pseudo-inversion]. *Interaktivnaia nauka*, 2017, vol. 4, iss. 14, pp. 113-116.

16. Sedykh I.A. Identifikatsiia i upravlenie dinamicheskimi okrestnostnymi modeliami [Identification and management of dynamic neighborhood models]. *Sovremennye slozhnye sistemy upravleniia (HTCS'2017). Materialy XII Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii*, 25-27 October 2017. Part 1. Lipetsk: Lipetskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet, 2017, pp. 138-142.

17. Shmyrin A., Sedykh I. Identification and control algorithms of functioning for neighborhood systems based on petri nets. *Automation and Remote Control*, 2010, vol. 71, no. 6, pp. 1265-1274.

18. Shmyrin A.M., Sedykh I.A., Smetannikova A.M., Nikiforova E.Iu. Okrestnostnoe modelirovanie protsessa ochistki stochnykh vod [Surrounding modeling of sewage treatment process]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Estestvennye i tekhnicheskie nauki*, 2017, vol. 22, iss. 3, pp. 596-604.

19. Sedykh I.A., Smetannikova A.M. Proverka ustoichivosti lineinykh dinamicheskikh okrestnostnykh modelei protsessa ochistki stochnykh vod [Verification of the stability of linear dynamic neighborhood models of wastewater treatmen]. *Materialy oblastnogo profilnogo seminara "Shkola molodykh uchenykh" po problemam tekhnicheskikh nauk*, 17 November 2017, Lipetsk, 2017, pp. 125-129.

20. Sedykh I.A., Smetannikova A.M. Kriterii Gurvitsa dlia proverki ustoichivosti lineinykh dinamicheskikh okrestnostnykh modelei protsessa ochistki stochnykh vod [Hurwitz criterion for testing the stability of linear

dynamic neighborhood models of wastewater treatment]. *XXI vek: itogi proshlogo i problemy nastoiashchego plius*. Penza: Penzenskii gosudarstvennyi tekhnologicheskii universitet, 2018, vol. 7, no. 1(41), pp. 67-71.

Сведения об авторах

Седых Ирина Александровна (Липецк, Россия) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика» Липецкого государственного технического университета (398055, Липецк, ул. Московская, 30, e-mail: sedykh-irina@yandex.ru).

Сметанникова Анастасия Михайловна (Липецк, Россия) – студентка Липецкого государственного технического университета (398055, Липецк, ул. Московская, 30, e-mail: n.smetannickowa@yandex.ru).

About the authors

Sedykh Irina Aleksandrovna (Lipetsk, Russian Federation) is a Ph.D. of Physics and Mathematics Sciences, Associate Professor Department of Higher Mathematics Lipetsk State Technical University (398055, Lipeczk, 30, Moskovskaya str., e-mail: sedykh-irina@yandex.ru).

Smetannikova Anastasiya Mikhailovna (Lipetsk, Russian Federation) is a Student Lipetsk State Technical University (398055, Lipeczk, 30, Moskovskaya str., e-mail: n.smetannickowa@yandex.ru).

Получено 17.01.2019